数理解析研究所講究録
1057巻 1998年 17-21

On odd degree parts of cohomology of Sporadic groups whose Sylow p-subgroup is the extra-special p-group of order p^3

Nobuaki Yagita
(柳田 伸顕 茨城大学教育学部)

Abstract. This talk is about the same titled paper which is to appear in J. Algebra. Let G be a finite group whose Sylow p-subgroup is isomorphic to p_+^{1+2}: the extra special p-group of order p^3 and exponent p. The even degree cohomology $H^{even}(G)_{(p)}$ is studied by Tezuka-Yagita. In this talk, we study the odd degree parts $H^{odd}(G)_{(p)}$ by using fact that

$$Q_1 : H^{odd}(G)_{(p)} \longrightarrow H^{even}(G)_{(p)}$$

is injective. Here Q_1 is the operation induced from the Milnor primitive on $H^*(G; Z/p)$.

(内容) $E = P_+^{1+2}$ とする, つまり

$$0 \to Z/p \longrightarrow E \longrightarrow Z/p \oplus Z/p \longrightarrow 0$$

なる central extension があって E の exponent は p とする. (散在単純群, 素数) $= (G, p)$ のうち 17 の場合

GがEを p-Sylow subgroup にもつ。とくに

$$H^*(G)_{(p)} \hookrightarrow H^*(E).$$

さらに Cartan-Eilenberg の stable elements theorem より

$$H^*(G)_{(p)} \cong H^*(E)^{W_G(E)} \cap_A i_A^{*-1} H^*(A)^{W_G(A)}$$

ここで $W_G(B) = N_G(B)/B \cdot C_G(B)$。これより理論的には $H^*(G)_{(p)}$ が計算できるはずであるが，実際の invariant の計算は非常にめんどうである。

そこで Quillen の定理を思い出す。

$$r : H^{even}(G\,;\mathbb{F}_p) \longrightarrow \lim_{\substack{\text{conj class of } A:\ \text{elementary}\\ \text{abelian } p\text{-group of } G}} H^{even}(A\,;\mathbb{F}_p)$$

は F-isomorphism

（つまり $\mathrm{Ker}\, r \subset \sqrt{0}$ で $\forall x$ に対し $x^{p^s} \in \mathrm{Im}\, r$）.

さらに $\mathrm{rank}_p G = 2$ の時

$$r : H^{even}(G)_{(p)} \longrightarrow \lim_A H^{even}(A)$$

の $\mathrm{Ker}\, r = \sqrt{0}$ がいえる.

これを具体的な場合に考えてみる. 簡単のために $p=3$ を仮定する。$p=3$ のとき

$$H^{even}(E) \simeq \left(\tilde{\mathbb{Z}}/3[y_1, y_2]/(y_1^3 y_2 - y_1 y_2^3) \oplus \mathbb{Z}/3\{b\}\right) \otimes \mathbb{Z}/9[v]$$

ここで $\tilde{\mathbb{Z}}/3[a] = \mathbb{Z}[a]/(3a)$,

$|y_i| = 2$, $|b| = 4$, $|v| = 2 \cdot p = 6$ で

$y_i b = y_i y_j^2$ $(i \neq j)$, $b^2 = (y_1 y_2)^2$ が成り立つ

したがって

$$\sqrt{0} = \mathbb{Z}/3\{3\cdot v^s \mid s \geq 1\}.$$

そこで G が $\underset{A}{\underline{\mathbb{Z}/3 \oplus \mathbb{Z}/3}}$ の conjugacy class が唯一つしかもたないと仮定すると

$$H^{even}(G)_{(3)}/(3) \hookrightarrow H^{even}(A)^{W_G(A)} = \mathbb{Z}/3[t_1, t_2]^{W_G(A)}$$

$G = Ru, J_4$ のとき conj class の数は 1 で $W_G(A) = GL_3(\mathbb{F}_3)$ が知られている。ゆえに

$$H^{even}(J_4)_{(3)}/(3) \simeq \mathbb{Z}/3[t_1, t_2]^{GL_3(F_3)} \underset{\text{Dickson algebra}}{=} \mathbb{Z}/3[D_1, D_2].$$

ゆえに、この場合

$$H^{even}(J_4)_{(3)} \simeq \tilde{\mathbb{Z}}/3[D_2] \otimes \tilde{\mathbb{Z}}/9[D_1]$$

ここで $D_1 = (y_1^2 + y_2^2 + b)^3 + v^2$, $D_2 = (y_1^2 + y_2^2 + b)v^2$ in $H^*(E)$ ととれる。

他の場合も、上のアイデアで $H^{even}(G)_{(p)}$ が手塚一柳田で計算されている。

それで odd degree の場合だが、当然 $H^{odd}(G)_{(p)} \subset \sqrt{0}$ より Quillen の定理は直接にはつかえない（$H^*(A)$ に制限するという考えはやはり重要だが）。まず $H^{odd}(E)$ をみる

$$H^{odd}(E) \simeq \mathbb{Z}/3[y_1, y_2, v]\{a_1, a_2\}/(y_1a_2 - y_2a_1,\ y_1^p a_2 - y_2^p a_1).$$

ここで $|a_i| = 3$。そこで

$$Q_1 : H^{odd}(E) \longrightarrow H^{even}(E)$$

by $Q_1(\sum f_i(y_1, y_2, v)a_i) = \sum f_i(y_1, y_2, v)y_i v$

が injective になっている事に注意する。この Q_1 は $H^*(-;\mathbb{F}_p)$ の cohomology operation の Milnor primitive $Q_1 = \beta\mathcal{P}^1 - \mathcal{P}^1\beta$; β: Bockstein $\mathcal{P}^1$: reduced power から induce されたもので naturality がある。つまり

$$Q_1 : H^{odd}(G)_{(p)} \longrightarrow H^{even}(G)_{(p)}$$

が injective な事がいえる。ゆえに次の系がなりたつ。

$$H^{odd}(G)_{(p)} \cong \left(H^{even}(G)_{(p)} \cap \mathrm{Ideal}(y_1 v, y_2 v) \text{ in } H^{even}(E)\right).$$

これより $(G, p) = (J_4, 3)$ の場合を計算すると

$D_1, D_2 \notin \mathrm{Ideal}(y_1 v, y_2 v)$ だが

$D_2^2 = (y_1^2 + y_2^2 + b)^2 v^2 \in \mathrm{Ideal}$

(ここで $y_1 b = y_1 y_2^2$, $y_2 b = y_2 y_1^2$, $b^2 = y_1^2 y_2^2$ を使った)。ゆえに

$$H^{odd}(J_4)_{(3)} \cong \mathbb{Z}/3[D_1, D_2]\{\underset{v^2(y_1 v a_1 + y_2 v a_2 + b y_1 v a_1)}{\underset{\shortparallel}{Q_1^{-1}(D_2^2)}}\}.$$

さらに $H^*(J_4)_{(3)}$ がわかったので $H^*(J_4; F_4)$ もわかり

$$H^*(J_4; \mathbb{F}_3) \cong \mathbb{Z}/3[D_1, D_2] \otimes \Lambda(D_1', D_2')$$

$|D_i'| = |D_i| - 1$.

このように一般に $H^*(G; F_p)$ を計算するとき、理論的には直接計算が良いとされているが、まず $H^*(G)_{(p)}/\sqrt{0}$ 次に $H^{even}(G)_{(p)}$、次に $H^{odd}(G)_{(p)}$ そして最後に $H^*(G; \mathbb{F}_p)$ を求めるのが、実際的なやり方だと、筆者は考えている。

operation Q_1 は最初 BP (Brown-Peterson)-theory を考えていて思いついた。最近はだれも信じない予想

$$BP^*(BG) \cong BP^{even}(BG)$$

は，この場合正しく， $BP^*(BG)$ の収束する Atiyah-Hirzebruch spectral sequence

$$E_2^{*,*} = H^*(BG; BP^*) \Rightarrow BP^*(BG)$$

を考えると

$$d_{2p-1}(x) = v_1 \otimes Q_1(x)$$

ここで $BP^* = Z_{(p)}[v_1, v_2, \cdots]$, $|v_i| = -2(p^i-1)$ としている。この時 $d_r(x) = 0$ $r \geq 2p$ が知られていて

$$E_{2p}^{*,*} \cong E_\infty^{*,*} \cong gr\, BP^*(BG) = gr\, BP^{even}(BG)$$

したがって d_{2p-1} は injective で正確には

$$Q_1 = v_1^{-1} \otimes d_{2p-1} : H^{odd}(G)_{(p)} \longrightarrow H^{even}(G)_{(p)}$$

が injective がいえる。