数理解析研究所講究録
1068 巻 1998 年 39-44

一般的選択確率をもつ競合在庫モデルに関する研究

大阪府立大学　北條仁志 (Hitoshi Hohjo)
大阪府立大学　寺岡義伸 (Yoshinobu Teraoka)

1 Model

線的に分布している客に対して二人のプレーヤが製品を供給し、過剰需要においては再配分されるような一期間在庫モデルについて研究する。Player I, II と呼ばれる 2 人のプレーヤがある製品を同時に販売し始め、市場を分け合う。Player I は $[0,1]$ 区間上の位置 0 に、Player II は位置 1 に配置されている。各プレーヤの発注は期首に一度だけ可能で、即時的に納入される。段取り費用がなく、購入費用は発注量に比例する。各プレーヤに対してもし各時刻に在庫を抱えている場合には維持費用がかかり、逆に在庫が不足している場合には品切れ損失費用を負うものとする。このモデルでは不足が生じた場合にはバックログされない、すなわち不足分に対して後納入されないと仮定する。

客は $[0,1]$ 区間上に密度関数 $f(x)$ に従って分布しており、地点 x の客は確率 $p(x)$ で Player I 側へ、残りの確率 $1-p(x)$ で Player II 側へ一人一個の製品を購入しに行く。最初に訪れたプレーヤ側に在庫がないと知るや否や、もう一方のプレーヤ側へ直ちに向かう。そこで $\int_0^1 f(x)dx = 1$, すべての x に対して $0 \leq p(x) \leq 1$ である。客は各地点を同時に出発し、どちらかのプレーヤ側に向かうが、それまでにかかる到着時間は移動距離に比例するとする。客は任意の時刻におけるプレーヤの所有する在庫量を知らない。Player I と II は非協力的であり、各プレーヤの目的は発注、維持、不足に伴う総費用を最小化することにある。問題は各プレーヤが期首にどれだけ発注しておけばよいのかである。そこで発注量は独立して決定される。

モデルでは次の記号を用いて記述する:

b	:	市場上に与えられた客数（需要量）
z_i	:	Player $i(i=1,2)$ の発注量, 決定変数
r_i	:	Player $i(i=1,2)$ の単位当たりの販売価格
c_i	:	Player $i(i=1,2)$ の単位当たりの購入費用
h_i	:	Player $i(i=1,2)$ の単位当たりの維持費用
p_i	:	Player $i(i=1,2)$ の単位当たりの品切れ損失費用
t	:	単位距離当たりの移動時間
$Q^i(T)$	:	時刻 T における Player(i=1,2) の在庫量
$C^i(z_1,z_2)$	:	Player $i(i=1,2)$ の期平均総費用

プレーヤは利益を得なければならないので、自然な仮定として $r_i \geq c_i$ を与える。

Situation 1:　$z_1 \geq \int_0^1 p(x)f(x)bdx$ かつ $z_2 \geq b - \int_0^1 p(x)f(x)bdx$ の場合

この状況では到着する客すべてに対して供給することができ、両プレーヤ共に不足は生じない。ここでこの状況を満たしている (z_1,z_2) の集合 $\left\{(z_1,z_2) : z_1 \geq \int_0^1 p(x)f(x)bdx, z_2 \geq b - \int_0^1 p(x)f(x)bdx\right\}$ を S1 とおく。

Situation 2:　$0 \leq z_1 < \int_0^1 p(x)f(x)bdx$ かつ $z_2 \geq b - \int_0^1 p(x)f(x)bdx$, $z_1 + z_2 > b$ の場合

この状況では Situation 1 と同様にすべての客に対して供給できる。Player I 側に不足が生じるが、その満たされない客は Player II 側で満たされることになる。集合 S1 と同様、この状況を満たす (z_1,z_2) の集合を S2 とおく。以下においても同様に集合 S3〜S6 を与えるものとする。

Situation 3: $0 \le z_1 < \int_0^1 p(x)f(x)bdx$ かつ $z_2 \ge b - \int_0^1 p(x)f(x)bdx$, $z_1 + z_2 \le b$ の場合
この状況ではPlayer I側で満たされない客がPlayer II側に行ってもすべてが満たされるとは限らない。

Situation 4: $0 \le z_1 < \int_0^1 p(x)f(x)bdx$ かつ $0 \le z_2 < b - \int_0^1 p(x)f(x)bdx$ の場合
この状況では各プレーヤに訪れた最初の方の客のみが満たされ、初めて訪れたPlayerによって満たされなければその後も満たされない。

Situation 5: $z_1 \ge \int_0^1 p(x)f(x)bdx$ かつ $0 \le z_2 < b - \int_0^1 p(x)f(x)bdx$, $z_1 + z_2 > b$ の場合
この場合にはSituation 2においてPlayer IとIIの役割を交替すればよい。

Situation 6: $z_1 \ge \int_0^1 p(x)f(x)bdx$ かつ $0 \le z_2 < b - \int_0^1 p(x)f(x)bdx$, $z_1 + z_2 \le b$ の場合
この場合にはSituation 3においてPlayer IとIIの役割を交替すればよい。

このとき期平均総費用 $C^i(z_1, z_2)$ は次の様になる：

$$
C^1(z_1,z_2) = \begin{cases}
[c_1+h_1]z_1 - [h_1+r_1]\int_0^1 p(x)f(x)b\,dx + \frac{h_1}{2}\int_0^1 xp(x)f(x)b\,dx \text{ for } (z_1,z_2)\in \mathrm{S1}, \\
[c_1-p_1-r_1]z_1 + \frac{h_1+p_1}{2}\int_0^{\frac{2t_1}{t}} xp(x)f(x)b\,dx + p_1\left\{\int_0^1 p(x)f(x)b\,dx \right. \\
\qquad \left. -\frac{1}{2}\int_0^1 xp(x)f(x)b\,dx\right\} \text{ for } (z_1,z_2)\in \mathrm{S2,S3}, \\
[c_1-p_1-r_1]z_1 + \frac{h_1+p_1}{2}\int_0^{\frac{2t_1}{t}} xp(x)f(x)\,dx + p_1\left\{\int_0^1 p(x)f(x)b\,dx \right. \\
\qquad \left. -\frac{1}{2}\int_0^1 xp(x)f(x)b\,dx + \frac{1}{2}\int_0^{1-\frac{2t_3}{t}} x(1-p(x))f(x)b\,dx\right\} \text{ for } (z_1,z_2)\in \mathrm{S4}, \\
[c_1+h_1]z_1 - r_1(b-z_2) + h_1\left\{\frac{1}{2}\int_0^1 xp(x)f(x)b\,dx - \int_0^1 p(x)f(x)b\,dx \right. \\
\qquad \left. -\frac{1}{2}\int_0^{1-\frac{2t_3}{t}} x(1-p(x))f(x)b\,dx\right\} \text{ for } (z_1,z_2)\in \mathrm{S5}, \\
[c_1+h_1-r_1]z_1 + \frac{h_1+p_1}{2}\int_0^{2-\frac{2t_4}{t}} x(1-p(x))f(x)b\,dx + h_1\left\{\frac{1}{2}\int_0^1 xp(x)f(x)b\,dx \right. \\
\qquad \left. -\int_0^1 p(x)f(x)b\,dx - \frac{1}{2}\int_0^{1-\frac{2t_3}{t}} x(1-p(x))f(x)b\,dx\right\} \text{ for } (z_1,z_2)\in \mathrm{S6};
\end{cases} \tag{1}
$$

$$
C^2(z_1,z_2) = \begin{cases}
[c_2+h_2]z_2 - \left[\frac{1}{2}h_2+r_2\right]\left\{b - \int_0^1 p(x)f(x)b\,dx\right\} - \frac{h_2}{2}\int_0^1 x(1-p(x))f(x)b\,dx \\
\qquad \text{for } (z_1,z_2)\in \mathrm{S1}, \\
[c_2+h_2]z_2 - \left[\frac{1}{2}h_2+r_2\right](b-z_1) + \frac{h_2}{2}\left\{\int_{\frac{2t_1}{t}}^1 xp(x)f(x)b\,dx \right. \\
\qquad \left. -\int_0^1 x(1-p(x))f(x)b\,dx\right\} \text{ for } (z_1,z_2)\in \mathrm{S2}, \\
\left[c_2+\frac{h_2}{2}-\frac{p_2}{2}-r_2\right]z_2 - \frac{h_2+p_2}{2}\int_{\frac{2t_2}{t}-1}^1 xp(x)f(x)b\,dx + \frac{h_2}{2}\left\{\int_{\frac{2t_1}{t}}^1 xp(x)f(x)b\,dx \right. \\
\qquad \left. -\int_0^1 x(1-p(x))f(x)b\,dx\right\} - \frac{p_2}{2}(z_1-b) \text{ for } (z_1,z_2)\in \mathrm{S3}, \\
\left[c_2+\frac{h_2}{2}-\frac{p_2}{2}-r_2\right]z_2 - \frac{h_2+p_2}{2}\int_{1-\frac{2t_3}{t}}^1 x(1-p(x))f(x)b\,dx - \frac{p_2}{2}\left\{z_1 - b \right. \\
\qquad \left. +\int_{\frac{2t_1}{t}}^1 xp(x)f(x)b\,dx - \int_0^1 x(1-p(x))f(x)b\,dx\right\} \text{ for } (z_1,z_2)\in \mathrm{S4}, \\
\left[c_2+\frac{h_2}{2}-\frac{p_2}{2}-r_2\right]z_2 - \frac{h_2+p_2}{2}\int_{1-\frac{2t_3}{t}}^1 x(1-p(x))f(x)b\,dx \\
\qquad +\frac{p_2}{2}\left\{\int_0^1 x(1-p(x))f(x)b\,dx + \int_0^1 (1-p(x))f(x)b\,dx\right\} \text{ for } (z_1,z_2)\in \mathrm{S5,S6};
\end{cases} \tag{2}
$$

そこで

$$
t_1 = \min\{T \;:\; z_1 = \int_0^{\frac{2T}{t}} p(x)f(x)b\,dx\}
$$

$$t_2 = \min\{T \ : \ z_1 + z_2 - b + \int_{\frac{2T}{t}-1}^{1} p(x)f(x)b \, dx\}$$

$$t_3 = \min\{T \ : \ z_2 = \int_{1-\frac{2T}{t}}^{1} (1-p(x))f(x)b \, dx\}$$

$$t_4 = \min\{T \ : \ z_1 + z_2 - \int_0^1 p(x)f(x)b \, dx - \int_{2-\frac{2T}{t}}^{1} (1-p(x))f(x)b \, dx\}$$

と定義する。これにより各z_1, z_2に対して$t_1, \cdots, t_4$が一意に定まる。

このとき、$C^1(z_1, z_2)$はz_1に関する区分的凸関数であり、$C^2(z_1, z_2)$はz_2に関する区分的凸関数であることがわかる。ゆえに$C^1(z_1, z_2)$を最小にするPlayer Iの最適在庫量z_1^*は

$$\begin{cases} \int_0^1 p(x)f(x)b \, dx \text{ in S1,S5} \\ \int_0^{\frac{2t_1^*}{t}} p(x)f(x)b \, dx \text{ in S2,S3 and S4} \\ \int_0^1 p(x)f(x)b \, dx + \int_{2-\frac{2t_4^*}{t}}^1 (1-p(x))f(x)b \, dx - \int_{1-\frac{2t_3^*}{t}}^1 (1-p(x))f(x)b \, dx \text{ in S6} \end{cases} \tag{3}$$

であり、$C^2(z_1, z_2)$を最小にするPlayer IIの最適在庫量z_2^*は

$$\begin{cases} b - \int_0^1 p(x)f(x)b \, dx \text{ in S1,S2} \\ b - \int_0^{\frac{2t_1^*}{t}} p(x)f(x)b \, dx - \int_{\frac{2t_2^*}{t}-1}^1 p(x)f(x)b \, dx \text{ in S3} \\ \int_{1-\frac{2t_3^*}{t}}^1 (1-p(x))f(x)b \, dx \quad \text{ in S4,S5 and S6.} \end{cases} \tag{4}$$

である。そこで

$$t_1^* = t_4^* = \frac{r_1 - c_1 + p_1}{h_1 + p_1} t,$$
$$t_2^* = t_3^* = \frac{r_2 - c_2 + p_2}{h_2 + p_2} t$$

である。

2 平衡点

この節では前節に得られたS1〜S6における最適発注量z_i^*を Player iの１つの純戦略として考え、それらの戦略により生成される利得行列を用いて２人のプレーヤにおける在庫量の平衡点を求める。解析途中に得られる条件から次のような８つの価格領域に分割して解析をする必要がある。

Case 1 : $0 \le r_1 - c_1 < \frac{h_1-p_1}{2}$, $0 \le r_2 - c_2 < \frac{h_2-p_2}{2}$
Case 2 : $0 \le r_1 - c_1 < \frac{h_1-p_1}{2}$, $\frac{h_2-p_2}{2} \le r_2 - c_2 < \frac{h_2-p_2}{2} + \frac{(h_2+p_2)(r_1-c_1+p_1)}{h_1+p_1}$
Case 3 : $0 \le r_1 - c_1 < \frac{h_1-p_1}{2}$, $\frac{h_2-p_2}{2} + \frac{(h_2+p_2)(r_1-c_1+p_1)}{h_1+p_1} \le r_2 - c_2 < h_2$
Case 4 : $0 \le r_1 - c_1 < \frac{h_1-p_1}{2}$, $r_2 - c_2 \ge h_2$
Case 5 : $\frac{h_1-p_1}{2} \le r_1 - c_1 < \frac{h_1-p_1}{2} + \frac{(h_1+p_1)(r_2-c_2+p_2)}{h_2+p_2}$, $0 \le r_2 - c_2 < \frac{h_2-p_2}{2}$
Case 6 : $\frac{h_1-p_1}{2} + \frac{(h_1+p_1)(r_2-c_2+p_2)}{h_2+p_2} \le r_1 - c_1 < h_1$, $0 \le r_2 - c_2 < \frac{h_2-p_2}{2}$
Case 7 : $r_1 - c_1 \ge h_1$, $0 \le r_2 - c_2 < \frac{h_2-p_2}{2}$
Case 8 : $r_1 - c_1 \ge \frac{h_1-p_1}{2}$, $r_2 - c_2 \ge \frac{h_2-p_2}{2}$

ここではそれらの中から平衡点の求め方を１つに対してのみ示す。

Case 3: $0 \le r_1 - c_1 < \frac{h_1-p_1}{2}, \frac{h_2-p_2}{2} + \frac{(h_2+p_2)(r_1-c_1+p_1)}{h_1+p_1} \le r_2 - c_2 < h_2$

Player I は２つの支配された純戦略をもつ : $\mathrm{I}_1 = \int_0^1 p(x)f(x)b \, dx$、$\mathrm{I}_2 = \int_0^{\frac{2t_1^*}{t}} p(x)f(x)b \, dx$。Player

II も２つの支配された純戦略をもつ： $\mathrm{II}_1 = b - \int_0^1 p(x)f(x)b\ dx$、$\mathrm{II}_2 = b - \int_0^{\frac{2t_1^*}{t}} p(x)f(x)b\ dx - \int_{\frac{2t_2^*}{t}-1}^1 p(x)f(x)b\ dx$。その時、次のような縮小された利得行列を得る。

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \mathrm{II}_1 & \mathrm{II}_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathrm{I}_1 \\ \mathrm{I}_2 \end{array} & \left(\begin{array}{cc} C_1(\mathrm{I}_1, \mathrm{II}_1) & C_1(\mathrm{I}_1, \mathrm{II}_2) \\ C_3(\mathrm{I}_2, \mathrm{II}_1) & C_3(\mathrm{I}_2, \mathrm{II}_2) \end{array} \right) \end{array}.$$

S1 と S3 の境界における連続性により

$$C_1^1\left(\int_0^1 p(x)f(x)b\ dx, \cdot\right) = C_3^1\left(\int_0^1 p(x)f(x)b\ dx, \cdot\right)$$

であるので、ここに現われたPlayer Iの関数はすべてC_3^1のみで与えられる。C_3^1の最適性によりI_1はI_2によって支配される。この支配によってさらに縮小された利得行列においてC_3^2の最適性によりII_1はII_2によって支配される。従って平衡点として $(z_1^*, z_2^*) = (\int_0^{\frac{2t_1^*}{t}} p(x)f(x)b\ dx, b - \int_0^{\frac{2t_1^*}{t}} p(x)f(x)b\ dx - \int_{\frac{2t_2^*}{t}-1}^1 p(x)f(x)b\ dx)$ を得る。

他の場合にも同じ解析を行うことによって次の様な結果が得られる：

Case 1:$(z_1^*, z_2^*) = (\int_0^{\frac{2t_1^*}{t}} p(x)f(x)b\ dx, \int_{1-\frac{2t_3^*}{t}}^1 (1-p(x))f(x)b\ dx)$

Case 2:$(z_1^*, z_2^*) = (\int_0^{\frac{2t_1^*}{t}} p(x)f(x)b\ dx, b - \int_0^1 p(x)f(x)b\ dx)$

Case 4:$(z_1^*, z_2^*) = (\int_0^{\frac{2t_1^*}{t}} p(x)f(x)b\ dx, b - \int_0^{\frac{2t_1^*}{t}} p(x)f(x)b\ dx)$

Case 5:$(z_1^*, z_2^*) = (\int_0^1 p(x)f(x)b\ dx, \int_{1-\frac{2t_3^*}{t}}^1 (1-p(x))f(x)b\ dx)$

Case 6:$(z_1^*, z_2^*) = (\int_0^1 p(x)f(x)b\ dx + \int_{2-\frac{2t_4^*}{t}}^1 (1-p(x))f(x)b\ dx - \int_{1-\frac{2t_3^*}{t}}^1 (1-p(x))f(x)b\ dx,$
$\int_{1-\frac{2t_3^*}{t}}^1 (1-p(x))f(x)b\ dx)$

Case 7:$(z_1^*, z_2^*) = (b - \int_{1-\frac{2t_3^*}{t}}^1 (1-p(x))f(x)b\ dx, \int_{1-\frac{2t_3^*}{t}}^1 (1-p(x))f(x)b\ dx)$

Case 8:$(z_1^*, z_2^*) = (\int_0^1 p(x)f(x)b\ dx, b - \int_0^1 p(x)f(x)b\ dx)$

3　例：Huff モデルの適用

$P_{ij} =$ 位置iの客が特定のショッピングセンターjへ向かう確率；
$S_j =$ ショッピングセンターjの規模；
$T_{ij} =$ 客の位置iからショッピングセンターjまでの移動時間；
$\lambda =$ ショッピングの種類によって移動時間に影響を与え、経験から推測されるパラメータ値
とする。このとき客の吸引力を表す各ショッピングセンターへの確率はその規模に比例し、ショッピングセンターから客の位置までの距離のλ乗に反比例する。すなわち次の様に定式化される：

$$P_{ij} = \frac{\frac{S_j}{T_{ij}^\lambda}}{\sum_{j=1}^n \frac{S_j}{T_{ij}^\lambda}} \tag{5}$$

このモデルにおいて我々は$S_0 = S_1$、$\lambda = 2$を適用する。そのとき、選択確率$p(x)$は

$$p(x) = \frac{(1-x)^2}{x^2 + (1-x)^2}$$

となる。今、需要が確定的な場合を取り扱っているので、$b = 1$とおいて差し支えない。なぜなら得られた小数の値にbを掛けて得られる値に対してその前後の整数のうちで総費用を最小にする値を最適

値としてとればよいためである。このとき客の分布が一様、すなわち$f(x) = 1$で、各パラメータ値が$c_1 = c_2 = 0, h_1 = 1.0, p_1 = 0.5, h_2 = 2.0, p_2 = 1.0$をとるときの数値例を表1に示す。

$r_2 \setminus r_1$	0.1	0.25	0.9	1.1
0.1	(0.496,0.491)	(0.500,0.491)	(0.508,0.491)	(0.509,0.491)
0.5	(0.496,0.500)	(0.500,0.500)	(0.500,0.500)	(0.500,0.500)
1.8	(0.496,0.503)	(0.500,0.500)	(0.500,0.500)	(0.500,0.500)
2.2	(0.496,0.504)	(0.500,0.500)	(0.500,0.500)	(0.500,0.500)

表 1: 平衡点 (z_1^*, z_2^*)

この例から需要量が確定的である場合には両者の和がその量を超えることはないことがわかる。

4 まとめ

我々は過剰需要の再配分をもつ競合在庫モデルを考えた。このモデルは販売するという情報がすべての客へ一度に伝わり、客が購入するような製品に対して役立つであろう。もし$h_1 \le p_1$かつ$h_2 \le p_2$ならば、Player Iは$\int_0^1 p(x)f(x)b\,dx$をIIは$b - \int_0^1 p(x)f(x)b\,dx$をそれぞれ平衡点として選ぶべきである。これはもっともらしい唯一の解である。h_i, p_iが与えられたとき、我々は$r_i - c_i$の値に対して様々な平衡点を求めることができ、$h_i < p_i$の範囲において興味深い結果が得られた。この点において複数の競合問題における面白さが見受けられる。

我々のモデルでは発注が期首に一度切りと制限した。しかしながら現実問題では競合するプレーヤ達が同時に製品を発注するとは限らない。従って異なった発注時刻、異なった計画期間におけるモデルが考えられる。また一期間から多期間への拡張も考えられる。我々は客が任意の時間にプレーヤの在庫量を知らない場合を扱った。そのような情報は世の中では口コミでしばしば伝わることがある。従って情報に対するSilent, Noizyバージョンが考えられるであろう。さらにこのモデルではモデルを簡単にするために各プレーヤの位置は0と1であると仮定した。我々はこのモデルと任意の位置に配置されたモデルとを比較する必要もある。

参考文献

[1] 児玉正憲：『生産・在庫管理システムの基礎』, 九州大学出版会, 1996.

[2] H.Hohjo : "A Competitive Inventory Model with Reallocation under Uniform Demand Distribution", To appear in *Mathematica Japonica*, **Vol.48**, (1998).

[3] H.Hotelling : "stability in competition", *Economic Journal*, **Vol.39**, pp.41-57, (1929).

[4] M. Parlar : "Game Theoretic Analysis of the Substitutable Product Inventory Problem with Random Demand",*Naval Research Logistics*, **Vol.35**, pp.397-409, (1988).

[5] Steven A.Lippman and Kevin F.McCardle : "The Competitive Newsboy", *Operations Research*, **Vol.45, No.1**, pp.54-65, (1997).

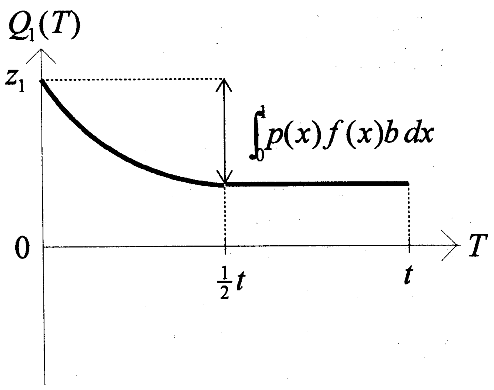

図1　Player I of Situation 1.

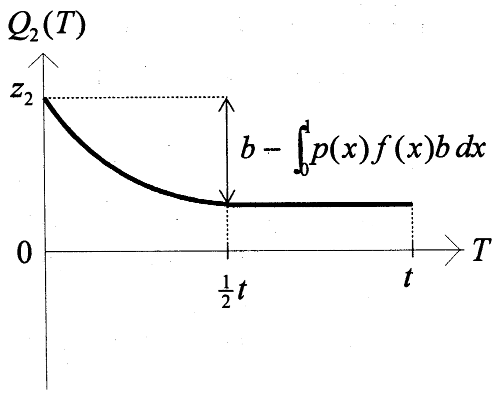

図2　Player II of Situation 1.

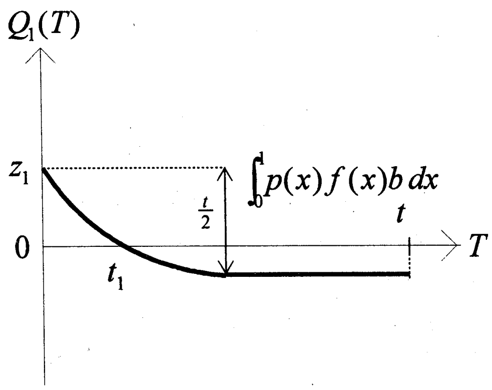

図3　Player I of Situation 2.

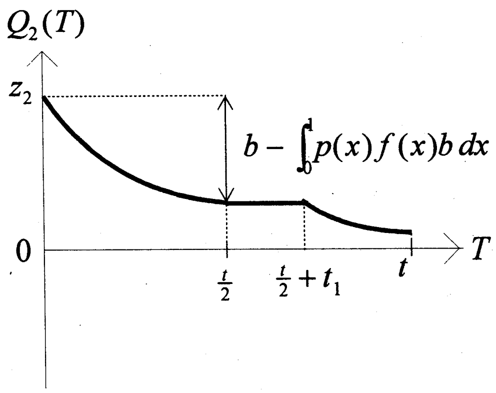

図4　Player II of Situation 2.

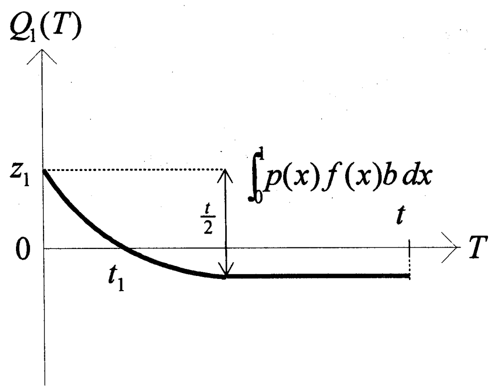

図5　Player I of Situation 3.

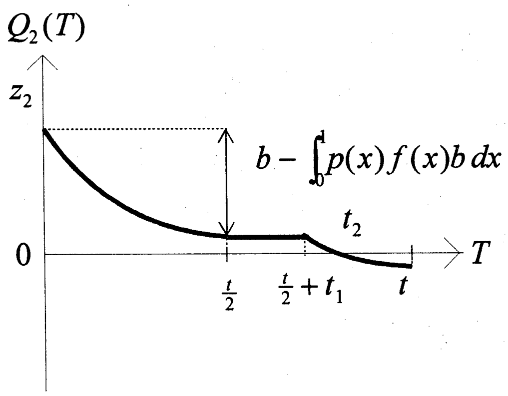

図6　Player II of Situation 3.

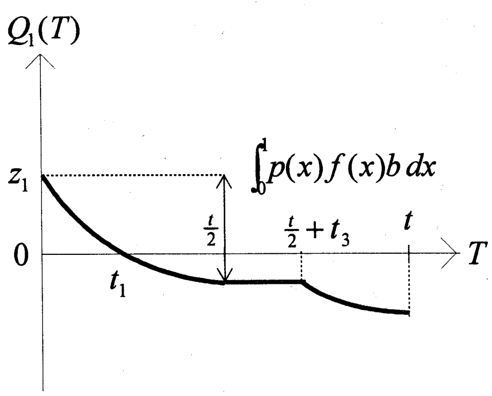

図7　Player I of Situation 4.

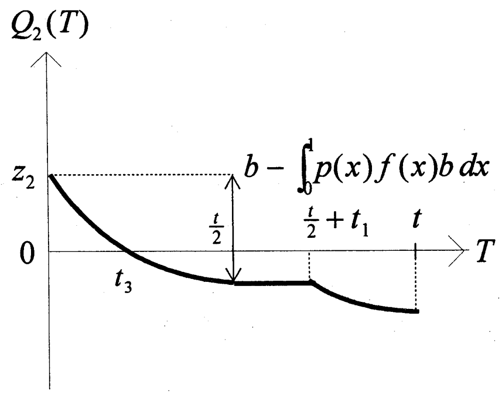

図8　Player II of Situation 4.