

# 対称空間圏の部分空間論

田中 真紀子 (Makiko Sumi Tanaka)

東京理科大学 理工学部

## 1 序

対称空間の構造を幾何学的に理解するための研究を上智大学の長野正先生と進めている ([4], [5])。その方法は主に対称空間の間の包含関係を利用するものである。特に極地と子午空間と呼ばれる部分空間 (第 2 節) は、その空間の位相を含めたさまざまな幾何学的性質を反映していることが分かり (第 3 節)、対称空間の研究において重要な役割を果たしていると言える。

対称空間は良い構造を持った空間であり、歴史的にも、新しい理論を対称空間に適用して具体的な結果が得られたり、逆に対称空間の観察からいろいろな問題が提起された。将来的にもこのように新理論や新問題と対称空間との相互関係が期待されるとすれば、対称空間を Riemann 幾何としてできるだけ扱い易くすることは意味があると思われる。

しかしながら、Cayley 射影平面のような簡単な対称空間でさえ曲率

をテンソル表示すると極めて複雑になり取り扱いにくい。曲率をもつと簡明に表示するものとして、測地線族に関する Jacobi 方程式によって定まる根系を考える。第4節では現在進行中の重複度付き根系による対称空間の分類について述べる。また第5節では根球の位相的性質についても触れたい。

## 2 対称空間の基本概念

以下では対称空間はコンパクトであると仮定する。

対称空間  $M$  から  $N$  への滑らかな写像  $f$  が点対称と可換なとき、即ち、 $M$  の各点  $x$  で  $f \circ s_x = s_{f(x)} \circ f$  が成り立つとき、準同型 と呼ぶ。ここで  $s_x$  は  $x$  における点対称である。恒等写像及び準同型の合成は準同型である。対称空間はこの準同型に関して圏をなす。対称空間の 部分空間 とは、埋め込み写像が準同型であるような部分多様体である。

$M$  が連結のとき、写像  $M \rightarrow N$  が準同型であることと全測地的であることは同値である。特に、対称空間の部分空間は全測地的である。また準同型  $f : M = G_M/K_M \rightarrow N = G_N/K_N$  は (Lie 群の) 準同型  $f_G : \hat{G}_M \rightarrow G_N$  を導く。ここで、 $\hat{G}_M$  は  $G_M$  の有限被覆である。 $f_G^{-1}(K_N)$  が  $\hat{G}_M$  のイソトロピー一部分群に含まれるならば、逆も成り立つ。対称空間の自己同型による固定点集合は部分空間である。特に包合的自己同型による固定点集合は決定されている。([2])

$M = G/K$  を対称空間、 $K$  を  $M$  の点  $o$  でのイソトロピー部分群とする。 $o$  での点対称  $s_o$  による固定点集合の各連結成分を  $M$  の ( $o$  に関する) 極地 (polar) と呼ぶ。点  $p$  を通る極地を  $M^+(p)$  で表わし、合成  $s_p \circ s_o$  による固定点集合の点  $p$  を通る連結成分を極地  $M^+(p)$  に対する 子午空間 (meridian) と呼び  $M^-(p)$  で表わす。

$M^+(p)$  と  $M^-(p)$  の点  $p$  における接空間は  $M$  の接空間中互いに直交補空間である。また、極地は  $K$ -軌道であり、子午空間の階数は  $M$  の階数に一致する。このことから、自然な準同型  $\pi_1(M^-) \rightarrow \pi_1(M)$  が全射であることが導かれる。

特に、極地  $M^+(p)$  が1点  $p$  だけからなるとき、 $p$  を  $M$  中  $o$  の 極 (pole) と呼ぶ。 $M$  に  $o$  の極  $p$  が存在するとき、 $o$  と  $p$  を結ぶ測地弧の中点全体  $C(o, p)$  を  $M$  中  $o$  と  $p$  に関する 中心体 (centrosome) と呼び、その各連結成分を 中心小体 (centriole) と呼ぶ。このとき、対称空間  $M'$  への2重被覆写像  $\pi : M \rightarrow M'$  で、 $\pi(o) = \pi(p)$  となるものが存在し、 $M$  中  $o$  の極地と、 $o$  と  $p$  に関する中心小体の  $\pi$  による像は、 $M'$  中  $\pi(o)$  の極地になる。

極地と子午空間の重要性は、 $M$  が1組の  $(M^+, M^-)$  で一意的に決まるという事実 ([3]) にある。

### 3 極地と子午空間の性質

極地と子午空間は基本的な部分空間であり、 $M$  の幾何学的性質を反映している。([2],[3],[4],[5])

*Proposition 1*  $M$  が向き付け可能であるための必要十分条件は、 $M$  のすべての極地が偶数次元であること。

*Proposition 2* 点対称  $s_o$  の Lefschetz 数は  $o$  の極地のオイラー数  $\sum \chi(M^+)$  に等しい。特に  $s_o$  が恒等写像にホモトープならば  $\chi(M) = \sum \chi(M^+)$  が成り立つ。

*Remark*  $\chi(M = G/K) > 0 \iff \text{rank}G = \text{rank}K \iff s_o \simeq \text{id}_M$

*Proposition 3*  $M$  の signature は、0 でないとき、極地の signature の和である。

*Proposition 4*  $M$  が  $N$  の部分空間ならば、 $M$  の各極地と子午空間はそれぞれ  $N$  のある極地と子午空間の部分空間である。

*Proposition 5*  $M$  が Kähler ならば、すべての極地と子午空間は Kähler である。また、 $M$  のある子午空間が Kähler ならば  $M$  も Kähler である。

*Remark* この命題の証明には、 $M$  が既約 Kähler 対称空間であるための必要十分条件が、 $M$  は単連結で、 $M$  の(制限)ルート系が  $BC$  型か  $C$  型で、最も長いルートの重複度が 1 であるという定理を使う (第 5 節)。

*Proposition 6*  $M$  が対称 R 空間ならば、すべての極地と子午空間は対称 R 空間である。逆も成り立つ。

*Proposition 7* 既約四元数 Kähler 対称空間は、単連結単純リー群の 1 点から最も近い (その点の) 極地である。

*Proposition 8* 既約 Kähler 対称空間は、連結単純リー群 (但し  $SU(n)$  と  $E_6$  に関しては  $T \cdot SU(n)$  と  $T \cdot E_6$  とする。ここで  $T = U(1)$ ) の 1 点から最も近い (その点とその極の) 中心小体である。

その他、 $M$  が対称 R 空間のときには  $M$  に Morse-Bott 関数が存在し、その critical manifolds は  $M$  の極地に一致することが知られている ([7])。

## 4 対称空間の重複度付きルート系

$M = G/K$  をコンパクト連結既約対称空間、 $\mathfrak{g}$  を  $G$  のリー環、 $\mathfrak{K}$  を  $K$  のリー環、 $\mathfrak{g} = \mathfrak{K} + \mathfrak{M}$  を点対称分解とする。 $A \subset \mathfrak{M}$  を極大可

換部分環とする。以下、 $M$  の原点  $o$  における接空間  $T_oM$  と  $M$  を同一視する。

$H \in \mathcal{A}$  に対して  $o$  での初期接ベクトル  $H$  の測地線  $C = C(t) = \text{Exp}(tH)$  を考える。 $C$  に沿うヤコビ場  $X$  はヤコビ方程式  $\nabla_H \nabla_H X + R(X, H)H = 0$  の解である。ここで  $R$  は  $M$  の曲率。 $M$  は対称空間なので  $\nabla R = 0$ 、したがってヤコビ方程式は定数係数の2階線型常微分方程式である。 $\mathcal{G}$  の元は  $M$  上のベクトル場でもあるが、それを  $C$  に制限したものはヤコビ場である。線型写像  $R_H : \mathcal{G} \ni X \rightarrow R(X, H)H = -[[X, H], H] = -(adH)^2(X) \in \mathcal{G}$  は対称である。 $M$  のコンパクト性によりその固有値は非負実数。 $H$  を  $\mathcal{A}$  内で動かすと、 $\mathcal{A}$  の可換性により  $R_H$  は同時対角化可能。各固有値を  $\alpha(H)^2$  で表わすことができ、 $\mathcal{G}(\alpha)$  で固有値  $\alpha(H)^2$  の固有空間を表わす。

$\alpha \neq 0$  のとき  $\alpha \in \mathcal{A}^*$  を  $M$  の  $\mathcal{A}$  に関する ルート と呼ぶ。 $\mathcal{G}(\alpha)$  と  $\mathcal{G}(-\alpha)$  とは区別しない。ヤコビ方程式は  $s_o$  で不変だから  $\mathcal{G}(\alpha)$  は  $\mathcal{M}(\alpha) = \mathcal{M} \cap \mathcal{G}(\alpha)$  と  $\mathcal{K}(\alpha) = \mathcal{K} \cap \mathcal{G}(\alpha)$  の直和である。

このとき  $X \in \mathcal{M}(\alpha)$  に対して  $Y \in \mathcal{K}(\alpha)$  が一意的に存在し、 $[H, X] = \alpha(H)Y, [H, Y] = -\alpha(H)X$  が成立する。したがって  $\mathcal{M}(\alpha)$  と  $\mathcal{K}(\alpha)$  の次元は等しく、それをルート  $\alpha$  の 重複度 と呼ぶ。 $\mathcal{M}(0) = \mathcal{A}$  である。

$M$  が半単純なら  $\mathcal{A}$  に関するルート全体  $R(M)$  は  $\mathcal{A}$  中の根系である；すなわち (i)  $R(M)$  は有限集合で、 $0$  を含まず、 $\mathcal{A}$  を張る。(ただし  $\mathcal{A}$  と  $\mathcal{A}^*$  とを同一視) (ii) 任意の  $\alpha, \beta \in R(M)$  に対し、 $n(\alpha, \beta) := \frac{2\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$

は整数である。(iii)  $R(M)$  の任意の元  $\alpha$  に対し、鏡映  $s_\alpha : A \rightarrow A : \beta \rightarrow \beta - n(\alpha, \beta)\alpha$  は  $R(M)$  を保つ。

*Theorem* 子午空間のルートは  $M$  のルートで重複度も一致する。

*Proof*  $o$  から子午空間  $M^-(p)$  の点  $p$  への最短測地線  $C$  をとる。点対称  $s_o$  が  $p$  を固定するから、 $C$  は閉曲線である。パラメータ  $t$  を  $C(0) = o, C(\pi) = p$  となるように選ぶ。このとき  $0 < t < \pi$  なら  $C(t)$  は  $o$  の共役点ではない。また、 $C$  を含む極大トーラス  $A$  をとると、 $H := C'(0) \in A$ 。  $C(2\pi) = o$  だから、すべてのルート  $\alpha$  と  $Y \in \mathcal{K}(\alpha)$  とに対して  $Y(C(2\pi)) = 0$  である。各ルート  $\alpha$  に対して  $\alpha(H)$  の値は  $0, 1/2$  か  $1$  である。極地  $M^+(p)$  は  $K$ -軌道であり、 $M^-(p)$  中  $p$  は  $o$  の極だから、接空間  $T_o M^-(p)$  は  $A$  と  $\alpha(H)$  の値が  $1$  の  $\alpha$  に対応する  $M(\alpha)$  の和である。

ここで第3節で触れた定理：

*Theorem*  $M$  が既約 Kähler 対称空間であるための必要十分条件が、 $M$  は単連結で、 $M$  の(制限)ルート系が  $BCr$  型か  $Cr$  型で ( $r \geq 1$  ただし  $C_1 = A_1$ )、最も長いルートの重複度が  $1$  である。

の証明を述べる。十分性について： $S$  を原点  $o$  を通る Helgason 球面(第5節)の  $r := \text{rank } M$  個の直積とする。 $S$  は  $M$  の  $o$  を通る極

大トーラス  $A$  を含む。ルート系の仮定より  $M$  は局所的には  $S$  を部分空間として含むことがわかる。また重複度の仮定より Helgason 球面は 2 次元である。  $Cr$  型のときには  $M$  の極と  $S$  の極の対応により  $S$  は大域的にも  $M$  の部分空間である。  $BCr$  型の  $M$  は  $Cr$  型の子午空間  $M^-$  を持つので同様に  $S$  は大域的にも  $M$  の部分空間である。

Weyl 群の作用を使って  $M$  の原点での接空間上に  $M$  のイソトロピー部分群  $K$  で不変な複素構造を定義する。  $W$  を  $K$  における  $A$  の正規化群とすると、  $W$  は  $A$  に Weyl 群として作用する。ルート系の仮定によりその作用は (Bourbaki の記号で)  $(\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_r)$  の置換と符号の取り替えである。したがって Helgason 球面は一つの 0 でない接ベクトルで決まるという事実を使うと、  $S$  上には符号を除いて一意的に  $W$ -不変な複素構造が定義できる。  $b \in K$  が  $S$  を保つならば、ある  $a \in K$  に対して  $a \circ b$  は  $A$  を保つ。  $a \circ b \in W$  は  $S$  上正則なので  $b$  も  $S$  上正則。したがって  $T_oM$  上の  $K$ -不変複素構造  $J$  を得る。  $J$  は  $M$  上の  $G$ -不変複素構造  $J_M$  に拡張できる。

必要性:  $M$  がケーラーならば  $M$  の子午空間もケーラーになることから、次元に関する帰納法で示される。  $M$  がケーラーだとする。もし  $\dim S = 2$  ならば  $M$  はリーマン球面であり条件を満たしている。  $\dim S > 2$  とする。子午空間  $M^-$  もケーラーであるから  $M^-$  は帰納法の仮定より定理の条件を満たしている。自然な準同型  $\pi_1(M^-) \rightarrow \pi_1(M)$  は全射なので  $M$  は単連結である。もし  $\text{rank } M = 1$  ならば  $M^- = S^2$  で  $M$  は複素射影空間。したがって残りの条件を満たす。  $\text{rank } M \geq 2$



ならば  $R(M)$  は  $2\epsilon_i$  と  $\epsilon_i \pm \epsilon_j$  を含むので  $R(M)$  は  $BC_r, C_r, F_4$  のいずれかである。もし  $R(M) = F_4$  ならば  $S$  を含むことから  $M$  は4つの異なる極地をもたなければならないが、実際  $M$  には2つの極地しかないので矛盾である。

コンパクト連結既約対称空間の局所同型類は重複度付きのルート系で分類できる。これは既知の事実だが、重複度付きルート系と部分空間の関係をよく理解するために、重複度付きのルート系を分類することによりコンパクト対称空間を分類することを考える。ディンキン図形の分類は既知として重複度付きのルート系を分類する。結果を先にまとめておく。 $R^m(M)$  で重複度付き根系を表わす： $R^m(M) = A_r(m), B_r(a, b), C_r(a, b), D_r(m), BC_r(a, b, c), E_6(m), E_7(m), E_8(m), F_4(a, b), G_2(a, b)$  である。ここで  $( )$  の中の文字はルートの重複度を表わす。ただし複数の文字については左が最も短いルートの重複度、右が最も長いルートの重複度を表わすものとする。各ルートの重複度は次の通り：

$$R^m(M) = A_r(m) (r \geq 1) :$$

$r = 1$  のとき  $m$  は任意の自然数

$$r = 2 \text{ のとき } m \in \{1, 2, 4, 8\}$$

$$r \geq 3 \text{ のとき } m \in \{1, 2, 4\}$$

$$R^m(M) = B_r(a, b) (r \geq 3) :$$

$(a, b) \in \{(n, 1), (2, 2)\}$  ( $n$  は任意の自然数)

$R^m(M) = C_r(a, b) (r \geq 2) :$

$r = 2$  のとき  $(a, b) \in \{(n, 1), (2, 2), (4, 3)\}$  ( $n$  は任意の自然数)

$r = 3$  のとき  $(a, b) \in \{(1, 1), (2, 1), (2, 2), (4, 1), (4, 3), (8, 1)\}$

$r \geq 4$  のとき  $(a, b) \in \{(1, 1), (2, 1), (2, 2), (4, 1), (4, 3)\}$

$R^m(M) = BC_r(a, b, c) (r \geq 1) :$

$r = 1$  のとき  $(a, b, c) \in \{(2n, 0, 1), (4n, 0, 3), (8, 0, 7)\}$

$r = 2$  のとき  $(a, b, c) \in \{(4, 4, 1), (2n, 2, 1), (4n, 4, 3), (8, 6, 1)\}$

$r \geq 3$  のとき  $(a, b, c) \in \{(4, 4, 1), (2n, 2, 1), (4n, 4, 3)\}$

$R^m(M) = F_4(a, b) :$

$(a, b) \in \{(1, 1), (2, 1), (2, 2), (4, 1), (8, 1)\}$

$R^m(M) = G_2(a, b) :$

$(a, b) \in \{(1, 1), (2, 2)\}$

$R^m(M) = D_r(m) (r \geq 4), E_6(m), E_7(m), E_8(m) :$

$m \in \{1, 2\}$

証明の方針は階数が低い場合の分類を利用するものである。例えば  $R^m(M) = F_4(a, b)$  の場合だと  $B_4(a, b)$  と  $C_3(a, b)$  を含むことから  $C_3(a, b)$  の分類を仮定すれば  $(a, b)$  が決まる。 $R^m(M) = E_6(m), E_7(m), E_8(m)$  のときにはそれぞれ  $D$  型で重複度が等しい部分空間を含むことから  $m$  が決まる。

その他  $R^m(M) = BC_2(a, b)$  は  $BC_1$  と  $B_2$  から、 $R^m(M) = B_r(a, b)$ ,  $C_r(a, b)$  ( $r \geq 3$ ) は  $A_2$  と  $B_2$  から、 $R^m(M) = BC_r(a, b, c)$  ( $r \geq 3$ ) は  $BC_2$  と  $C_3$  から、 $R^m(M) = C_r(a, b)$  ( $r \geq 4$ ) は  $A_3$  からそれぞれわかる。

したがって議論が必要なのは  $A_1, BC_1, A_2, B_2 = C_2, G_2, A_3, D_4$  の場合である。

$R^m(M) = A_1(m)$  については、ただ1つのルート  $\alpha$  しか持たないことから  $M$  は  $(m+1)$  次元の正の定曲率  $\|\alpha\|^2$  の空間であることがわかる。

$R^m(M) = BC_1(a, b)$  の場合は  $\alpha$  と  $2\alpha$  がルートである。子午空間の接空間が  $M^- = A + M(2\alpha)$  であるから、子午空間は Helgason 球面 (第5節) である。 $M$  中  $M^-$  の直交補空間  $M^+$  を  $o$  での接空間にもつ部分空間  $\text{Exp}M^+$  は極地  $M^+$  と合同である。 $M$  の階数が1であることから、 $o$  を通るすべての測地線は  $M^+$  とただ1点  $p$  で交わり、この  $p$  で  $M^+(p)$  に直交する  $M^-(p)$  は一意的に決まり、ファイバー束  $S^b \rightarrow S^{a+b} \rightarrow M^+ = S^a$  を得る。Hopf fibration の分類 (Adams) により  $a = 1, 2, 4$  または  $8$ 。したがって  $a = pq, b = p-1$  ただし  $p = 2, 4$

または 8 で  $p = 8$  なら  $q = 1$ 。つまり  $M$  は複素射影空間、四元数射影空間、またはケーリー射影平面である。

$R^m(M) = A_2(m)$  の場合ただ一つの極地が  $R^m(M) = BC_1(m, m-1)$  となることがわかり、 $BC_1$  の場合の結果から  $m = 1, 2, 4$  または 8 である。

現時点で証明は完全に終わってはいないが  $(A_3, D_4, G_2)$ 、ルートの重複度を決定する上で  $\mathcal{K}(0)$  の各ルート空間への作用を調べるのが重要である。

*Lemma*  $\alpha \in R(M)$ 、 $2\alpha \notin R(M)$  とする。このとき  $[\mathcal{M}(\alpha), \mathcal{M}(\alpha)] = [\mathcal{K}(\alpha), \mathcal{K}(\alpha)] \subset \mathcal{K}(0)$  は  $\mathcal{M}(\alpha)$ 、 $\mathcal{K}(\alpha)$  に  $O(m)$  のリー環として作用し (ここで  $m$  はルート  $\alpha$  の重複度) すべてのルート空間  $\mathcal{M}(\beta)$ 、 $\mathcal{K}(\beta)$  を保つ。

## 5 対称空間の根球

$\alpha$  が  $M$  のルートで  $2\alpha$  がルートでなければ、 $R\alpha + \mathcal{M}(\alpha)$  は  $M$  の正の定曲率を持つ部分空間  $S(\alpha)$  の接空間である (第4節)。  $S(\alpha)$  をルート  $\alpha$  の根球と呼ぶ。長さの等しいルートの根球は  $M$  の等長変換群で互いに合同である。最も長いルートの根球は Helgason 球面 と呼ばれる。Helgason 球面は  $M \neq RP^n$  のとき  $M$  中最大の断面曲率を持つ  $(m(\alpha) + 1)$  次元球面である。(ここで  $m(\alpha)$  はルート  $\alpha$  の重複度) Helgason 球面は  $M$  の原点に最も近い極地を通る。また  $M$  のホモト

ピ一群は  $m(\alpha)$  次元まで自明である。Helgason 球面については次の顕著な位相的性質が知られている。

*Theorem ([1])* コンパクト単連結既約対称空間の Helgason 球面は、その  $Z$  (or  $Z_2$ )-係数ホモロジー類において体積最小である。

短いルートの根球についてはこのようなことは成り立たないが、次のようなことが成り立つ。

*Proposition*  $M$  をコンパクト単連結既約対称空間とする。 $R^m(M) = C_r(a, b)$  のとき、短いルート  $\alpha$  の根球  $S(\alpha)$  は  $M$  の原点に 2 番目に近い極地を通る  $(a+1)$  次元の球面である。 $S(\alpha)$  は自明なサイクルであるが、 $M$  が Kähler (i.e.  $b=1$ ) で  $a$  が偶数のときには、 $S(\alpha)$  を含む  $(a+2)$  次元球面で、 $M$  の部分空間でありかつ非自明なサイクルであるようなものが存在する。

この証明には全測地的球面の分類 ([6]) を用いる。

$R^m(M) = BC_r(a, b, c)$  のとき  $M$  は  $R^m(N) = C_r(b, c)$  なる部分空間  $N$  を含むので、中間の長さのルートの根球については上と同様のことが成り立つ。一方で最も短いルートの根球は存在しない。

## 参考文献

- [1] Lê Hồng Vân: Curvature estimate for the volume growth of globally minimal submanifolds. *Math. Ann.* 296(1993), 103-118.
- [2] T. Nagano: The involutions of compact symmetric spaces. *Tokyo J. Math.*, 11(1988), 57-79.
- [3] T. Nagano: The involutions of compact symmetric spaces,II. *Tokyo J. Math.*, 15(1992), 39-82.
- [4] T. Nagano and M. S. Tanaka: The involutions of compact symmetric spaces,III. *Tokyo J. Math.*, 18(1995), 193-212.
- [5] T. Nagano and M. S. Tanaka: The involutions of compact symmetric spaces,IV. To appear in *Tokyo J. Math.*
- [6] T. Nagano and M. Sumi: The spheres in symmetric spaces. *Hokkaido Math. J.* 20(1991), 331-352.
- [7] M. Takeuchi: Cell decompositions and Morse equalities on certain symmetric spaces. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, 12(1965), 81-192.