数理解析研究所講究録
1065 巻 1998 年 136-139

MAPPING CLASS GROUP の AUTOMATIC STRUCTURE と TRAIN TRACK

宝島　格

名古屋学院大学 商学部

ABSTRACT. L.Mosher [M] は基点付き曲面 (S,p) の mapping class group $\mathcal{MCG}(S,p)$ の automatic structure を explicit に構成した。更に基点のない曲面についても $\mathcal{MCG}(S)$ が automatic であることを示したが、それは explicit には求められていない。以下では train track を用いた S 上の曲線の標準化を利用してこの点を改善し、 $\mathcal{MCG}(S)$ の automatic structure を explicit に求められるようにした。

1. MOSHER による $\mathcal{MCG}(S,p)$ の AUTOMATIC STRUCTURE の構成

群の automatic structure および Mosher による構成についての詳細は、[M] を参照のこと。基点付き曲面 (S,p) の mapping class group $\mathcal{MCG}(S,p)$ は、(S,p) に標識付き ideal triangulation δ_B を固定するとき、$\{\delta; \text{ideal triangulation}, \delta \cong \delta_B\}$ と同一視できる。 そこで $\mathcal{MCGD}(S,p) = \{\delta; \text{ideal triangulation}\}$ とおけば、この groupoid に対する automatic structure から $\mathcal{MCG}(S,p)$ の automatic structure が得られる。 Mosher は $\mathcal{MCGD}(S,p)$ の generator として elementary move と呼ぶ ideal triangulation の変形操作、および標識の取り替えを用い、 normal word (すなわち生成元列による δ の表示のうちで automatic structure に含まれているもの) としては combing と呼ぶ操作によって得られる word を用いている。(実際はそれらを多少修正したものを用いている。)

これらを用いると、 automatic structure としての二条件、

(1) normal word は finite state automaton で認識可能
(2) $\exists K$ s.t. $d(w,v) \leq 1 \Rightarrow d(w(t),v(t)) \leq K$ (K-fellow traveller property と呼ばれる)

が成り立つ。(ここで、 d は $\mathcal{MCGD}(S,p)$ の Cayley graph における距離、$w(t)$ は word w の初めから t 番目までの文字までの subword (t が w の長さを超えるときは w 自身)。)

2. MOSHER による $\mathcal{MCG}(S)$ の AUTOMATIC STRUCTURE の構成と EXPLICIT でない部分

$\pi_1(S,p) \subset \mathcal{MCG}(S,p)$ とみれば $\mathcal{MCG}(S) = \mathcal{MCG}(S,p)/\pi_1(S,p)$ なので、

$$\mathcal{MCGD}(S) := \mathcal{MCGD}(S,p)/\pi_1(S,p)$$

と定義すればその automatic structure から $\mathcal{MCG}(S)$ の automatic structure が構成できる。 ideal triangulation δ の π_1-class を $\Delta =< \delta >$ と書くことにする。

$\mathcal{MCGD}(S)$ の generator として $\mathcal{MCGD}(S,p)$ の generator から来るものを用いれば、距離 d の代わりに距離 $D(\Delta,\Delta')=\min_{\delta\in\Delta,\delta'\in\Delta'}d(\delta,\delta')$ を得る。また各 Δ に適当な代表元 δ をいくつか指定してやれば、δ を表す（$\mathcal{MCGD}(S,p)$ における）normal word を Δ を表す word とみなすことができる。代表元の指定をうまくすれば以下にみるようにそれら words が前節の条件 (1) (2) を満たすようにできる。

S の universal covering $\mathbb{D}^2$ に対し

$$\mathcal{T}:=\{\xi=(\xi_1,\xi_2,\xi_3);\xi_i\in\partial\mathbb{D}^2\}$$

とおけば $\mathcal{MCG}(S,p)$ は $\mathcal{T}$ に作用し、特に $\pi_1(S,p)$ は properly discontinuous に作用する。$\mathcal{T}$ の fundamental domain C とは、compact で $\pi_1(S,p)C=\mathcal{T}$ となるものとする。$\delta\in\mathcal{MCGD}(S,p)$ に対し fundamental domain C_δ を $\mathcal{MCG}(S,p)$ 作用に compatible になるように定め、また $\xi_B\in\mathcal{T}$ を予め一つ固定しておく。$\Delta\in\mathcal{MCGD}(S)$ の代表元として、$C_\delta\ni\xi_B$ なるものをとる。C_δ の定め方を以下のようにすれば、(1) (2) が成り立つ。

$E\subset\partial\mathbb{D}^2$ を考える。$x\neq y\in\partial\mathbb{D}^2$ に対して、$\partial\mathbb{D}^2\backslash\{x,y\}$ の各 component 上に E の最低二点が存在する（x,y に一致しているものを含む）とき、x,y は E で二点分離されると呼ぶことにする。

$$C_E:=\{\xi\in\mathcal{T};\xi_i,\xi_j\ (i\neq j)\ \text{は}E\text{で二点分離される}\}$$

と定める。これは compact であり、E が適当な配置にあれば fundamental domain になる。$E\subset E'$ ならば $C_E\subset C_{E'}$ となるから $C_{E'}$ も fundamental domain になる。さて p の $\mathbb{D}^2$ への lift P を一つ固定しておく。$\eta\in\mathcal{MCGD}(S,p)$ の各 arc （向き付き）の infinite iteration の（P-base の）lift は $\partial\mathbb{D}^2$ に limit を持つ。$d(\delta,\eta)\leq n$ なる η すべて（n を決めれば δ から構成可能である）に対するそれら limits を集めた集合を E とし、C_E を C_δ とする。予め固定する $\xi_B\in\mathcal{T}$ は δ_B の指定された三つの arcs からできる limits であるとしておけば、$\mathcal{MCGD}(S)$ における word が代表元を表しているかどうか、即ちその word で表される $\delta\in\mathcal{MCGD}(S,p)$ が $C_\delta\ni\xi_B$ を満たすかどうかが判定でき、従って (1) が成り立つ。あとは任意の δ に対して C_δ が fundamental domain になるような n を定めれば、次に述べるように (2) は成り立つので、automatic structure が explicit に構成できることになるが、Mosher [M] ではこれが求まっていないものである。

(2) については、二つの代表元 δ,δ' で $D(<\delta>,<\delta'>)\leq 1$ となるものは、$C_\delta\cap C_{\delta'}\neq\phi$ と有限交叉性、$\mathcal{MCG}(S,p)$ 作用に compatible な上記の構成法から、有限個しかない。よってそれらの全てにわたる $d(\delta,\delta')$ の最大値を N とすれば、NK-fellow traveller property が成り立つ。

3. $\mathcal{T}$ の FUNDAMENTAL DOMAIN と TRAIN TRACK を用いた S 上の曲線の標準化

前節の n を定めることが目的である。まず各 ideal triangulation に対して $\mathcal{MCG}(S,p)$ 作用に関する同値類の代表元を一つずつ決めれば、これは有限個である。それら各々の δ に対して C_δ が fundamental domain となるような $n(\delta)$ を定め、その最大値を n とすれば、π_1 作用と $\mathcal{MCG}(S,p)$ 作用との関係から、これが求める n となる。従って与えられた δ に対して $n(\delta)$ を定めることができればよい。

さて δ と S 上の p-base の simple closed curve l を一つ与えたとき、l を arc の一つとして含む ideal triangulation η を構成し、$d(\eta,\delta)$ を実際に計算することが可能である。simple closed curves （互いに disjoint でなくともよい）の有限集

合 L で、その各々の curve から得られる $\partial\mathbb{D}^2$ 上の limit を集めた集合 E が C_E : fundamental domain となるようなものがあれば、各 $l \in L$ に対する $d(\eta,\delta)$ の最大値を $n(\delta)$ とすればよい。そのとき $C_\delta \supset C_E$ となり C_δ も fundamental domain となる。従ってこのような L を求めればよい。

S 上の train track τ とは、S 上の一次元複体で、その 0-cell において一種の「滑らかさ」を追加したものである。それは 0-cell においてそこから発する 1-cells を「左右」二つの組に分類することである。ここでは train track としては多角形分割になっており、更に「滑らかさ」の意味で三角形分割になっているものを考える。そしてまた各 0-cell (vertex と呼ぶ) には左右それぞれに二つ以上の 1-cells が属しているものとする。この複体の重心細分を考え、その 1-skelton の 1-cells の列で S 上の curve を表すことを考える。(以下で 1-cell というときはこの重心細分の 1-cell のこととする。) そのような curve が *quasi-transverse* であるとは、

(i) 「三角形」内ではある辺から他の辺または対角へとつながるように、
(ii) vertex では左の辺またはそれらの間の角から右の辺または角へつながるか、上の三角形から下の三角形へつながるように、
(iii) 辺上では辺に沿って進むか辺の上の三角形から下の三角形へ進むように、

1-cells の列が連なっていることをいう。これらのことを S の universal covering $\mathbb{D}^2$ においても同様に考える。quasi-transverse curve については、次のことが成り立ち、組み合わせ的な意味での geodesic のような扱いができる。

Proposition. (*a*) $\mathbb{D}^2$ 上あるいはその閉包 $\overline{\mathbb{D}^2}$ 上の二つの (無限) *quasi-transverse curves* は、(ある特定の形状以外には) *disk* を *bound* しない。

(*b*) 無限 *quasi-transverse curve* は、$\partial\mathbb{D}^2$ 上に (各方向に) 唯一の *limit poit* を持つ。

(*c*) $\overline{\mathbb{D}^2}$ 上の任意の異なる二点をつなぐ (無限) *quasi-transverse curve* が存在する。(二点の与え方が明確であれば構成可能でもある。)

また、重心細分の 1-cell (向き付き) を決めると、そこからのびる quasi-transverse curves の limits の全体は、$\partial\mathbb{D}^2$ の部分弧になる。これを sector と呼ぶことにする。sector の左右の端点は計算可能である。さて $\mathbb{D}^2$ 上の各三角形 F に次のように sectors を対応させ、それらから (S,p) 上の simple closed curves を定める。sectors の決め方は deck transformation に compatible なので得られる simple closed curves は全体で有限個しかない。

まず、(X) 三角形で、その辺 G の内部が F (境界を含む) と交わるものに対して、G から対角へぬける 1-cells 列および、(Y) F の頂点において F と頂点を共有ししかも F と反対側にある三角形の、共有頂点から対辺へぬける 1-cells 列を構成する。次にこれらの各 1-cells 列に対し、それに quasi-transverse につながる 1-cells のうち、左端のものと右端のものを選び、それらによって決まる sectors を構成する。

こうして作った各 sector に対して、その端点を結ぶ無限 quasi-transverse curve を構成し、更にそれに transverse に交わり S 上 simple closed になるような quasi-transverse arc a' を選ぶ (構成可能)。a' の向きは sector に向かう方に取る。(a' の infinite iteration を考えると、その limit point はその sector の内部に入る。)

F から作った全 sectors からの a' を集めて arcs の集合 A'_F を得る。これを (S,p) 上に落として得られる simple closed curves の集合 A_F は、deck transformation によって F が F_1 に写るなら、$A_F = A_{F_1}$ である。即ち S 上の三角形 f に対して simple closed curves の集合 A_f が得られたことになる。これを p-base にするために p からの arc を決め、conjugation によって p-base の simple closed curves の集

合 L_f を得る。 f は有限個しかないので、 $L := \bigcup_f L_f$ は有限個の p-base の simple closed curves の集合である（互いに disjoint とは限らない)。

Theorem. この L によってできる *limit points* の集合 E に対し、 C_E は *fundamental domain* となる。

proof. E は $l \in L$ の P-base の lift の limit point を集めたものである。 P-base の代わりに他の p の lift P' を base とするものを、 E' と書くことにする。 C_E に π_1 を作用させることは、 $C_{E'}$ を考えることに相当する。従って fundamental domain であることを示すには、任意の三点 $\xi_i \in \partial\mathbb{D}^2$ $(i = 1, 2, 3)$ に対して適当な P' を選べば ξ_i, ξ_j $(i \neq j)$ が E' によって二点分離されることをいえばよい。ところが ξ_i, ξ_j $(i \neq j)$ の各 pair から無限 quasi-transverse curve を構成し、無限 triangle を作ると、その形状は限られたパターンしかない。各パターンに対して決められた特定の位置にある三角形 F については、上記構成法においてできた sectors が、 ξ_i, ξ_j を二点分離することがわかっている。(ただし「二点分離」において「二点が存在する」を「二つの sectors が存在する」と読み替える。) よってその F から p-base にするために用いた arc （の lift）をたどって決まる p の lift を P' とすればよい。 □

上記の構成を実際に行うことによって L およびそれから n を計算し、$\mathcal{MCGD}(S,p)$ ひいては $\mathcal{MCG}(S)$ の automatic structure を explicit に構成することができる。

References

[M] L. Mosher, *Mapping class groups are automatic*, Ann. of Math. **142** (1995), 303–384.

489-1298 愛知県瀬戸市上品野町 1350
E-mail address: takaraji@ngu.ac.jp