数理解析研究所講究録
1060 巻 1998 年 224-230



# 短区間における Dirichlet 約数問題の平均値定理について

山口大・理　木内　功 (Isao Kiuchi)
名大・多元数理　谷川 好男 (Yoshio Tanigawa)

## §1. 序.

約数関数 $d(n)$ に対して

$$\Delta(x) = {\sum_{n\le x}}' d(n) - x(\log x + 2\gamma - 1) - \frac{1}{4}$$

とおく. ここで $\gamma$ は Euler 定数で、$\sum_{n\le x}'$ は $x$ が整数のときは最後の項を $d(x)/2$ にすることを意味する. このとき $\Delta(x) \ll x^{1/4+\varepsilon}$ を主張するのが Dirichlet 約数問題であるが、現在のところ Huxley によって $\Delta(x) \ll x^{23/73}(\log x)^{315/146}$ が知られている. 一方 Tong [9] は

$$\int_1^X \Delta(x)^2 dx = \frac{\zeta(3/2)^4}{6\pi^2\zeta(3)} X^{3/2} + O(X\log^5 X)$$

を証明し、平均的には上の予想が正しいことを示した. ゼータ関数の立場からは約数関数 $\sigma_a(n)$ $(-1 < a \le 0)$ の振る舞いを考察するのが重要である. そこで有理数 $r = h/k,\ \ (h,k)=1,\ \ k>0$ に対し

$$\Delta_0(x;r) = {\sum_{n\le x}}' d(n)e(rn) - k^{-1}(\log x + 2\gamma - 1 - 2\log k)x - E_0(0;r)$$

および

$$\Delta_a(x;r) = {\sum_{n\le x}}' \sigma_a(n)e(rn) - k^{-1+a}\zeta(1-a)x - \frac{k^{-1-a}\zeta(1+a)}{1+a}x^{1+a} - E_a(0;r)$$

$(-1 < a < 0)$ の 2 乗平均が問題にされてきた. ここで $e(\alpha) = \exp(2\pi i\alpha)$、また $E_a(0;r)$ は、Re $s > 1$ で定義される次の関数

$$E_a(s;r) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_a(n)e(rn)}{n^s}$$

を全 $s$ 平面に解析接続したものの $s=0$ における値である. 実際

$$c_1(a)=\frac{1}{(6+4a)\pi^2}\frac{\zeta(3/2-a)\zeta(3/2+a)\zeta^2(3/2)}{\zeta(3)}$$

とおき、

$$\int_1^X|\Delta_a(x;r)|^2dx=c_1(a)kX^{3/2}+F_a(X;r)$$

によって関数 $F_a(X;r)$ を定めると、$1\le k\le X$ のとき

$$F_a(X;r)=O(k^2X^{1+\varepsilon}+k^{3/2}X^{5/4+a/2+\varepsilon})$$

なる評価が成り立つことが、$a=0$ の時は Jutila [3]、$-1/2<a<0$ の時は木内 [4] により示されている. 一方 $k=1$ のときは更に詳しく、

$$\int_1^X|\Delta_a(x;1)|^2dx=\begin{cases} c_1(a)X^{3/2+a}+O(X) & \cdots \quad -1/2<a<0,\\ \dfrac{\zeta(3/2)^2}{24\zeta(3)}X\log X+O(X) & \cdots \quad a=-1/2,\\ O(X) & \cdots \quad -1<a<-1/2\end{cases}$$

が Meurman [8] によって得られている. 最近、柳沢直樹氏 [10] は $-1<a<-1/2$ の時、Chowla-Walum の方法によって

$$\int_1^X|\Delta_a(x;1)|^2dx=\frac{1}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_{1+a}(n)^2}{n^2}X+O(X^{3/2+a}\log X)$$

を示し、Meurman の最後の場合の結果を改良することに成功している.

これらの関数の局所的な挙動を調べるには short intervals における積分をみるのが重要である. $d(n)$ の場合に Jutila [2] は、$X\ge 2,\ 1\le U\ll X^{1/2}\ll H\le X$ の条件下で

$$\int_X^{X+H}|\Delta_0(x+U;1)-\Delta_0(x;1)|^2dx$$
$$=\frac{1}{4\pi^2}\sum_{n\le\frac{X}{2U}}\frac{d(n)^2}{n^{3/2}}\int_X^{X+H}x^{1/2}\left|e\left(U\sqrt{\frac{n}{x}}\right)-1\right|^2dx+O(X^{1+\varepsilon})+O(HU^{1/2}X^{\varepsilon})$$

が成り立つことを示し、更に系として $HU\ll X^{1+\varepsilon},\ X^{\varepsilon}\ll U\le\frac{1}{2}X^{1/2}$ のとき、

$$\int_X^{X+H}|\Delta_0(x+U;1)-\Delta_0(x;1)|^2dx\asymp HU\log^3(X^{1/2}/U)$$

を示した.

我々はこの Jutila の結果を $\Delta_a(x;r)$ の場合に拡張した. 即ち

**定理.** $X \geq 2,\ 1 \leq U \ll X^{1/2} \ll H \leq X,\ 4kU \leq X$ かつ $-1 < a \leq 0$ とする. このとき

$$(1)\quad \int_X^{X+H} |\Delta_a(x+U;r) - \Delta_a(x;r)|^2 dx$$
$$= \frac{k}{4\pi^2} \sum_{n \leq \frac{X}{4kU}} \frac{\sigma_a(n)^2}{n^{3/2+a}} \int_X^{X+H} x^{1/2+a} \left| e\left(\frac{U}{k}\sqrt{\frac{n}{x}}\right) - 1\right|^2 dx + K_a(X;r)$$

によって誤差項 $K_a(X;r)$ を定めると

$$K_a(X;r) \ll k^2 X^{1+\varepsilon} + \begin{cases} k^{3/2} H X^{1/4+a/2+\varepsilon} & \cdots \quad -1/2 < a \leq 0, \\ 0 & \cdots \quad -1 < a \leq -1/2 \end{cases}$$

が成り立つ.

またこの定理より次の系を得る.

**系.** $k, U, H$ には定理の条件、及び $k^3 < U$, $H = o(X)$ を仮定する. この時 $-1/2 < a \leq 0$ に対し

$$K_a(X;r) \ll k^2 X^{1+\varepsilon} + \begin{cases} k^{3/2+a} H U^{1/2+a} X^{\varepsilon} & \cdots \quad -1/4 \leq a \leq 0, \\ k^{1-a} H U^{1/2+a} X^{\varepsilon} & \cdots \quad -1/2 < a < -1/4 \end{cases}$$

が成り立つ. 更に $k^{2+2a} X^{1+\varepsilon} \ll HU^{1+2a}$, $k^{\max(3+6a, 2+2a)} X^{\varepsilon} \ll U^{1+2a}, U \leq \dfrac{kX^{1/2}}{2}$ が満たされているならば、

$$\int_X^{X+H} |\Delta_a(x+U;r) - \Delta_a(x;r)|^2 dx \asymp \begin{cases} HU \log^3(\frac{kX^{1/2}}{U}) & \cdots \quad a = 0, \\ k^{-2a} H U^{1+2a} & \cdots \quad -1/2 < a < 0 \end{cases}$$

が成り立つ.

**注.** $-1 < a \leq -1/2$ なる $a$ に対しては trivial estimate により

$$\int_X^{X+H} |\Delta_a(x+U;r) - \Delta_a(x;r)|^2 dx \ll k^2 X^{1+\varepsilon}$$

であるが、これは Meurman の場合と同様に $a = -1/2$ が critical な点であることを意味している.

**§2. 定理の略証.**

$k$ を正の整数、$h$ を $k$ と互いに素な整数とするとき、$\mathrm{mod}\, k$ の剰余類 $\bar{h}$ を $h\bar{h} \equiv 1 \pmod{k}$ で定める. また有理数 $r = h/k$, $k > 0$, $(h,k) = 1$ に対し、$\bar{r} = \bar{h}/k$ とおく. さて定理の証明には木内 [4] で示されている次の truncated Voronoï formula を使う. 即ち、$X \leq x \ll X$ のとき

$$\Delta_a(x;r) = \frac{k^{1/2}x^{1/4+a/2}}{\pi\sqrt{2}} \sum_{n \leq X} \frac{\sigma_a(n)e(-\bar{r}n)}{n^{3/4+a/2}} \cos\left(4\pi\frac{\sqrt{nx}}{k} - \frac{\pi}{4}\right) + O(kX^\varepsilon).$$

そこで

$$\begin{aligned}
S_1(x;r) &= \frac{k^{1/2}x^{1/4+a/2}}{\pi\sqrt{2}} \sum_{n \leq X} \frac{\sigma_a(n)\cos(2\pi\bar{r}n)}{n^{3/4+a/2}} \exp\left(i\left(4\pi\frac{\sqrt{nx}}{k} - \frac{\pi}{4}\right)\right), \\
S_2(x;r) &= \frac{k^{1/2}x^{1/4+a/2}}{\pi\sqrt{2}} \sum_{n \leq X} \frac{\sigma_a(n)\cos(2\pi\bar{r}n)}{n^{3/4+a/2}} \exp\left(i\left(4\pi\frac{\sqrt{n(x+U)}}{k} - \frac{\pi}{4}\right)\right), \\
T_1(x;r) &= \frac{k^{1/2}x^{1/4+a/2}}{\pi\sqrt{2}} \sum_{n \leq X} \frac{\sigma_a(n)\sin(2\pi\bar{r}n)}{n^{3/4+a/2}} \exp\left(i\left(4\pi\frac{\sqrt{nx}}{k} - \frac{\pi}{4}\right)\right), \\
T_2(x;r) &= \frac{k^{1/2}x^{1/4+a/2}}{\pi\sqrt{2}} \sum_{n \leq X} \frac{\sigma_a(n)\sin(2\pi\bar{r}n)}{n^{3/4+a/2}} \exp\left(i\left(4\pi\frac{\sqrt{n(x+U)}}{k} - \frac{\pi}{4}\right)\right)
\end{aligned}$$

および

$$I = \int_X^{X+H} (\mathrm{Re}(S_2(x;r) - S_1(x;r)))^2\, dx,$$
$$J = \int_X^{X+H} (\mathrm{Re}(T_2(x;r) - T_1(x;r)))^2\, dx$$

と置くと Cauchy-Schwarz の不等式により $X^{1/2} \ll H \leq X$ に対し

$$\begin{aligned}
&\int_X^{X+H} |\Delta_a(x+U;r) - \Delta_a(x;r)|^2 dx \\
&\quad = I + J + O(kH^{1/2}X^\varepsilon(|I|^{1/2} + |J|^{1/2}) + k^2HX^\varepsilon)
\end{aligned}$$

と書ける. 従って $I$, $J$ に関する次の評価を示せば十分である.

$$\text{(2)}\qquad \begin{aligned}
I &= \frac{k}{4\pi^2} \sum_{n \leq \frac{X}{4kU}} \frac{\sigma_a(n)^2\cos^2(2\pi\bar{r}n)}{n^{3/2+a}} \int_X^{X+H} x^{1/2+a} \left|e\left(\frac{U}{k}\sqrt{\frac{n}{x}}\right) - 1\right|^2 dx \\
&\quad + O(k^2X^{1+\varepsilon}) + \begin{cases} O(kH(kU)^{1/2}\log^3 X) & \cdots \quad a = 0, \\ O(kH(kU)^{1/2+a}) & \cdots \quad -1/2 < a < 0, \\ 0 & \cdots \quad -1 < a \leq -1/2 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$(3)\quad J = \frac{k}{4\pi^2}\sum_{n\le\frac{X}{4kU}}\frac{\sigma_a(n)^2\sin^2(2\pi\bar{r}n)}{n^{3/2+a}}\int_X^{X+H}x^{1/2+a}\left|e\left(\frac{U}{k}\sqrt{\frac{n}{x}}\right)-1\right|^2dx$$
$$+O(k^2X^{1+\varepsilon})+\begin{cases} O(kH(kU)^{1/2}\log^3 X) & \cdots \quad a=0,\\ O(kH(kU)^{1/2+a}) & \cdots \quad -1/2<a<0,\\ 0 & \cdots \quad -1<a\le -1/2.\end{cases}$$

どちらも同じように示せるので $I$ の方を簡単に説明しよう．まず $S_j(x;r)$ の和を $X/(4kU)$ で二つに分ける．即ち、

$$S_j(x;r)=\sum_{n\le\frac{X}{4kU}}+\sum_{\frac{X}{4kU}<n\le X}=:S_{j1}(x;r)+S_{j2}(x;r).$$

この時 $I_j\ (j=1,...,5)$ を

$$I_1 = \int_X^{X+H}|S_{21}(x;r)-S_{11}(x;r)|^2dx,$$
$$I_2 = \int_X^{X+H}(S_{21}(x;r)-S_{11}(x;r))^2\,dx,$$
$$I_3 = \int_X^{X+H}\left(|S_{12}(x;r)|^2+|S_{22}(x;r)|^2\right)dx,$$
$$I_4 = \int_X^{X+H}(S_{22}(x;r)-S_{12}(x;r))\left(\overline{S_{21}(x;r)}-\overline{S_{11}(x;r)}\right)dx,$$
$$I_5 = \int_X^{X+H}(S_{22}(x;r)-S_{12}(x;r))\,(S_{21}(x;r)-S_{11}(x;r))\,dx$$

で定義すれば

$$I=\frac{1}{2}I_1+O(|I_2|+I_3+|I_4|+|I_5|)$$

と書ける．$I_1$ については被積分関数を２乗し、first derivative test 及び、部分和

$$(4)\qquad \sum_{n\le x}\sigma_a(n)^2=\frac{\zeta^2(1-a)\zeta(1-2a)}{\zeta(2-2a)}x+O(x^{1+a/4}\log^2 x)$$

を用いると

$$I_1 = \frac{k}{2\pi^2}\sum_{n\le N}\frac{\sigma_a(n)^2\cos^2(2\pi\bar{r}n)}{n^{3/2+a}}\int_X^{X+H}x^{1/2+a}\left|e\left(\frac{U}{k}\sqrt{\frac{n}{x}}\right)-1\right|^2dx$$
$$+O(k^2X^{1+\varepsilon})$$

が得られる. 他の $I_j$ についても同様の議論をすることで

$$I_3 \ll k^2 X^{1+\varepsilon} + \begin{cases} kH(kU)^{1/2}\log^3 X & \cdots \quad a=0, \\ kH(kU)^{1/2+a} & \cdots \quad -1/2<a<0, \\ 0 & \cdots \quad -1<a\le -1/2 \end{cases}$$

および

$$I_j \ll k^2 X^{1+\varepsilon} \quad (j=2,4,5)$$

が成り立つことがわかる. これで (2) の評価が得られた. (3) も同様であり、これらより定理の主張が得られる.

次に系の証明をスケッチしよう. まず実数 $x$ に対して

$$f(x) = |\exp(ix)-1|^2 - x^2$$

で関数 $f(x)$ を定義すると $-x^4/12 \le f(x) < 0$ という不等式が成り立つことに注意する. $-1/2 < a < 0$, $k^3 < U < \frac{kX^{1/2}}{2}, H = o(X)$ と仮定する. 定理の右辺の和で $n \le \frac{k^2X}{4U^2}$ までの項の寄与を考える. 即ち

$$(5) \qquad \begin{aligned} & \frac{k}{4\pi^2}\sum_{n\le\frac{k^2X}{4U^2}} \frac{\sigma_a(n)^2}{n^{3/2+a}} \int_X^{X+H} x^{1/2+a}\left(4\pi^2\frac{U^2}{k^2}\frac{n}{x} + f\left(2\pi\frac{U}{k}\sqrt{\frac{n}{x}}\right)\right)dx \\ = {} & k^{-1}U^2X^{-1/2+a}H(1+o(1))\sum_{n\le\frac{k^2X}{4U^2}}\frac{\sigma_a(n)^2}{n^{1/2+a}} \\ & +\frac{k}{4\pi^2}\sum_{n\le\frac{k^2X}{4U^2}}\frac{\sigma_a(n)^2}{n^{3/2+a}}\int_X^{X+H} x^{1/2+a} f\left(2\pi\frac{U}{k}\sqrt{\frac{n}{x}}\right)dx. \end{aligned}$$

(4) と部分総和法により上の右辺の第１式は

$$\frac{2\zeta^2(1-a)\zeta(1-2a)}{(1-2a)\zeta(2-2a)}k^{-1}U^2X^{-1/2+a}H\left(\frac{k^2X}{2U^2}\right)^{1/2-a}(1+o(1)).$$

一方、第２式の絶対値は

$$\frac{\zeta^2(1-a)\zeta(1-2a)\pi^2}{6(3-2a)\zeta(2-2a)}k^{-1}U^2X^{-1/2+a}H\left(\frac{k^2X}{4U^2}\right)^{1/2-a}(1+o(1)).$$

で上から評価される. $a > -1/2$ の時 $2/(1-2a) > \pi^2/(6(3-2a))$ であるから (5) の左辺は

$$\asymp k^{-2a}U^{1+2a}H.$$

また残りの項からの寄与は、正であり、かつ

$$kX^{1/2+a}H \sum_{\frac{k^2X}{4U^2}<n\leq\frac{X}{4kU}} \frac{\sigma_a(n)^2}{n^{3/2+a}} \ll k^{-2a}U^{1+2a}H.$$

よって 系 の主張が得られた. $a=0$ の時も同様にして得られる.

**注.** 1. 最近、柳沢直樹氏により、特殊な場合の系の主張は漸近式に改良された.
2. 定理の証明について詳しくは論文 [5] を見てください.
3. Jutila は [2] の中で、Riemann のゼータ関数 $\zeta(s)$ の critical line 上での 2 乗平均の残余項について、short interval での 2 乗平均の結果を証明なしで述べている. 我々は最近この結果を critical srtip $1/2 < \mathrm{Re}s < 1$ に拡張し、漸近的な結果を得た (cf. [6]).

# 参考文献


[1] A. Ivić, *The Riemann Zeta-Function*, Wiley-Sons, New York, 1985.

[2] M. Jutila, On the divisor problem for short intervals, Ann. Univ. Turkuensis, Ser. AI **186**, 23-30 (1984).

[3] M. Jutila, *Lectures on a method in the theory of exponential sums*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1987.

[4] I. Kiuchi, On an exponential sum involving the arithmetic function $\sigma_a(n)$, Math. J. Okayama Univ. **29**, 193-205 (1987).

[5] I. Kiuchi and Y. Tanigawa, The mean value theorem of the divisor problem for short intervals, to appear in Archiv der Math. **70** (1998).

[6] I. Kiuchi and Y. Tanigawa, The mean value theorem of the Riemann zeta-function in the critical strip for short intervals, preprint (1998).

[7] T. Meurman, On the mean square of the Riemann zeta-function, Quart. J. Math. Oxford Ser.(2) **38**, 337-343 (1987).

[8] T. Meurman, The mean square of the error term in a generalization of Dirichlet's divisor problem, Acta Arith. **74**, 351-364 (1996).

[9] K.-C. Tong, On divisor problem III, Acta Math. Sinica **6**, 515-541 (1956).

[10] N. Yanagisawa, An asymptotic formula for a certain mean value in a divisor problem, preprint (1998).