数理解析研究所講究録
1069 巻 1998 年 83-91

$\mathrm{P}^2(\mathrm{C})$ 内のケーラー角度一定な極小曲面

山形大学理学部　尾方　隆司 (Takashi OGATA)

一定な正則断面曲率 4ρ を持つ複素 n 次元ケーラー多様体を X とし、$<,>$ をそのケーラー計量、J を複素構造とする。２次元リーマン多様体 M に対して、等長極小はめ込み x:M$\longrightarrow$X　を考える。M の正規直交基 $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2\}$ に対して, $\cos(\alpha) =< J\tilde{e}_1, \tilde{e}_2 >$ で定義される α はケーラー角度と呼ばれ、写像 x の正則性からの隔たりを示す。($\cos(\alpha)$ はケーラー関数と呼ばれる。)　実際、M 上、一定であれば各々次を意味する。

$$cos(\alpha) = 1 \Longleftrightarrow x : \text{正則}$$

$$cos(\alpha) = -1 \Longleftrightarrow x : \text{反正則}$$

$$cos(\alpha) = 0 \Longleftrightarrow x : \text{全実}$$

つまり、ケーラー角度は X 内の極小曲面を調べる際に、重要な役割を果たす不変量である。我々は、ケーラー角度一定な極小曲面の特徴付けと分類を目指す。そのためにまずそのような知られている例を示そう。$P^n(C)$ を Fubini-Study 計量を持つ、一定な正則断面曲率 $4\rho(>0)$ の、n 次元複素射影空間とし、$S^2(K)$ を Gauss 曲率 K の２次元球面とする。この時、各整数 $p(0 \leq p \leq n)$ に対して full 、等長極小はめ込み $\varphi_{n,p} : S^2(K_{n,p}) \longrightarrow P^n(C)$ が構成される。ここで $K_{n,P}$、および $\varphi_{n,p}$ のケーラー関数 $cos(\alpha_{n,p})$ は次で与えられる。

$$K_{n,p} = \frac{4\rho}{(n + 2p(n-p))}$$

$$cos(\alpha_{n,p}) = \frac{(n-2p)}{(n + 2p(n-p))}$$

これらの例は,complex-Boruvka 球面と呼ばれるものである [3]。ケーラー角度一定な $P^n(C)$ 内の極小曲面の特徴付けとして、より一般的な形で次の定理が大仁田さんにより示された。

定理[5]　$\varphi : M \longrightarrow P^n(C)$ を full, 等長極小はめ込みとし、Gaussian curvature K とケーラー角度 $cos(\alpha)$ はともに、一定とする。この時、

（1）$K > 0$ の時、ある p　$(0 \leq p \leq n)$ が存在して $\varphi(M)$ は $\varphi_{n,p}(S^2(K))$　の開部分多様体になる。

（2）$K = 0$ の時、$cos(\alpha) = 0$　つまり全実はめ込みになる。この場合は、剱持さんにより分類完了 [2]。

（3）$K <$ の時、φ は存在しない。

この定理に関して、次のような予想が与えられた。

Conj.(a) Gaussian curvature K が一定ならば、ケーラー角度もまた一定になる。

Conj.(b) ケーラー角度が一定ならば、Gaussian curvature K もまた一定になる。

Conj.(a) に関して、昨年剱持、増田さんにより「２次元複素射影空間内の Gauss 曲率一定な極小曲面のケーラー角度は一定」という結果が示され n＝２ に対して肯定的に解決された [4]。(大域的にも、小域的にも更なる仮定を必要としないで、証明が与えられた。)

ここでは Conj.(b) について考えよう。次の定理により、否定的になる。

主定理　Xを一定な正則断面曲率4ρを持つ複素２次元ケーラー多様体とする。ある正数kにたいして、R^2 のある開集合Uと、U上で定義されたkに依存して定まる等温計量$\lambda(k)^2 \mid dz \mid^2$、および次のような性質を持つ等長はめ込み$x_k : U \longrightarrow \mathbf{X}$ が存在する。

（１）x_k は極小はめ込み

（２）x_k のケーラー関数 $cos(\alpha_k) = 0$

（３）x_k の Gaussian curvature $K_k = \rho - 2c(k)^2$

但し、$c(k)$は一定でないU上のある可微分関数

§1. 複素２次元ケーラー多様体

一定な正則断面曲率4ρを持つ複素２次元ケーラー多様体をＸとし、Ｊをその複素構造とする。Ｘの unitary coframe を$\{\omega_\alpha\}$, unitary connection forme を $\{\omega_{\alpha\beta}\}$とすると、Ｘの構造方程式は次で与えられる。$(1 \leq \alpha, \beta \cdots \leq 2)$

$$
\begin{aligned}
& d\omega_\alpha = \sum \omega_{\alpha\beta} \bigwedge \omega_\beta, \qquad \omega_{\alpha\beta} + \bar{\omega}_{\beta\alpha} = 0, \\
(1.1) \qquad & d\omega_{\alpha\beta} = \sum \omega_{\alpha\gamma} \bigwedge \omega_{\gamma\beta} + \Omega_{\alpha\beta}, \\
& \Omega_{\alpha\beta} = -\rho(\omega_\alpha \bigwedge \omega_\beta + \delta_{\alpha\beta} \sum \omega_\gamma \bigwedge \bar{\omega}_\gamma)
\end{aligned}
$$

２次元リーマン多様体ＭのGaussian curvatureをＫとし、等長極小はめ込み　x:M$\longrightarrow$X を考える。但し、以下、xは正則でも反正則でもないとする。よってケーラー関数はＭ上 $cos(\alpha) \neq \pm 1$　となる。Ｍの任意の正規直交基　$\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2\}$ に対して,

$$(1.2)\qquad \tilde{e}_3 = -cot(\alpha)\tilde{e}_1 - cosec(\alpha)J\tilde{e}_2$$

$$\tilde{e}_4 = cosec(\alpha)J\tilde{e}_1 - cot(\alpha)\tilde{e}_2$$

により得られるベクトルの系$\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3, \tilde{e}_4\}$は$x$に沿ったadaptedな正規直交基になる。つまり$\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2\}$はM の接空間の基であり、$\{\tilde{e}_3, \tilde{e}_4\}$はM の法空間の基になる。逆に、$\{\tilde{e}'_3, \tilde{e}'_4\}$を任意の法空間の正規直交基とすると

$$\tilde{e}'_1 = cot(\alpha)\tilde{e}'_3 - cosec(\alpha)J\tilde{e}'_4$$

$$\tilde{e}'_2 = cosec(\alpha)J\tilde{e}'_3 + cot(\alpha)\tilde{e}'_4$$

により与えられる$\{\tilde{e}'_1, \tilde{e}'_2\}$はMの接空間の正規直交基となる。この時、$cos(\alpha) =< J\tilde{e}'_4, \tilde{e}'_3 >$となることに注意。次に、$\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2\}$にたいして

$$(1.3)\qquad e_1 = \frac{1}{2}sec(\frac{\alpha}{2})(\tilde{e}_1 - J\tilde{e}_2)$$

$$e_3 = \frac{1}{2}cosec(\frac{\alpha}{2})(\tilde{e}_1 + J\tilde{e}_2)$$

とおくと、$\{e_1, e_2 = Je_1, e_3, e_4 = Je_3\}$は$x$に沿った　J-canonical 基になる。(adaptedではない。) この時得られた$\{\tilde{e}_A\}, \{e_A\} (1 \leq A, B. \cdots \leq 4)$に対してそのdual framesを各々$\{\tilde{\theta}_A\}, \{\theta_A\}$と表し、さらに、connection formsを$\{\tilde{\theta}_{AB}\}, \{\theta_{AB}\}$とする。このようにして得られた1-formsを用いて、さらに

$$(1.4) \qquad \omega_\alpha = \theta_{2\alpha-1} + i\theta_{2\alpha}$$

$$\omega_{\alpha\beta} = \theta_{2\alpha-1\ 2\beta-1} + i\theta_{2\alpha\ 2\beta-1}$$

とすると、$\{\omega_\alpha\}$ はunitary 1-form,$\{\omega_{\alpha\beta}\}$ はそのunitary connection formとなり、構造方程式(1.1)を満たす。また(1.3)をもちいて次の関係式を得る。

$$(1.5) \qquad \tilde{\theta}_1 + i\tilde{\theta}_2 = cos(\tfrac{\alpha}{2})\omega_1 + sin(\tfrac{\alpha}{2})\omega_2$$

$$\tilde{\theta}_3 + i\tilde{\theta}_4 = sin(\tfrac{\alpha}{2})\omega_1 - cos(\tfrac{\alpha}{2})\omega_2$$

$$\tilde{\theta}_{12} = i(cos^2(\tfrac{\alpha}{2})\omega_{11} - sin^2(\tfrac{\alpha}{2})\omega_{22})$$

$$(1.6) \qquad \tilde{\theta}_{34} = -i(sin^2(\tfrac{\alpha}{2})\omega_{11} - cos^2(\tfrac{\alpha}{2})\omega_{22})$$

$$\tilde{\theta}_{13} + i\tilde{\theta}_{23} = -\omega_{12} - \tfrac{1}{2}(d\alpha - sin(\alpha)(\omega_{11} + \omega_{22}))$$

$$\tilde{\theta}_{14} + i\tilde{\theta}_{24} = i(\omega_{12} - \tfrac{1}{2}(d\alpha - sin(\alpha)(\omega_{11} + \omega_{22})))$$

各formsのMへの制限を、同じ文字で表すと

$$\tilde{\theta}_3 = \tilde{\theta}_4 = 0$$

となる。ここで$\phi = \tilde{\theta}_1 + i\tilde{\theta}_2$と置き、(1.5)の外微分を考えると、M上,局所的に定義され、複素数に値をとる滑らかな関数a 、cが存在して次を満たす式が得られる。

$$(1.7) \qquad d\alpha + sin(\alpha)(\omega_{11} + \omega_{22}) = 2a\phi$$

$$\omega_{12} = c\bar{\phi}$$

(1.7) をさらに外微分することにより、可積分条件として次の式が得られる。

$$d\alpha = a\phi + \bar{a}\bar{\phi}$$

$$(1.8) \qquad (da - ia\tilde{\theta}_{12}) \wedge \phi = -\{|a|^2 cot(\alpha) + \tfrac{3}{4}\rho\sin(2\alpha)\}\phi \wedge \bar{\phi}$$

$$(dc + 3ic\tilde{\theta}_{12}) \wedge \bar{\phi} = -\cot(\alpha)ac\phi \wedge \bar{\phi}$$

$$K = (1 + 3\cos^2(\alpha))\rho - 2(|a|^2 + |c|^2)$$

(注.$(1.8)_1$はケーラー角度に関する式、$(1.8)_{2,3}$はCodazziの式、$(1.8)_4$はGaussの式である。)

§2. 曲面の局所存在定理と主定理の証明

Mの任意な点pの近傍Uにおいて、isothermal coordinate $\{z\}$ を考える。ある正値関数λに対して、計量は$ds^2 = \lambda^2 \mid dz \mid^2$ と表される。この時、$\phi = \lambda dz$となる。さらに、ある局所複素数値関数sを用いて

$$\tilde{\theta}_{12} = i(s\phi - \bar{s}\bar{\phi})$$

と置く。(1.8) 式は次のようになる。

$$(2.1) \qquad \frac{\partial\lambda}{\partial z} = -\lambda^2 s$$

$$(2.2) \qquad -\frac{1}{\lambda}\frac{\partial s}{\partial \bar{z}} + 2 \mid s \mid^2 - \frac{1}{\lambda}\frac{\partial \bar{s}}{\partial z} = -\frac{K}{2}$$

$$(2.3) \qquad \frac{1}{\lambda}\frac{\partial c}{\partial z} = 3cs - cot(\alpha)ac$$

$$(2.4) \qquad \frac{1}{\lambda}\frac{\partial a}{\partial \bar{z}} = a\bar{s} + \mid a \mid^2 cot(\alpha) + \frac{3}{4}\rho sin(2\alpha)$$

$$(2.5) \qquad \frac{1}{\lambda}\frac{\partial \alpha}{\partial z} = a$$

これらは、**X** 内のケーラー角度 α を持つ極小曲面上で成り立つ微分方程式系である。以下、α一定とする。(2.5) より $a=0$. よって (2.4) より $sin(2\alpha)=0$、つまり$\alpha=0$ 又は $\pi/2$。

xは正則でないとしていたので、$\alpha=\pi/2$ を得る。(2.1) と (2.3) より

$$(2.6) \qquad \frac{\partial(\lambda^3 c)}{\partial z} = 0$$

ここで、我々は c に関する情報が欲しい。$h=(h_{ij}^{\alpha})$ を第 2 基本形式の係数とすると、

$$V_{11} = \sum h_{11}^{\alpha}\tilde{e}_{\alpha}, \quad V_{12} = \sum h_{12}^{\alpha}\tilde{e}_{\alpha}$$

は等長極小はめ込みの不変法ベクトル場である。ここでは、

$$V_{11} = -\frac{1}{2}(c+\bar{c})\tilde{e}_3 + \frac{i}{2}(c-\bar{c})\tilde{e}_4, \quad V_{12} = -\frac{i}{2}(c-\bar{c})\tilde{e}_3 + \frac{1}{2}(c+\bar{c})\tilde{e}_4$$

となり、$< V_{11}, V_{12} >= 0, \ \| V_{11} \|=\| V_{12} \|=| c |^2$ が得られる。もし、**M** 上$c=0$ならば、Kは一定となる。よってある近傍で$c>0$ としてよい。このことから、我々は法ベクトルを次のように取り替える。

$$\tilde{e}_3 = \frac{V_{11}}{\| V_{11} \|}, \quad \tilde{e}_4 = \frac{V_{12}}{\| V_{12} \|}$$

この新しいframeに関して$(c-\bar{c})=0$となる。この時、(2.6) を用いると$\lambda^3 c : const(=k$とおく) となる。一方、$Gauss$の式$(1.8)_4$ より

$$K = -\frac{4}{\lambda^2}\frac{\partial^2 log\lambda}{\partial z \partial \bar{z}} = \rho - 2c^2$$

ここで、$c = k/\lambda^3, f = 2log\lambda$とおくと、

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} = k^2 e^{-2f} - \frac{\rho}{2} e^f \tag{2.7}$$

を得る。これは、Cauchy-Kovalevskaya の定理により、解を持つ (Spivak V 等参照)。

今、$k > 0$を任意に与え、R^2の座標系を$\{z\}$とし、ある開集合U上での(2.7)の解を$f(k)$とし、これを用いて$\lambda(k) = exp(f/2), c(k) = k/\lambda^3$と置く。$U$上に$Riemannian\ metric\ ds^2 = \lambda^2 \mid dz \mid^2$を定義する。さらに、これらを用いて次のように定義する。

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\phi \\
\omega_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\phi} \\
\omega_{11} &= -i\tilde{\theta}_{12} \\
\omega_{22} &= i\tilde{\theta}_{12} \\
\omega_{12} &= -\bar{\omega}_{21} = c\bar{\phi}
\end{aligned} \tag{2.8}$$

ここで

$$\tilde{\theta}_{12} = -\frac{i}{\lambda^2}\frac{\partial \lambda}{\partial z}\phi + \frac{i}{\lambda^2}\frac{\partial \lambda}{\partial \bar{z}}\bar{\phi}$$

である。これらは、U上で定義されて、構造方程式(1.1)を満たす。次の曲面のはめ込みの存在定理は$Eschenburg$, $Gaudalupe$, $Tribuzy$ [1]による。

定理 2.1 [1]　**X**を一定な正則断面曲率4ρをもつ複素2次元ケーラー多様体とし、$(\mathbf{M}, ds^2)$を単連結な2次元$Riemannian$多様体とする。**M**上定義された$1-forms\{\omega_1, \omega_2, \omega_{11}, \omega_{22}, \omega_{12}\}$

が構造方程式(1.1)を満たし、$ds^2 = \omega_1\bar{\omega}_1 + \omega_2\bar{\omega}_2$であるならば、等長写像 $x : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{X}$と$x$に沿ったunitary frame $\{E_1, E_2\}$ が存在し、この時、$\{\omega_1, \omega_2\}$ は$\{E_1, E_2\}$ のunitary coframeであり、$\{\omega_{11}, \omega_{22}, \omega_{12}\}$ は $\{\omega_1, \omega_2\}$ に関するunitary connection form になる。

この存在定理により、我々は「主定理」を得る。

References

[1] Eschenburg,J.H.,Gaudalupe,I.V. and Tribuzy,R.A.,The fundamental equations of minimal surfaces in CP^2,Math.Ann., 270(1985),571-598.

[2] Kenmotsu,K., On minimal immersions of R^2 into $P^n(C)$, J. Math. Soc. Japan, 37(1985), 665-682.

[3] Kenmotsu,K.,On Veronese-Boruvka spheres, Archivum Math., 3(1997),37-40.

[4] Kenmotsu,K.,and Masuda,K., On minimal surfaces of constant curvature in two dimensional complex space form , to appear.

[5] Ohnita,Y., Minimal surfaces with constant curvature and Kaehler angle in complex space form, TsukubaJ.Math., 13(1989),191-207.

[6] Ogata, T., Curvature pinching theorem for minimal surfaces with constant Kaehler angle in complex projective space,Tohoku Math.J., 43(1991),361-374.