

Jaynes-Cummings model に対するエントロピー 及び相互エントロピーの計算

山口東京理科大学 基礎工学部

古市 茂(Shigeru FURUICHI)

E-mail: furuichi@ed.yama.sut.ac.jp

abstract

The purpose of this paper is to formulate the quantum mechanical channel for Jaynes-Cummings model by applying the mathematical concept "lifting" and then, to rigorously derive von Neumann entropy and quantum mutual entropy for this channel.

1.はじめに

光と原子が共振器内に閉じこめられている系で、原子と共鳴的に相互作用する光のモデルで一つの二準位原子の場合が Jaynes-Cummings model[1]と呼ばれ、光子数の振動的振る舞いに“崩壊と復活”という現象が現れることが良く知られ、その概念的簡単さと興味深い量子的特徴を示すことから多くの人々に研究されてきた[2-4]. また、実験的にもこれらのことが観測されている[5].

二準位系における原子のダイナミクスは次の量によって描かれことが多い。(1)遷移確率(atomic inversion), (2)誘導双極子モーメント, (3)v.N.エントロピー半古典的な二準位系では(1),(2)の2つだけで十分であるが、量子的な系のみで考えている場合はこの限りではない。なぜなら、原子の状態が常に純粋状態であるとは限らないからである。このような場合に(3)の v.N.エントロピーを用いた解析が有効である。

一方、本論文で我々が用いる"リフティング"とは Accardi の推移期待値と Ohya の合成状態の統合という形で生まれた数学的概念であり、それは系の状態変換を記述する量子力学的チャネルの拡張となっており、この量子力学的チャネルを得る上での統一的記述を与えるものとなっている。

本論文の目的は、このリフティングを用いて Jaynes-Cummings モデルに対する量子力学的チャネルを定めることと、この量子力学的チャネルを得ることの利点の1つにエントロピーや相互エントロピーといった複雑量の計算が可能になるということがあるがそれをこのモデルを通して具体的に示すことである。

本論文は以下の内容によって構成される。まず、第2節において量子力学的チャネル、リフティング、相互エントロピーについて簡単に復習する。次に第3節で

は Jaynes-Cummings モデルのハミルトニアンについて簡単に述べ、第4節ではそのハミルトニアンからユニタリ作用素を導く。第5節ではこのユニタリ作用素を使って、従来、原子のダイナミクスを調べる尺度となっている、遷移確率を計算し、これを用いて Jaynes-Cummings モデルの物理的性質を論じる。そして、第6節では第4節で導出したユニタリ作用素をもとに量子力学的チャンネルを定式化する。これにより、第7節ではこのチャンネルに対する v.N. エントロピーを計算し、不確定さという点からこのモデルに対して議論する。最後に、第8節では、量子相互エントロピーを厳密に導出する。

2. 量子力学的チャンネル, リフティング, 相互エントロピー

系の状態がどう変わるかを見ることが自然科学をはじめとする様々な科学の基本の一つである。そして、状態の変化を統一的に記述するものがチャンネルという概念である。

そこで、量子系のチャンネルを定めるために、 \mathcal{H}_k を複素可分なヒルベルト空間とし、入力系、出力系に各々ヒルベルト空間 \mathcal{H}_1 と \mathcal{H}_2 を用意する。このとき、 $B(\mathcal{H}_k)$ ($k=1,2$) をヒルベルト空間 \mathcal{H}_k 上の有界線形作用素の集合、また、 $\mathfrak{G}(\mathcal{H}_k)$ をヒルベルト空間 \mathcal{H}_k 上のすべての密度作用素 (状態) の集合とする。このとき量子系のチャンネルは数学的に次のように定義される [6-8]。

[定義 2.1] $\Lambda : B(\mathcal{H}_2) \rightarrow B(\mathcal{H}_1)$ が完全正写像であるとき、 Λ の共役写像 $\Lambda^* : \mathfrak{G}(\mathcal{H}_1) \rightarrow \mathfrak{G}(\mathcal{H}_2)$ を完全正チャンネル (completely positive channel) という。

このチャンネルという概念は、対象としている系をそれを含むより大きな系の一部とみる次のリフティングという概念と関連があることがわかってきた。

[定義 2.2] \mathfrak{G}_0 から $\mathfrak{G}_0 \otimes \mathfrak{G}_1$ への連続写像 \mathcal{E}^* をリフティング (lifting) という [9]。

$$\mathcal{E}^* : \mathfrak{G}_0 \rightarrow \mathfrak{G}_0 \otimes \mathfrak{G}_1 \quad (2.1)$$

このリフティングという概念は開放系やリダクションセオリーの分野においてはよく現われるものであるが、量子情報理論において重要な役割を果たす量子力学的チャンネルを得る為の数学的方法の一つとして取り扱われるべきである。すなわち、二つの系の初期状態 $\rho \in \mathfrak{G}_0, \omega \in \mathfrak{G}_1$ に対していったんリフティングによる表現；

$$\mathcal{E}^* : \mathfrak{G}_0 \rightarrow \mathfrak{G}_0 \otimes \mathfrak{G}_1, \quad \mathcal{E}^* \rho = U_t (\rho \otimes \omega) U_t^*$$

が得られれば次のようにしてチャンネルを得ることができるのである。

$$\Lambda^*: \mathfrak{G}_0 \rightarrow \mathfrak{G}_0, \quad \Lambda^* \rho = \text{tr}_{\mathcal{H}_1} \mathcal{E}^* \rho$$

次に上の量子力学的チャネルを基礎として、量子相互エントロピーについて簡単に復習しておく。まず、 $\rho \in \mathfrak{G}(\mathcal{H})$ の(フォンノイマン)シャッテン分解[10]を次のようにとる。

$$\rho = \sum_n \lambda_n E_n, \quad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq \dots, \quad E_n \perp E_m \quad (n \neq m) \quad (2.2)$$

ここで λ_n は ρ の固有値であり、 E_n は、1次元の射影に関係している。全ての λ_n が縮退しているときこのシャッテン分解は一意ではない。古典系の相互エントロピーが、入力系と出力系の同時確率分布を用いて定式化されているように、量子系においても、古典系における同時確率分布に対応する概念を用いれば、相互エントロピーを導入することができると考えられる。しかし一般には、量子系においては、同時確率分布は存在しない[11]。そこで、同時確率分布の代わりに入力状態と出力状態の間のある種の相関を表す合成状態を用いて、量子系の相互エントロピーを定式化する。もし、上述のシャッテン分解を得ることができれば、入力状態 ρ と出力状態 $\Lambda^* \rho$ の間に存在する相関を表す合成状態 $\sigma_E \in \mathfrak{G}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)$ は次のように定式化できる。

$$\sigma_E \equiv \sum_n \lambda_n E_n \otimes \Lambda^* E_n \quad (2.3)$$

ここで、この状態は ρ の分解(2.2)が一意でない時は、 $E = \{E_n\}$ の選び方によるので添え字 E を付けて表わしてある。この合成状態を用いて、入力状態 ρ とチャネル Λ^* に関する相互エントロピー $I(\rho; \Lambda^*)$ は、次のように与えられる。

[定義 2.3] 量子系の相互エントロピー $I(\rho; \Lambda^*)$ は、次のように定義される[6-8]。

$$I(\rho; \Lambda^*) \equiv \sup_E \{S(\sigma_E | \sigma_0); E = \{E_n\}\} \quad (2.4)$$

ここで、 $\sigma_0 \equiv \rho \otimes \Lambda^* \rho$ は自明な合成状態であり、また、 $S(\sigma_E | \sigma_0)$ は、 σ_E と σ_0 に関する量子系の相対エントロピー[12]であり、 $S(\sigma_E | \sigma_0) \equiv \text{tr} \sigma_E (\log \sigma_E - \log \sigma_0)$ で定められている。この量子系の相互エントロピーは、入力状態 ρ がチャネル Λ^* によって出力状態 $\Lambda^* \rho$ に変換されたとき、 ρ の有する情報のうち、どれほど出力状態 $\Lambda^* \rho$ に正しく伝えられたかを表す量であり、量子情報理論を構築する上において、古典系の場合と同じく非常に重要な情報量である。また、相対エントロピー $S(\sigma_E | \sigma_0)$ に対して、次の有用な補題が成り立つことが知られている。

<補題 2.4>

$$S(\sigma_E | \sigma_0) = \sum_n \lambda_n S(\Lambda^* E_n | \Lambda^* \rho)$$

この量子系の相互エントロピーは量子力学的チャネルとリフティングとともに、光通信過程[8]、量子マルコフ過程[13]や量子テレポーテーション過程[14]に応用されてきている。

3. J.C.M.のハミルトニアン

Jaynes-Cummings model のハミルトニアンは次のように書ける。

$$H = H_0 + H_1 + H_{01} \quad (3.1)$$

$$H_0 = \frac{1}{2} \hbar \omega \sigma_z, H_1 = \hbar \omega a^* a, H_{01} = \hbar g (a \otimes \sigma^+ + a^* \otimes \sigma^-) \quad (3.2)$$

ここで g は原子の光との結合定数、 σ^{\pm} は二準位原子の擬スピン演算子であり、 $\sigma^+ = |2\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma^- = |1\rangle\langle 2| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $|2\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
 a は $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ なる消滅作用素である。また、一般の二準位系では H_0 と H_1 の振動数 ω は違うものを用いるが、J-C model は共鳴状態を扱う系なので同じ物にしてある。さらに、 $a \otimes \sigma^+$ を吸収作用素 (absorption operator), $a^* \otimes \sigma^-$ を放出作用素 (emission operator) と呼ぶこともあり、 $a \otimes \sigma^+$ は一個の光子の吸収と原子の下準位から上準位への励起に対応し、逆に $a^* \otimes \sigma^-$ は一個の光子の放出と原子の脱励起に対応している。

4. ユニタリ作用素

今、全系 $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}_1$ のハミルトニアン H の形(3.1),(3.2)より、

$$[H_0 + H_1, H_{01}] = 0 \quad (4.1)$$

が成り立つ[15]。この関係式により、系の時間発展は、相互作用のハミルトニアン H_{01} によって次のように定まる。

$$U_t = \exp(-itH_{01} / \hbar).$$

ここで、以下の着衣の状態 (dressed state) $|\Phi_j^{(n)}\rangle$ ($j=0,1$) を使うと、

$$|\Phi_j^{(n)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|n \otimes 2\rangle + (-1)^j |n+1 \otimes 1\rangle)$$

次のような固有方程式が成り立つ。

$$H_{01} \begin{pmatrix} |\Phi_0^{(n)}\rangle \\ |\Phi_1^{(n)}\rangle \end{pmatrix} = \hbar \begin{pmatrix} \Omega & 0 \\ 0 & -\Omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\Phi_0^{(n)}\rangle \\ |\Phi_1^{(n)}\rangle \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

但し、 $\Omega = g\sqrt{n+1}$ である。この Ω はラビ振動数とよばれ、結合定数 g と光子数 n からなる。従って異なる光子数の状態に対してラビ振動数 Ω は異なる値をもつ。よって(4.2)式より

$$H_{01} |\Phi_j^{(n)}\rangle = (-1)^j \hbar g \sqrt{n+1} |\Phi_j^{(n)}\rangle, (j=0,1) \quad (4.3)$$

と書ける。さらに今、 $\langle \Phi_0^{(n)} | \Phi_1^{(n)} \rangle = \langle \Phi_1^{(n)} | \Phi_0^{(n)} \rangle = 0, \|\Phi_j^{(n)}\| = 1, (j=0,1)$ が成り立つので、(4.3)式は次のように書ける。

$$\begin{aligned} H_{01}^{(n)} &= \sum_{j=0}^1 (-1)^j \hbar g \sqrt{n+1} |\Phi_j^{(n)}\rangle \langle \Phi_j^{(n)}| \\ \therefore H_{01} &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_{01}^{(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^1 (-1)^j \hbar g \sqrt{n+1} |\Phi_j^{(n)}\rangle \langle \Phi_j^{(n)}| \end{aligned}$$

従って、

$$U_t = \exp(-itH_{01}/\hbar) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^1 \exp[-it(-1)^j g\sqrt{n+1}] |\Phi_j^{(n)}\rangle \langle \Phi_j^{(n)}| \quad (4.4)$$

5. 遷移確率

一般に、ユニタリー作用素 $U(t) = e^{-iHt/\hbar}$, H : hamiltonian が与えられたとき、初期状態 $|\psi_i\rangle$ から時間 t だけ経った終状態 $|\psi_f\rangle$ への確率振幅は $\langle \psi_i | U(t) | \psi_f \rangle$ で与えられる[16]。従って、前節の(3.4)式を使うと、初め($t=0$)に上準位(励起状態)にあった(共鳴)原子が時間 t で再び励起状態にある確率 $P_{22}(t)$ が計算できる[15]。

$$\begin{aligned} P_{22}(t) &= |\langle n \otimes 2 | \exp(-iH_{01}t/\hbar) | n \otimes 2 \rangle|^2 \\ &= \cos^2 \Omega t \end{aligned}$$

ここで「崩壊(collapse)と回復(revival)」について簡単に触れておく。

この崩壊と回復という現象は場が **coherent state** の時に生じる現象であり, 数学的にそれは **poissonian weight** に起因する.

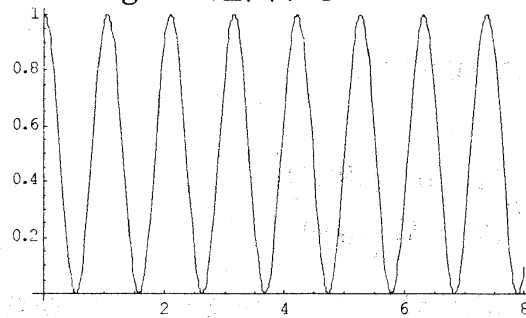


図1. 光子数確定状態のときの遷移確率

上の図1は場の状態を光子数確定状態としたときのものであり, $P_{22}(t)$ で結合定数 $g=0.9$, 光子数10とした時のグラフであり, 当然, **J.C.model** の特徴である”崩壊と回復”現象は見られない.

今, コヒーレント状態にある場と相互作用する励起状態にある原子が初め上準位にあると考える. コヒーレント状態での光子数確率の式(**poisson weight**)と上の $P_{22}(t)$ を用いることにより, 励起状態にある原子の確率

$$P_{e,e} = \sum_n p_n P_{22}(t) = \exp[-|\theta|^2] \sum_n \frac{|\theta|^{2n}}{n!} \cos^2[g\sqrt{n+1}t] \quad (5.1)$$

を得る. では, 実際に(5.1)式を使って時間に対する遷移確率のグラフを書かせて, それを見ながらこのモデルの物理的意味を考えてみよう. 下の図2は(5.1)式で, 結合定数 $g=0.9$, 平均光子数 $|\theta|^2=5$ としたときで, 図3は(5.1)式で, 結合定数 $g=0.9$, 平均光子数 $|\theta|^2=100$ とした時のものである.

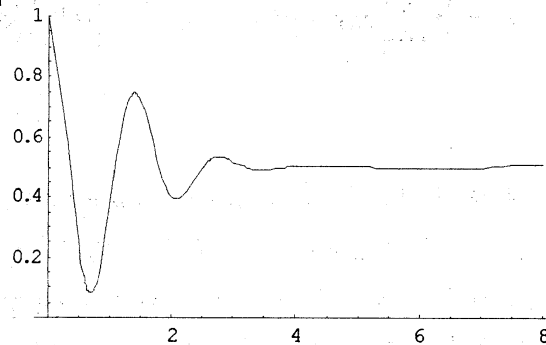


図2. コヒーレント状態のときの遷移確率(1)

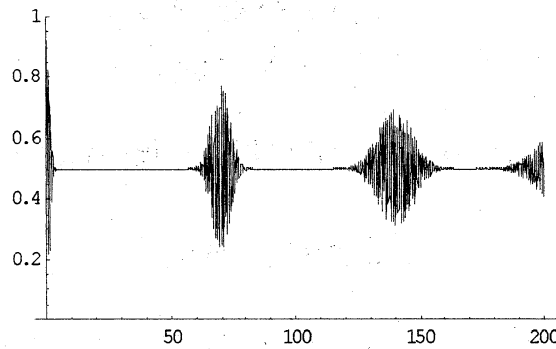


図3. コヒーレント状態のときの遷移確率(2)

- ① for short time: 図2は "Cummings 崩壊" と呼ばれるガウス形包絡線をもって減衰していく[17]. この減衰はラビ振動数 $\Omega = g\sqrt{n+1}$ が異なるために干渉を起こしてしまうのが原因でありそれは poissonian weight(i.e, coherent state)の特徴に他ならない. この "崩壊" という現象はグラフが振動しなくなることを意味している.
- ② for long time: もっと長い時間が経つと,系は "回復" と "崩壊" の繰り返しを示す. 光子数 n は量子的な和(5.1)式において不連続な値をもつから,回復時間

$$t_r \cong 2\pi\alpha / g$$

の間に位相が再びそろってくる(加算的な揃いかたにある,つまり同じ向きになってくる).そして,以降 $T = kt_r$ ($k=1,2,3,\dots$)ごとに系は回復する[17].図1の場合この t_r は, $t_r \cong 2\pi \times 10 / 0.9 \cong 70$ ということになる.

6. 量子力学的チャネル

ここでは,この後の複雑量の計算のために,J.C.M.に対する量子力学的チャネルを具体的に構成する.まず,原子の初期状態を上準位と下準位の重ね合せの状態とする;

$$\rho = \lambda_0 |1\rangle\langle 1| + \lambda_1 |2\rangle\langle 2| \in \mathfrak{S}_0$$

また,場の状態を光子数確定状態の重ね合せであるコヒーレント状態とする;

$$\omega = |\theta\rangle\langle \theta| \in \mathfrak{S}_1$$

$$|\theta\rangle = \exp\left[-\frac{1}{2}|\theta|^2\right] \sum_l \frac{\theta^l}{\sqrt{l!}} |l\rangle \quad (|l\rangle: \text{number state})$$

この時,Jaynes-Cummings model に対する原子の時間発展を記述するチャネル Λ_i^* 及びリフティング \mathcal{E}_i^* を次のようにおく.

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_i^* &: \mathfrak{G}_0 \rightarrow \mathfrak{G}_0 \otimes \mathfrak{G}_1 \\ \Lambda_i^* &: \mathfrak{G}_0 \rightarrow \mathfrak{G}_0\end{aligned}$$

すると、原子と光が時間 t だけ相互作用した後の状態 $\mathcal{E}_i^* \rho \in \mathfrak{G}_0 \otimes \mathfrak{G}_1$ は次のように与えられ、

$$\mathcal{E}_i^* \rho = U_i(\rho \otimes \omega)U_i^*$$

さらにチャンネル Λ_i^* はこのリフティング \mathcal{E}_i^* を用いて次のように展開できる。

$$\begin{aligned}\Lambda_i^* \rho &= \text{tr}_{\mathcal{H}_0} U_i(\omega \otimes \rho)U_i^* \\ &= \sum_{m,n=0}^{\infty} \sum_{i,j=0}^1 E_{n,j} E_{m,i}^* \langle \Phi_j^{(n)} | \rho \otimes \omega | \Phi_i^{(m)} \rangle \text{tr}_{\mathcal{H}_1} | \Phi_j^{(n)} \rangle \langle \Phi_i^{(m)} | \end{aligned}$$

ここで、以下の式が成り立つので、

$$\begin{cases} \text{tr}_{\mathcal{H}_1} | \Phi_j^{(n)} \rangle \langle \Phi_i^{(m)} | = \frac{1}{2} (\delta_{n,m} |2\rangle\langle 2| + (-1)^i \delta_{n,m+1} |2\rangle\langle 1| + (-1)^j \delta_{n+1,m} |1\rangle\langle 2| + (-1)^{i+j} \delta_{n,m} |1\rangle\langle 1|) \\ \langle \Phi_j^{(n)} | \omega \otimes \rho | \Phi_i^{(m)} \rangle = \frac{1}{2} (\lambda_1 \langle n|\omega|m \rangle + (-1)^{i+j} \lambda_0 \langle n+1|\omega|m+1 \rangle) \end{cases}$$

代入して計算すると、

$$\begin{aligned}\Lambda_i^* \rho &= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i,j=0}^1 E_{n,j} E_{n,i}^* \left[\lambda_0 \{ \langle n+1|\omega|n+1 \rangle (|1\rangle\langle 1| + (-1)^{i+j} |2\rangle\langle 2|) + (-1)^j \langle n+1|\omega|n \rangle |2\rangle\langle 1| + (-1)^i \langle n|\omega|n+1 \rangle |1\rangle\langle 2| \} \right. \\ &\quad \left. + \lambda_1 \{ \langle n|\omega|n \rangle (|2\rangle\langle 2| + (-1)^{i+j} |1\rangle\langle 1|) + (-1)^j \langle n+1|\omega|n \rangle |2\rangle\langle 1| + (-1)^i \langle n|\omega|n+1 \rangle |1\rangle\langle 2| \} \right] \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \langle n|\omega|n \rangle &= \exp[-|\theta|^2] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\theta|^{2n}}{n!}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \langle n+1|\omega|n+1 \rangle = \exp[-|\theta|^2] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\theta|^{2(n+1)}}{(n+1)!} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \langle n+1|\omega|n \rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \langle n|\omega|n+1 \rangle = 0\end{aligned}$$

よって、

$$\Lambda_i^* \rho = (\lambda_0 c_1(t) + \lambda_1 s_0(t)) |1\rangle\langle 1| + (\lambda_0 s_1(t) + \lambda_1 c_0(t)) |2\rangle\langle 2| \quad (6.1)$$

但し

$$c_1(t) = \sum_n c_n(t)p(n+1), s_1(t) = \sum_n s_n(t)p(n+1), c_0(t) = \sum_n c_n(t)p(n), s_0(t) = \sum_n s_n(t)p(n)$$

$$c_n(t) = \cos^2 \Omega t, s_n(t) = \sin^2 \Omega t, \Omega = g\sqrt{n+1}, p(n) = e^{-\frac{1}{2}|\theta|^2} \frac{|\theta|^{2n}}{n!}$$

7. von Neumann エントロピー

ここでは,前節で構成した量子力学的チャネルに対する von Neumann エントロピーを計算する. J.C.M. にエントロピーを用いた解析は[18]が最初であるが,ここでは場の状態を光子数確定状態として場合について議論されている.そして,場の状態をコヒーレント状態としたときのエントロピー解析については[19]に詳しい.前節の channel の式(6.1)から,簡単な計算により次のことが成り立つ.

$$\begin{aligned} \langle 1|\Lambda^* E_k|2\rangle &= \langle 2|\Lambda^* E_k|1\rangle = 0 \quad (k=0,1) \\ \langle 1|\Lambda^* \rho|2\rangle &= \langle 2|\Lambda^* \rho|1\rangle = 0 \\ \langle 1|\Lambda^* E_0|1\rangle &= c_1(t), \langle 2|\Lambda^* E_1|2\rangle = c_0(t) \\ \langle 1|\Lambda^* E_1|1\rangle &= s_0(t), \langle 2|\Lambda^* E_0|2\rangle = s_1(t) \\ \langle 1|\Lambda^* \rho|1\rangle &= \lambda_0 c_1(t) + \lambda_1 s_0(t) \\ \langle 2|\Lambda^* \rho|2\rangle &= \lambda_0 s_1(t) + \lambda_1 c_0(t) \end{aligned} \tag{7.1}$$

従って,終状態のエントロピーは次のように計算される.

$$\begin{aligned} S(\Lambda^* \rho) &= -\text{tr} \Lambda^* \rho \log \Lambda^* \rho \\ &= \sum_{s,t=1}^2 \langle s|\Lambda^* \rho|t\rangle \langle t|\log \Lambda^* \rho|s\rangle \\ &= -\langle 1|\Lambda^* \rho|1\rangle \langle 1|\log \Lambda^* \rho|1\rangle - \langle 1|\Lambda^* \rho|2\rangle \langle 2|\log \Lambda^* \rho|1\rangle \\ &\quad - \langle 2|\Lambda^* \rho|1\rangle \langle 1|\log \Lambda^* \rho|2\rangle - \langle 2|\Lambda^* \rho|2\rangle \langle 2|\log \Lambda^* \rho|2\rangle \\ &= -\langle 1|\Lambda^* \rho|1\rangle \log \langle 1|\Lambda^* \rho|1\rangle - \langle 2|\Lambda^* \rho|2\rangle \log \langle 2|\Lambda^* \rho|2\rangle \\ &= -(\lambda_0 c_1(t) + \lambda_1 s_0(t)) \log(\lambda_0 c_1(t) + \lambda_1 s_0(t)) \\ &\quad - (\lambda_0 s_1(t) + \lambda_1 c_0(t)) \log(\lambda_0 s_1(t) + \lambda_1 c_0(t)) \end{aligned}$$

また簡単な計算から次が得られる.

Note1: $(\lambda_0, \lambda_1) = (0,1), (1,0)$ の時, $S(\Lambda^* \rho) = -c_n(t) \log c_n(t) - s_n(t) \log s_n(t)$

Note2: $\lambda_0 = \lambda_1 = 0.5$ の時, $S(\Lambda^* \rho) = S(\rho) = \log 2$

Note3: $t = 0$ の時 $S(\Lambda^* \rho) = S(\rho)$

Note4: $c_n(t) = s_n(t) = \frac{1}{2}$ の時, $S(\Lambda^* \rho) = \log 2$

さらに, 次のグラフは $|\theta|^2 = 5, g = 0.9, \lambda_0 = 0, \lambda_1 = 1$ としたときの時間に対するエントロピーの変化を表している.

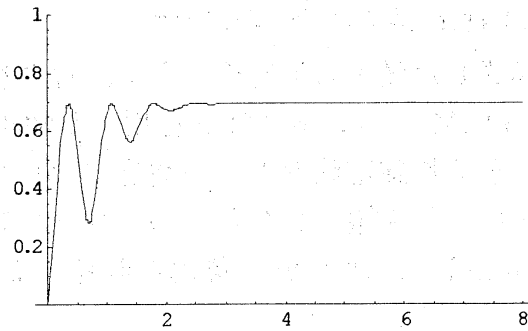


図4. v.N.エントロピー(1)

このグラフから, 原子の状態, つまりどれだけ上準位 or 下準位に片寄っているかが読み取れる. つまり, この系は時間と共に “Cummings 崩壊” するわけだが, そのとき原子は上準位にある遷移確率と下準位にある遷移確率が等しくなるときであり, 原子の状態はもっとも不確定な状態であるので, エントロピーは最大になる.

さらに, 次のグラフは $|\theta|^2 = 10, g = 0.9, \lambda_0 = 0, \lambda_1 = 1$ としたときの時間に対するエントロピーの変化を表している.

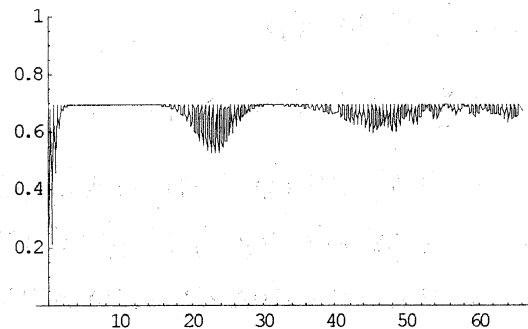


図5. v. N. エントロピー(2)

8. 量子相互エントロピー

前節に続いてこの節では第2節で述べた量子系の相互エントロピーを計算する. 第6節で与えた原子の初期状態 $\rho = \lambda_0 E_0 + \lambda_1 E_1 \in \mathfrak{S}_0$ は非縮退 Schatten 分解であるから相互エントロピー $I(\rho; \Lambda^*)$ は相対エントロピーに等しく, (補題 2.4) より,

$$\begin{aligned}
I(\rho; \Lambda_t^*) &= \sum_{k=0}^1 \lambda_k S(\Lambda_t^* E_k, \Lambda_t^* \rho) \\
&= \sum_{k=0}^1 \lambda_k \sum_{s,t=1}^2 \langle s | \Lambda_t^* E_k | t \rangle \log \frac{\langle t | \Lambda_t^* E_k | s \rangle}{\langle t | \Lambda_t^* \rho | s \rangle}
\end{aligned}$$

この時,前節の(7.1)式を用いると,相互エントロピーは次のように計算される.

$$\begin{aligned}
I(\rho; \Lambda_t^*) &= \lambda_0 \left\{ c_1(t) \log \frac{c_1(t)}{\lambda_0 c_1(t) + \lambda_1 s_0(t)} + s_1(t) \log \frac{s_1(t)}{\lambda_0 s_1(t) + \lambda_1 c_0(t)} \right\} \\
&\quad + \lambda_1 \left\{ s_0(t) \log \frac{s_0(t)}{\lambda_0 c_0(t) + \lambda_1 s_1(t)} + c_n(t) \log \frac{c_0(t)}{\lambda_0 s_1(t) + \lambda_1 c_0(t)} \right\}
\end{aligned}$$

また簡単な計算により次が得られる.

Note1: $(\lambda_0, \lambda_1) = (0,1), (1,0)$ の時, $I(\rho; \Lambda^*) = 0$

Note2: $t = 0$ or $g = 0$ の時 $I(\rho; \Lambda^*) = S(\rho)$

Note3: $c_n(t) = s_n(t) = \frac{1}{2}$ の時, $I(\rho; \Lambda^*) = 0$

Note4: $I(\rho; \Lambda^*) \leq S(\rho)$

ここで, 次のグラフは $|\theta|^2 = 5, g = 0.9, \lambda_0 = 0.1, \lambda_1 = 0.9$ としたときの時間に対する相互エントロピーの変化を表している.

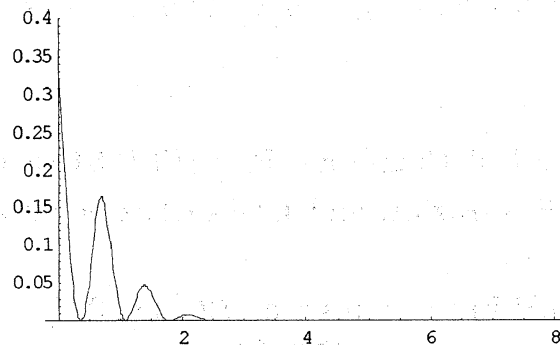


図6. 量子相互エントロピー(1)

下の図5は $|\theta|^2 = 25, g = 0.9, \lambda_0 = 0.1, \lambda_1 = 0.9$ に対する計算結果である.

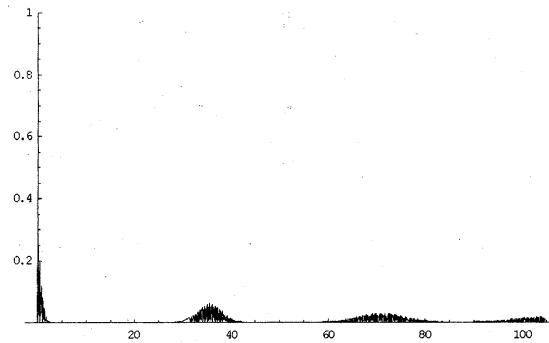


図 7. 量子相互エントロピー(2)

なお、紙面の都合上、この量子相互エントロピーを用いた、Jaynes-Cummings モデルに関する議論については別の機会に行う [20].

9. おわりに

本論文では数学的概念であるリフティングを使って量子光学の分野で非常に興味深いモデルである Jaynes-Cummings モデルに対する量子力学的チャンネルを導いた。また、この量子力学的チャンネルから量子情報理論の分野で重要な複雑量の1つである v.N.エントロピーを導出して、不確定さという点からこのモデルに対して解析を行った。さらに、量子相互エントロピーを厳密に導出した。

このように系の変化を記述するチャンネルを得ることができれば、エントロピーや相互エントロピーといった複雑量が計算できるということを示した。そして、これらの複雑量をもとにこのモデルに対して複雑さという点から新たな解釈を与えることが可能であるということを示した。

References

- [1] E.T. Jaynes and F.W. Cummings, Proc. IEEE. **51**, 89 (1963).
- [2] J.H. Eberly, N.B. Narozhny and J.J. Sanchez-Mondragon, Phys. Rev. Lett. **44**, 1323 (1980).
- [3] H.-I. Yoo and J.H. Eberly, phys. rep. **118**, 239 (1985).
- [4] B.W. Shore and P.L. Knight, J. Mod. Optics. **40**, 1195 (1993).
- [5] G. Rempe and H. Walther, Phys. Rev. Lett., **58**, 353 (1987)
- [6] M. Ohya, IEEE Trans. Inf. Theory **29**, 770 (1983).
- [7] M. Ohya, Rep. on Math. Phys. **27**, 19 (1989).
- [8] M. Ohya and D. Petz, "Quantum Entropy and Its Use", Springer-Verlag, 1993.
- [9] L. Accardi and M. Ohya, "Compound channels, transition expectations and liftings", to appear in Journal of Applied Mathematics and Optimization.

- [10] R. Schatten, "Norm Ideals of Completely Continuous Operator", Springer-Verlag, 1960.
- [11] R.S. Ingarden and K. Urbanik, Acta. Phys. Pol. **21**, 281 (1962).
- [12] H. Umegaki, Kodai Math. Sem. Rep. **14**, 59 (1962).
- [13] L. Accardi, M. Ohya and H. Suyari, Open Systems and Information Dynamics, **2**, 337 (1994).
- [14] K. Inoue, M. Ohya and H. Suyari, Physica (to be published).
- [15] D.F. Walls and G.J. Milburn, "Quantum Optics", Springer-Verlag (1994).
- [16] C. Cohen Tannoudji, J. Dupont-Roc and G. Grynberg, "Photons and Atoms", J. Wiley and Sons (1989).
- [17] P. Meystre and M. Sargent III, "Elements of Quantum Optics", Springer-Verlag (1990).
- [18] P.K. Aravind and J.O. Hirschfelder, J. Phys. Chem. **88**, 4788 (1984)
- [19] S.J.D. Phoenix and P.L. Knight, Ann. Phys. **186**, 381 (1988).
- [20] S. Furuichi, M. Ohya and H. Suyari, in preparation.