数理解析研究所講究録
1059 巻 1998 年 51-58

Mourre の方法と smoothing effect

姫路工業大学　理学部　　保城　寿彦

1 序

まず次の3つの事柄が同じ内容を扱っていることに注意しよう（[4] 参照）。

(1) 制限定理（調和解析学）
(2) 極限吸収の原理（スペクトル理論）
(3) 分散型方程式における smoothing effect （偏微分方程式）

このことから上の一つの分野の手法が他の分野に応用できる可能性がある。　ここではスペクトル理論の Mourre の方法を

$$\begin{cases} i\frac{\partial u}{\partial t} + Pu = f, & (P = P(x,D) : \text{formally self-adjoint}) \\ u|_{t=0} = u_0. \end{cases}$$

といった分散型方程式の初期値問題における smoothing effect に応用できることを説明したい。また smoothig effect が変数係数の分散型方程式の多くの場合に生じていることを理解していただければ幸いである。

Mourre の方法 (Mourre's commutator method) とは： [6] において E. Mourre が singular continuous なスペクトルの不存在を示す為に発明した方法で、Hamiltonian

$$H = -\Delta + V(x)$$

に対し

$$E_I[H, iA]E_I \geq \alpha E_I + E_I K E_I$$

となる様な自己共役作用素 A が存在するとき、区間 I には singular continuous spectrum が無いことがいえる。　ただしここで

$$\alpha > 0, \quad E_I = \int_{\lambda \in I} dE_\lambda$$

$$H = \int_{\mathbb{R}} \lambda dE_\lambda, \quad K: \text{ compact operator}$$

である。もう少し詳しく言えば、上の条件の下で $\mathbb{C} \ni z \to \lambda \in I \setminus \sigma_p(H)$ とするとき

$$\|(|A|+1)^{-1}(H-z)^{-1}(|A|+1)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2)}$$

が有界にとどまることがいえるのである（極限吸収）。B. Simon の講義録 [2] の4章などを参照されたい。

例

$$H_0 = -\Delta, \quad iA = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot x + x\cdot\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

(iA は dilation semigroup $U(\theta)f = e^{\frac{n}{2}\theta}f(e^{\theta}x), \quad \theta \in \mathbb{R}$ の生成作用素)

なら

$$[H_0, iA] = 2H_0$$

で任意の区間 $I \subset \mathbb{R}_+$ に対し上の条件をみたす。（ここでは $K = O$ ととれる。上の不等式は Laplacian H_0 の斉次性によることを注意していただきたい。）

Mourre の方法は commutator に対する条件が出てくる点で加藤敏夫先生(KdV [5])や土居氏(Schrödinger type [3])の smoothing effect を示す方法とも密接な関わりがあると思われる。

2 結果

まず定数係数 $P = P(D)$ の場合：

仮定

(A.1) $P(\xi)$ は実数値で C^1 級。

(A.2) $P(\xi)$ は m 次斉次、即ち

$$P(\lambda\xi) = \lambda^m P(\xi), \quad \lambda > 0, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

また

$$A = \frac{1}{2i}\left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot x + x\cdot\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

とする。このとき初期値問題

(1)
$$\begin{cases} i\frac{\partial u}{\partial t} + P(D)\,u = f, \\ u|_{t=0} = u_0. \end{cases}$$

について次が成立する。

定理 1.

(i) (1) で $u_0 \equiv 0,\ f|_{t<0} \equiv 0$ のとき、 任意の $\alpha > 1/2$ に対し定数 $C = C_\alpha$ が存在して

$$\|(|A|+1)^{-\alpha}|P(D)|u\|_{L^2(\mathbb{R}^{n+1})} \le C\|(|A|+1)^{\alpha}f\|_{L^2(\mathbb{R}^{n+1})}$$

となる。

(ii) (1) で $f \equiv 0$ のとき、任意の $\alpha > 1/2$ に対し定数 $C' = C'_\alpha$ が存在して

$$\|(|A|+1)^{-\alpha}|P(D)|^{1/2}u\|_{L^2(\mathbb{R}^{n+1})} \le C'\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

となる。

上の定理において粗くいって $A \sim x\cdot D,\ A^\alpha \sim x^\alpha\cdot D^\alpha$ であることから次が従う。

系.

(i) (1) で $u_0 \equiv 0,\ f|_{t<0} \equiv 0$ のとき、 任意の $\alpha > 1/2$ に対し定数 $C = C_\alpha$ が存在して

$$\|\langle x\rangle^{-\alpha}\langle D\rangle^{-2\alpha}|P(D)|u\|_{L^2(\mathbb{R}^{n+1})} \leq C\|\langle x\rangle^{\alpha} f\|_{L^2(\mathbb{R}^{n+1})}$$

となる。

(ii) (1) で $f \equiv 0$ のとき、任意の $\alpha > 1/2$ に対し定数 $C' = C'_\alpha$ が存在して

$$\|\langle x\rangle^{-\alpha}\langle D\rangle^{-\alpha}|P(D)|^{1/2}u\|_{L^2(\mathbb{R}^{n+1})} \leq C'\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

となる。

これより解 u は f より $m-2\alpha$ 階、初期値 u_0 より $\frac{m}{2}-\alpha$ 階 ($\alpha > 1/2$) regularity が上がっていることがわかる。

次に変数係数 $P = P(x, D)$ の場合： 抽象的な設定で述べる。

仮定 P は自己共役で更に次の性質をみたす自己共役作用素 A と正定値自己共役作用素 Q が存在するとする。

$$[P, iA] = Q, \quad [Q, iA] = cQ\ (c:\ \text{定数})$$
$$[P, Q] = O.$$

このとき初期値問題

$$(2) \qquad \begin{cases} i\frac{\partial u}{\partial t} + P u = f, \\ u|_{t=0} = u_0. \end{cases}$$

について次が成立する。

定理 2.

(i) (2) で $u_0 \equiv 0,\ f|_{t<0} \equiv 0$ のとき、 任意の $\alpha > 1/2$ に対し定数 $C = C_\alpha$ が存在して

$$\|(|A|+1)^{-\alpha}Qu\|_{L^2(\mathbb{R}^{n+1})} \leq C\|(|A|+1)^{\alpha} f\|_{L^2(\mathbb{R}^{n+1})}$$

となる。

(ii) (2) で $f \equiv 0$ のとき、任意の $\alpha > 1/2$ に対し定数 $C' = C'_\alpha$ が存在して

$$\|(|A|+1)^{-\alpha}Q^{1/2}u\|_{L^2(\mathbb{R}^{n+1})} \leq C'\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

となる。

例

(1) 自然数 $\ell > 1$ に対し

$$P = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\, x_j^{2\ell}\, \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

とおく。　このとき

$$A = -\frac{1}{2i}\left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot x + x\cdot\frac{\partial}{\partial x}\right), \quad Q = 2(\ell-1)P.$$

とすれば定理の仮定をみたす。

(2)

$$P = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + x_1^2\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)$$

とおく。　このとき

$$A = \frac{1}{2i}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}x_1 + x_1\frac{\partial}{\partial x_1}\right) + 2\left(\frac{\partial}{\partial x_2}x_2 + x_2\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\right\},$$
$$Q = 2P$$

とすれば定理の仮定をみたす。

また作用素 P が Heisenberg 群や nilpotent Lie 群の Laplacian などの場合でも symbol が何らかの斉次性を持っているので

$$P(e^{i\theta A}u) = e^{\gamma\theta}e^{i\theta A}(Pu)$$

となる一階偏微分作用素 A と正定数 γ が存在する。よってこの式を θ で微分して $\theta=0$ とおくと $[P, iA] = \gamma P$ となるので $Q = \gamma P$ とおけば定理の仮定をみたすことがわかる。

3 証明の概略

まず証明の idea について述べる。　粗く言って (1) の基本解の symbol は

$$\frac{1}{-\tau + P(\xi)}$$

であるが、$P(\xi)$ が実数値なので　$\tau = P(\xi)$ となる $(\tau,\xi)\in\mathbb{R}^{n+1}$ が存在する。　従ってこの作用素が L^2 で有界となることはあり得ないが何らかの重みを付けた空間では有界になることを示すのがここでの仕事である。　そこで超局所解析などで昔からやられている様にまず一旦複素に逃げてから real の世界にもどることをかんがえる。つまり $\hat{f}(\tau,\xi)$ を $f(t,x)$ の時空間についての Fourier 変換として、$u^{+}_{\epsilon,\epsilon'}$, $u^{-}_{\epsilon,\epsilon'}$ $(\epsilon,\epsilon'>0)$ を各々

$$\hat{u}^{\pm}_{\epsilon,\epsilon'}(\tau,\xi) = \frac{\hat{f}(\tau,\xi)}{-\tau + P(\xi) \pm i\left\{\epsilon' + \epsilon|P(\xi)|\right\}}.$$

と定義する。　このときの写像 $f \mapsto u^{\pm}_{\epsilon,\epsilon'}$ について ϵ,ϵ' に依らない定数 C が存在して次の不等式が成立することを示せばよい。

(3) $$\|(|A|+1)^{-\alpha}|P(D)|u^{\pm}_{\epsilon,\epsilon'}\| \le C\|(|A|+1)^{\alpha}f\|$$
$$(\|\ \ \| = \|\ \ \|_{L^2(\mathbb{R}^{n+1})})$$

変数係数の場合は

$$u^{\pm}_{\epsilon,\epsilon'} = (i\partial_t + P \pm \{\epsilon' + \epsilon Q\})^{-1} f$$

と定義して (3) の $|P(D)|$ を Q で置き換えた不等式を示す。

(3) さえ示せば

$$u^{\pm} = \lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ \epsilon'\to 0}} u^{\pm}_{\epsilon,\epsilon'}$$

とすると $u^{\pm}$ は

$$(i\partial_t + P(D))u^{\pm} = f,$$

をみたし、留数計算によって初期値は各々

$$u^{+}(0,x) = -i\int_{-\infty}^{0} e^{-isP(D)} f(s,x)\,ds,$$
$$u^{-}(0,x) = i\int_{0}^{\infty} e^{-isP(D)} f(s,x)\,ds$$

であることがわかる。 従って $f(t,x)|_{t<0} \equiv 0$ なら $u^{+}(0,x) \equiv 0$ で u^{+} が定理 1 の (i) の解である。 よって (3) より (i) の結果が従う。

定理の (ii) の部分は (i) の結果から次の様にして導くことができる。 まず

$$u = i\,(u^{+} - u^{-}).$$

とおくと

$$\begin{cases} i\partial_t u + P(D)u = 0, \\ u(0,x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isP(D)} f(s,x)\,ds \end{cases}$$

である。 作用素 T を

$$f = f(t,x) \mapsto u_0 = u(0,x).$$

で定義すると

$$u_0 \mapsto e^{itP(D)} u_0$$

はその共役 T^* で、更に

$$f \mapsto u$$

は T^*T と表される。 以上の考察と (i) の部分の結果より次の不等式が成立する。

$$\begin{aligned}
&\||P(D)|^{1/2} Tf\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
&= \left|(|P(D)|^{1/2} Tf,\, |P(D)|^{1/2} Tf)_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right| \\
&= \left|(|P(D)| T^*Tf, f)_{L^2(\mathbb{R}^{n+1})}\right| \\
&\le \|(|A|+1)^{-\alpha} |P(D)| T^*Tf\|_{L^2(\mathbb{R}^{n+1})} \|(|A|+1)^{\alpha} f\|_{L^2(\mathbb{R}^{n+1})} \\
&= \|(|A|+1)^{-\alpha} |P(D)| u\|_{L^2(\mathbb{R}^{n+1})} \|(|A|+1)^{\alpha} f\|_{L^2(\mathbb{R}^{n+1})} \\
&\le C\|(|A|+1)^{\alpha} f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{n+1})}.
\end{aligned}$$

次にこの不等式の dual をとる。つまり

$$\begin{aligned}&\left|(f,\,|P(D)|^{1/2}T^*u_0)_{L^2(\mathbb{R}^{n+1})}\right|\\ =&\left|(|P(D)|^{1/2}Tf,\,u_0)_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right|\end{aligned}$$

の右辺に上の不等式を用いれば

$$\|(|A|+1)^{-\alpha}|P(D)|^{1/2}T^*u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^{n+1})}\leq C\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

となるがこれは (ii) の結果と同じである。

以上より (3) を示すことが主な仕事であることがわかったが、ここで E. Mourre の方法を用いる。 ここでは簡単の為 $\alpha=1$ で

$$P(\xi)\geq 0,\quad \xi\in\mathbb{R}^n$$

となっている場合について示す。 まず作用素 G を symbol が

$$\sigma(G)=(-\tau+P(\xi)+i\{\epsilon'+\epsilon\,P(\xi)\})^{-1}$$

となるものとする。更に

$$F=(|A|+1)^{-1}PG(|A|+1)^{-1}\qquad(P=P(D))$$

とおく。 このとき

$$\|F\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^{n+1}))}\tag{4}$$

が $\epsilon,\epsilon'>0$ に依らない定数でおさえられることを示す。(4) を ϵ について微分すると

$$\frac{d}{d\epsilon}F=-i(|A|+1)^{-1}GP^2G(|A|+1)^{-1}.$$

となる。 定理 1 の仮定 (A.1) と (A.2) より

$$[P,\,iA]=mP\qquad(\text{Euler の恒等式})$$

となるから

$$\begin{aligned}&[i\partial_t+P+i\{\epsilon'+\epsilon P\},\,A]\\ =&(1+i\,\epsilon)[P,\,A]\\ =&-i\,m\,(1+i\,\epsilon)P\end{aligned}$$

である。従って次の等式が成立する。

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\epsilon}F &= \frac{1}{i\,m(1+i\,\epsilon)}(|A|+1)^{-1}PG[i\partial_t + P + i\{\epsilon' + \epsilon P\},\, A] \\ &\qquad\qquad\qquad \cdot G(|A|+1)^{-1} \\ &= \frac{1}{i\,m(1+i\,\epsilon)}(|A|+1)^{-1}P[A,\,G](|A|+1)^{-1} \\ &= \frac{1}{i\,m(1+i\,\epsilon)}(|A|+1)^{-1}\{APG - PGA + [P,\,A]G\}(|A|+1)^{-1} \\ &= \frac{1}{i\,m(1+i\,\epsilon)}\{(|A|+1)^{-1}APG(|A|+1)^{-1} \\ &\qquad - (|A|+1)^{-1}PGA(|A|+1)^{-1} - i\,mF\}.\end{aligned}$$

よって次の不等式が成立することがわかる。

$$\begin{aligned}\|\frac{d}{d\epsilon}F\| \le C\{&\|PG(|A|+1)^{-1}\| \\ &+ \|(|A|+1)^{-1}PG\| + \|F\|\}\end{aligned} \tag{5}$$

但し

$$\|\quad\| = \|\quad\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^{n+1}))}$$

である。ここで次の補題が成立する（証明略）。

<u>補題</u>.

(i)

$$\|F\| \le \epsilon^{-1},$$

(ii)

$$\begin{aligned}\|PG(|A|+1)^{-1}\| &\le \epsilon^{-1/2}\,\|F\|^{1/2}, \\ \|(|A|+1)^{-1}PG\| &\le \epsilon^{-1/2}\,\|F\|^{1/2}.\end{aligned}$$

これを認めるとまず

$$\|F\| \le \epsilon^{-1}.$$

これを (5) に代入して

$$\|\frac{dF}{d\epsilon}\| \le C_1\epsilon^{-1}.$$

更に ϵ について積分して

$$\|F\| \le C_2|\log\,\epsilon|.$$

再び (5) に代入して

$$\|\frac{dF}{d\epsilon}\| \le C_3\epsilon^{-1/2}|\log\,\epsilon|^{1/2}$$

最後に ϵ について積分すれば

$$\|F\| \leq C_4$$

と目的の不等式が得られる。$1/2 < \alpha < 1$ の場合の証明は [8] を参照して頂きたい。

参考文献

1. P. Constantin and J.C. Saut, *Local smoothing properties of dispersive equations*, Jour. Amer. Math. Soc. **1** (1988), 413–439.
2. H.L. Cycon, R.G. Froese, W. Kirsh and B. Simon, *Schrödinger Operators*, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1987.
3. S. Doi, *On the Cauchy problem for Schrödinger type equations and the regularity of solutions*, J. Math. Kyoto Univ. **34** (1994), 319–328.
4. T. Hoshiro, *Restriction theorem* と極限吸収, 数理解析研究所講究録 **994** (1997), 121–130.
5. T. Kato, *On the Cauchy problem for the (genaralized) Korteweg-de Vries equation*, Studies in Appl. Math., Adv. Math. Suppl. Studies **8** (1983), 93–128.
6. E. Mourre, *Absence of singular continuous spectrum for certain selfadjoint operators*, Comm. Math. Phys. **78** (1981), 391–408.
7. E. Mourre, *Operateurs conjugués et propriétés de propagation*, Comm. Math. Phys. **91** (1983), 279–300.
8. P. Perry, I.M. Sigal and B. Simon, *Spectral analysis of N-body Schrödinger operators*, Ann. of Math. **114** (1981), 519–567.
9. R.S. Strichartz, *Restriction of Fourier transform to quadratic surfaces and decay of solutions to wave equations*, Duke Math. J **44** (1977), 705–714.