数理解析研究所講究録
1070 巻 1998 年 18-39

写像空間上の Clifford bundle の構成

信州大学理学部　浅田　明

物理学者は Loop 空間上の Dirac 作用素 (Dirac-Ramon 作用素) を考え，その指数定理を得ている ([1], [16])．この研究から Elliptic cohomology や string class 等の数学理論が生まれたが，Dirac-Ramon 作用素の厳密な定義はまだ得られていない．ここではその手前の問題として写像空間上の Clifford bundle を構成する問題を扱う．

1. 写像空間の Sobolev 構造

X を d-次元 compact (spin) 多様体，M を N-次元 C^∞-多様体とし

$$Map(X, M) = \{f : X \to M \mid f \text{ は Sobolev } k\text{-class, homotopic to } 0\}$$

とする．$gr(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subset X \times M$ とすると f が homotopic to 0 だから $gr(f)$ は $X \times M$ の中で $X \times *$ に deform され，$X \times *$ は $X \times M$ の中で trivial な normal bundle を持つから，$gr(f)$ の normal bundle も trivial になる．従って $gr(f)$ の $X \times M$ の適当な近傍を取ると diffeomorphism

$$h_u : U(gr(f)) \cong gr(f) \times R^N$$

がある．従って $Map(X, M)$ は X 上の（実数値関数の）k-Sobolev 空間を $W^k(X)$ とした時 $W^k(X) \otimes R^N$ を model とする Sobolev 多様体に従って Hilbert 多様体になる．

M が実代数集合で R^m の中で方程式

(1) $$F_1(x) = \cdots = F_L(x) = 0, \quad x = (x_1, \cdots, x_m)$$

で定義されれば $Map(X, M)$ は $W^k(X) \otimes R^m$ の中で

(2) $$F_1(f) = \cdots = F_L(f) = 0, \quad f = (f_1, \cdots, f_m)$$

$$F(f)(x) = F(f(x))$$

で定義された実代数集合になる．X が spin 多様体の時，X 上の spinor 場の作る k-Sobolev 空間 $W^k(X, S)$ は $W^k(X)$ を含む．又 $W^k(X, S) \otimes R^m$ でも方程式 (2) は定義され，(2) によって $W^k(X, S) \otimes R^m$ の中に定まる代数的集合は $Map(X, M)$ を含む．この代数的集合の中の $Map(X, M)$ の適当な近傍を取れば，非特異で $Map(X, M)$ に contractible，且 $W^k(X, S) \otimes R^m$ を model とした Sobolev 多様体である．簡単の為以下では，この近傍も $Map(X, M)$ と書く．又 $W^k(X) \otimes R^m$，$W^k(X, S) \otimes R^m$ 等を $W^k(X)$ と書く．

2　Sobolev 空間の正規化次元

X を compact Riemann 多様体，E を X 上の Hermitian vector bundle と

する．Eのsectionの作るHilbert空間を$L^2(X)$とし，その内積と計量を固定して(f,g)，$\|f\|$と書く．又Eのsectionの作るk-Sobolev空間を$W^k(X)$とする．$W^k(X)$のSobolev normを固定する為，Eのsectionに働く非退化1階自己共役楕円形(擬)微分作用素Dを固定する．Dはcompact多様体上の楕円形作用素だから$D=\sum\lambda(\ ,e_\lambda)e_\lambda$とspectre分解され$\{e_\lambda\}$は$L^2(X)$のo.N.-basisになる．このspectre分解を用いて

$$G=\sum\lambda^{-1}(\ ,e_\lambda)e_\lambda \text{ : D の Green 作用素}$$

$$D_+=\sum_{\lambda>0}\lambda(\ ,e_\lambda)e_\lambda,\quad D_-=\sum_{\lambda<0}|\lambda|(\ ,e_\lambda)e_\lambda,$$

$$|D|=D_++D_-=\sum|\lambda|(\ ,e_\lambda)e_\lambda,$$

$$J=G|D|,\quad P_+=D_+G,\quad P_-=D_-G\quad (J=P_+-P_-)$$

と置く．又正の実数kに対して

$$D^{(k)}=\sum \mathrm{sgn}\,\lambda\,|\lambda|^k(\ ,e_\lambda)e_\lambda,$$

$$G^{(k)}=\sum \mathrm{sgn}\,\lambda\,|\lambda|^{-k}(\ ,e_\lambda)e_\lambda$$

と置く．$D^{(k)}$，$G^{(k)}$を用いて$W^k(X)$，および$W^{-k}(X)$のSobolev normを，$W^k(X)$と$W^{-k}(X)$の間のpairing (Sobolev duality)を

(3) $$\|f\|_k=\|D^{(k)}f\|,\quad \|u\|_{-k}=\|G^{(k)}u\|.$$

(4) $$\langle u,f\rangle=(G^{(k)}u,D^{(k)}f),\quad u\in W^{-k}(X),\ f\in W^k(X)$$

で固定する．

Dと$|D|$のspectre η-関数$\eta(D,s)$，ζ-関数$\zeta(|D|,s)$

$$\eta(D,s)=\sum \operatorname{sgn}\lambda\,|\lambda|^{-s},\qquad \zeta(|D|,s)=\sum|\lambda|^{-s}$$

については，全平面に有理型に解析接続可能で，$s=d, d-1, \cdots, 1$ では高々1位の極を持ち，$s=0$ では正則な事が知られている（[G]）.

定義 1．$\nu=\zeta(|D|,0)$ を $W^k(X)$ の正規化次元と呼ぶ．

$P_+W^k(X)$，および $P_-W^k(X)$ の正規化次元 ν_+，ν_- は

$$\nu_+=(\nu+\eta(D,0))/2,\quad \nu_-=(\nu-\eta(D,0))/2$$

で定義する．又 $|D|$，D の行列式 $\det|D|$，$\det D$ を

$$\det|D|=\exp(-\zeta'(|D|,0)),\quad \det D=(-1)^{\nu_-}\det|D|$$

で定義する．この時

(5) $$\det(t|D|)=t^{\nu}\det|D|,\quad \det(|D|^k)=(\det|D|)^k$$

が成立する．又

$$\zeta(D_\pm,s)=(\zeta(|D|,s)\pm\eta(D,s))/2$$

$$\det(D_\pm)=\exp(-\zeta'(D_\pm,0))$$

と置けば

(6) $$\det|D|=\det D_+\cdot\det D_-$$

である．

後の議論で，ν（および ν_-）の整数性が要請されるが，次の変分公式が成立するので，D を $D+mI+nJ$ に（m, n を適当に撰

んで)置き換える事により(局所的には), ν, ν_- の整数性が保証される.

(7) $\zeta(D_\pm + mP_\pm, 0)$

$$\equiv \nu_\pm - m \operatorname{Res}_{s=1} \zeta(D_\pm, s) + \cdots + (-1)^d m^d/d \cdot \operatorname{Res}_{s=d} \zeta(D_\pm, s), \bmod 2$$

なお, $\det(D_\pm + mP_\pm)$ についての, 次の式は determinant bundle の定義(構成)に用いられる.

$D_\pm$ の固有値 $\lambda_i = \lambda_{i,\pm}$, $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$, の重複度 $\mu_i = \mu_{i,\pm}$,

$\zeta(D_\pm, s+k) = a_{k,\pm,-1} s^{-1} + a_{k,\pm,0} + a_{k,\pm,1} s + \cdots$ とした時

(8) $\det(D_\pm + mP_\pm)$

$$= \pm\{\det D_\pm \cdot \prod_{i=1}^N (1 + m/\lambda_i)^{\mu_i} \exp(-\sum_{k=1}^\infty (-1)^k (a_{k,\pm,0} - \sum_{i=1}^N \mu_i \lambda_i^{-k})) \cdot$$

$$\cdot \exp(-\sum_{k=1}^d (-1)^k m^k/k \, (1 + \cdots + \tfrac{1}{k-1}) a_{k,\pm,-1})\}, \quad |m| < \lambda_{N+1}.$$

(8) は複雑だが, これから ((6) によって), $|m|$ が小さい時 $\det(|D + mI|)$ は m について正則で, この関数は全 m-平面に正則に解析接続され, 零点は $\{-\lambda_i\}$, そこでの位数は λ_i の重複度になることが解る.

3 Sobolev 空間の微分形式

$\{e_\lambda\}$ が $L^2(X)$ の o.N.-basis だから

$$\{e_{\lambda,k} \mid e_{\lambda,k} = \operatorname{sgn}\lambda \, |\lambda|^{-k} e_\lambda\}$$

が $W^k(X)$ の o.N.-basis になる (k は負でも良い). $L^2(X)$ の座標系 $\{x_\lambda\}$, $x = \sum x_\lambda e_\lambda$ と $W^k(X)$ の座標系 $\{x_{\lambda,k}\}$, $x = \sum x_{\lambda,k} e_{\lambda,k}$ との間に

は、偏微分について $\partial f/\partial x_{\lambda,k} = \operatorname{sgn}\lambda\,|\lambda|^k\,\partial f/\partial x_\lambda$ の関係があるので、全微分 df については

(9) $$df = \sum \partial f/\partial x_\lambda\, dx_\lambda = \sum \partial f/\partial x_{\lambda,k}\, dx_{\lambda,k}$$

である. しかし (9) の最後の式で $dx_{\lambda,k}$ は $e_{\lambda,-k} = \operatorname{sgn}\lambda\,|\lambda|^k e_\lambda$ と同一視出来るので、f が $W^k(X)$ の開集合の上で全微分可能なら、df は $W^{-k}(X)$ への smooth map と見る事が出来る. 従って $\wedge^p W^{-k}(X)$ を $X\times\cdots\times X$ 上の bundle $E\times\cdots\times E$ の section で交代関数となるものの作る Sobolev $-k$-空間とした時、$W^k(X)$ の p-形式は $\wedge^p W^{-k}(X)$ への smooth map である.

定義2　$p\geq 1$ の時、$W^k(X)$ から $\wedge^p W^k(X)$ への smooth map を $W^k(X)$ の $(\infty-p)$-形式と呼ぶ. 又

(10) $$f^\infty = f\cdot(\det D)^{-k-d/2},\quad f \text{ は scalar 関数}$$

を $W^k(X)$ の ∞-形式と呼ぶ ([4], [5], [8] 参照).

p-形式は $W^k(X)$ の計量と無関係に定義されるが $(\infty-p)$-形式は計量に関係する. 例えば p-形式と $(\infty-q)$-形式 $(p\leq q)$ の wedge 積は $u\wedge f(x_1,\cdots,x_{q-p}) = \langle u(x_1,\cdots,x_{q-p}; x_{q-p+1},\cdots,x_q),\, f(x_{q-p+1},\cdots,x_q)\rangle$ で定義される. 又 $f\wedge u = (-1)^{(\nu-q)p}\,u\wedge f$ が成立すべきだから、ν が整数でないと矛盾が生じる.

$u(x) = u(x, x_1,\cdots,x_p)$ ($x_1,\cdots,x_p$ は $\wedge^p W^k(X)$ の変数) が $(\infty-p)$-形式の時、その (x に関する) Fréchet 微分を $F\text{-}du$ と書く. $x_1,\cdots,x_{p-1}$ を

parameter と見ると $F\text{-}du(x, x_1, \cdots, x_{p-1}, x)$ は $W^k(X)$ の linear operator である．この operator が trace class である事を仮定して，u の外微分 du を

(11) $$du(x, x_1, \cdots, x_{p-1}) = (-1)^{p-1} \operatorname{tr} F\text{-}du(x, x_1, \cdots, x_{p-1}, x), \quad p \geqq 1$$

で定義する．$(\infty-p)$-形式の外微分可能は強い条件であり，次の定理が成り立つ（[4]）．

定理1．外微分可能な $(\infty-p)$-形式は大域的に exact である．

系．$(\infty-p)$-形式の空間の上では外微分 d は巾零でない．

以下では $W^{-k}(X)$ および $W^k(X)$ 上の Grassmann 代数を $\wedge W^{-k}(X)$，$\wedge W^k(X)$ と書く．これ等は norm を

$$\|\sum u^p\|^2 = \sum \|u^p\|_{\pm k}^2, \quad u^p \in \wedge^p W^{\pm k}(X) \subset W^{\pm k}(X \times \cdots \times X)$$

で定義して Hilbert 空間である．又 $W^{-k}(X)$ 上の $(\infty-p)$-形式を含む Grassmann 代数は $\wedge W^{-k}(X) \oplus \wedge W^k(X)$ である（この時 $\wedge W^k(X)$ での積は $(\infty-p)$-形式としての積で Grassmann 代数としての $\wedge W^k(X)$ の積ではない）．$\wedge W^{-k}(X) \oplus \wedge W^k(X)$ の積は Sobolev 計量に関係する．

4．Sobolev 空間上の Clifford 代数

$W^{-k}(X)$ 上の（C 上の）Clifford 代数 $C(W^{-k})$ は関係

$$e_\lambda e_\mu + e_\mu e_\lambda = -2 \operatorname{sgn}\lambda |\lambda|^{-2k} \delta_{\lambda,\mu}$$

で定義された $\{e_\lambda\}$ で生成された C 上の代数である．生成元の

高々p個の積から生成された$C(W^{-k})$の submodule を$C(p)$とすると Grassmann 写像

$$gr: C(p)/C(p-2) \cong \Lambda^p W^{-k}(X)$$

がある．又$x \in \Lambda^p W^{-k}(X)$, $y \in \Lambda^q W^{-k}(X)$の Poisson 積$\{x, y\} \in \Lambda^{p+q-2} W^{-k}(X)$が

(12) $$\{x, y\} = [a, b] \bmod C(p+q-4),$$

$$gr\, a = x, \quad gr\, b = y, \quad [a, b] = ab - (-1)^{pq} ba$$

で定義される．又$C(W^{-k})$からΛW^{-k}上の bounded operator の代数$B(\Lambda W^{-k})$への表現$r: C(W^{-k}) \to B(\Lambda W^{-k})$が

(13) $$r(a)(x) = gr(a) \wedge x + \{gr(a), x\}/2, \quad x \in \Lambda W^{-k}$$

で定義される．特に$1 \in C = \Lambda^0 W^{-k}(X)$に対し$s(a) = r(a)1$とすれば

(14) $$s: C(W^{-k}) \cong \Lambda W^{-k}$$

である([12])．(14)から$\|a\| = \|s(a)\|$として$C(W^{-k})$は Hilbert 空間になる．

$W^k(X)$の正規化次元ν，およびν_-が共に整数であるとする．$C(W^{-k})$の生成元すべての積e^∞（γ_5にあたる）は（存在すれば）

(15) $$e_\lambda \cdot e^\infty = (-1)^{\nu-1} e^\infty e_\lambda, \quad e^\infty e^\infty = (-1)^{\nu(\nu+1)/2 + \nu_-} (\det|D|)^{-2k}$$

をみたす．(15)をみたす元e^∞を$C(W^{-k})$に添加した代数$C(W^{-k})[e^\infty]$は，次の表現$R: C(W^{-k})[e^\infty] \to B(\Lambda W^{-k} \oplus \Lambda W^k)$を持つ．

(15) $$R(e_\lambda) = \begin{pmatrix} r(e_\lambda) & 0 \\ 0 & (-1)^{\nu-1} G^{2k} r(e_\lambda) D^{2k} \end{pmatrix},$$

(16) $$R(e^{\infty}) = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^{(\nu_- + \nu(\nu+1)/2)/2}(\det|D|)^{-2k} D^{2k} \\ (-1)^{(\nu_- + \nu(\nu+1)/2)/2} G^{2k} & 0 \end{pmatrix}.$$

([6]). $C(W^{-k})[e^{\infty}]$ から $\Lambda W^{-k} \oplus \Lambda W^{k}$ への Hilbert 空間としての等距離作用素 S は

$$S(y) = R(y)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

で定義され (17) が成り立つ.

(17) $$S(C(W^{-k})) = \Lambda W^{-k}, \qquad S(C(W^{-k})e^{\infty}) = \Lambda W^{k}.$$

5. D に関する接続

U を M の開集合, S を位相空間, $F: U \to S$ のとき

(18) $$F^{\#}(f)(x) = F(f(x)), \quad x \in X, \quad f \in Map(X, U) (\subset Map(X, M))$$

とおけば $F^{\#}$ は $Map(X, U)$ から $Map(X, S)$ への写像である.

G を Lie 群, $E = \{g_{UV}\}$ を M 上の G-bundle とすれば, $\{g_{UV}{}^{\#}\}$ は $Map(X, M)$ 上の $Map(X, G)$-bundle を定める. 特に $T = \{g_{UV}\}$ が M の接 bundle であれば $T^{\#} = \{g_{UV}{}^{\#}\}$ は $Map(X, M)$ の接 bundle になる. 又 G が unitary 群の時, $\{g_{UV}{}^{\#}\}$ は loop 群 bundle と同値になる ([3], [7]).

定義 3. X 上の E の section に働く 0-階自己共役擬微分作用素の空間を $\mathcal{D}(0)$, $\{U\}$ を $Map(X, M)$ の open covering とする. U から $\mathcal{D}(0)$ への smooth map A_U の集り $\{A_U\}$ が

(19) $$(D+A_u)g_{uv}{}^{\#}=g_{uv}{}^{\#}(D+A_v)$$

をみたす時$\{A_u\}$をDに関する$T^{\#}$の接続と呼ぶ.

Map(X,M)はHilbert多様体だからDに関する接続は常に存在する. $D+A_u(x)$が$x\in U$でのfibreの計量を与える為には$D+A_u(x)$が非退化になる事が必要(十分)だが, これについては次の事実が知られている([3], [7]).

(i) Dが正定値なら, $D+A_u(x)$が常に非退化となる接続が存在する.

(ii) DがDirac型の時$D+A_u(x)$が常に非退化となる接続が存在すれば$T^{\#}$はloop群bundleとしてtrivialである.

例. $X=S^1$, $G=U(N)$とする. $T^{\#}$の特性写像を$g:\Omega M\to U(N)$とすれば$T^{\#}$の標準的なtransition functionは

$$\{e^{th_u}\cdot e^{-th_v}\},\quad e^{h_u}=g \text{ on } U$$

である([ ]). $D=\frac{1}{i}\,d/dt$とすれば$\{-\frac{1}{i}h_u\}$がDに関する接続になる. このとき$Y_r=\{x\mid \dim\operatorname{Ker}(D+A_u(x))=r\}$と置けば

(20) $$Y_r=\{x\mid g(x)\text{が}1\text{を重複度}r\text{の固有値として持つ}\}$$

となるから, $r\geqq 1$の時$\overline{Y_{2r+1}}$のdual classは$T^{\#}$のr-th string classである([2]). 又$\overline{Y_1}$のdual classはΩMがorientableになる($T^{\#}$がΩGの単位元の連結成分を構造群とする)為のobstructionになる([7],[10]参照).

(19) から $D+A_u(x)$ の spectre 型は u によらない．従って関数 $\nu(x)=\zeta(|D+A_u(x)|,0)$ は $Map(X,M)$ 上で定義され（$D+A_u(x)$ が退化した時は $\zeta(|D+A_u(x)|,s)=\sum_{\lambda\neq 0}|\lambda|^{-s}+\dim \mathrm{Ker}(D+A_u(x))$ として），$Map(X,M)$ 上連続である．従って質量項 $m=m(x)$ を撰ぶ事により $\nu=\nu(x)$ は $Map(X,M)$ 上定数（整数）であると仮定して良い．他方 D が Dirac 型のとき，ν_- が $Map(X,M)$ 上定数（整数）になる様接続 $\{A_u\}$ が撰べる為には，$Map(X,M)$ が orientable になる事が必要十分である（[7]）．

6．写像空間上の $(\infty-p)$-形式と Hodge 作用素

$|m|$ が小さい時 $\det(D_\pm+mP_\pm)$ は m の正則関数で，全平面に正則に解析接続され，零点は $-(D_\pm$ の固有値），位数は固有値の重複度に等しい．この関数を $\det^*(D_\pm+mP_\pm)$ とし

(21) $$\det{}^*(D+mI)=\det{}^*(D_++mP_+)\det{}^*(D_-+mP_-)$$

と置く．

$x\in U$ で $D+A_u(x)$ が退化したとき，scalar $m=m_u$ を撰んで x の適当な近傍（簡単の為 U と書く）で $D+A_u(y)+mI$, $y\in U$, が常に非退化に出来る．m を定めて

(22) $$\det{}_m(D+A_u)=\det{}^*((D+A_u+mI)-mI)$$

と置く（右辺は最初の m は固定され２番目の m は変数 m が値 m を取ったと見る）．上記の注意（(8)）により

$$\{\gamma_{uv}\}=\{\det{}_m(D+A_u)/\det{}_m(D+A_v)\}$$

と置けば $\{\gamma_{uv}\}$ は $Map(X,M)$ の (complex) line bundle を定める．この bundle は (smooth bundle として) $Map(X,M)$ の tangent bundle $T^{\#}$ だけで定まり，$\{A_u\}$ と $\{m_u\}$ には関係しない ([4])．

∞-形式の局所的な定義 (10) により，$Map(X,M)$ の ∞-形式 f^{∞} は

$$f^{\infty} = \{f_u \det_m (D+A_u)^{-k-d/2}\}$$

の形になる．従って $\{\gamma_{uv}\}^{k+d/2}$ が定義される時，$\{f_u\}$ は $\{\gamma_{uv}\}^{k+d/2}$ の cross-section になる．言いかえれば，$\{\gamma_{uv}\}$ の Chern class を $c(\{\gamma_{uv}\})$ とすれば，$W^k(X)$ を model とする写像空間 $Map(X,M)$ 上で ∞-形式が定義される為には $(k+d/2)c(\{\gamma_{uv}\})$ が integral class になる事が必要である．但し D が positive definite であれば，$\{\gamma_{uv}\}$ は trivial になるので ∞-形式はいつでも定義出来る．

定義4．$\{\gamma_{uv}\}^{k+d/2}$ が定義出来る時 $\tau = \{\gamma_{uv}\}^{k+d/2}$ を $Map(X,M)$ の determinant bundle と呼ぶ．

定義5．τ が定義出来るとき，$T^{\#}$ を $Map(X,M)$ の接 bundle として，$T^{\#}\otimes\tau$ に associate した $\Lambda^p W^k(X)$-bundle の cross-section を $Map(X,M)$ の $(\infty-p)$-形式と呼ぶ．

D が positive definite ならでは trivial bundle だから $(\infty-p)$-形式は定義出来，$T^{\#}$ に associate した $\Lambda^p W^k(X)$-bundle の cross-section である．

以下，τ が定義出来，$\nu(=\zeta(D+A_u(x)|0))$，ν_- が共に整数である

と仮定する．u^p を Map(X,M) の p-形式，$f^{\infty-p}=\{f_u\}$，$f_u=f\det_m(D+A_u)^{k+d/2}$，
を $(\infty-p)$-形式，$G_{A_u}=G_{A_u(x)}$ を $D+A_u(x)$ の Green 作用素とする．

定義 6．次の (23)，(24) で Map(X,M) の Hodge $*$-作用素 $*=\{*_{u(x)}\}$ を定義する．

(23) $$*u^p=(-1)^p\det_m(D+A_u)^{(k+d/2)}G_{A_u}^{2k}u^p,$$

(24) $$*f^{\infty-p}=(-1)^{\nu p+\nu_-}(D+A_u)^{2k}\det_m(D+A_u)^{-(k+d/2)}f_u.$$

但し $(D+A_u)^{2k}f^p=(D+A_u(x_1))^{2k}\times\cdots\times(D+A_u(x_p))^{2k}f(x_1,\cdots,x_p)$ 等で $(D+A_u)^{2k}f^p$，$G_{A_u}^{2k}u^p$ を定義する．

x で $D+A_u(x)$ が退化すれば $G_{A_u(x)}$ は存在しないから $*(x)=*_{u(x)}$ は定義出来ない．他方定義から $*$ が定義されていれば

(25) $$*^2u^p=(-1)^{p(\nu-p)+\nu_-}u^p,\quad *^2f^{\infty-p}=(-1)^{(\nu-p)p+\nu_-}f^{\infty-p}$$

が成り立つ．

x で $D+A_u(x)$ が退化して $\dim\mathrm{Ker}(D+A_u(x))=1$ であれば，x の近傍で $u^1\wedge *u^1$ は $k<d/2+1$ であれば可積分になる．$k>d/2$ だから k としては $(d+1)/2$ を取るのが適切である．このとき

$$k+d/2=(d+1)/2+d/2=d+1/2$$

だから $*$ は $C(\{g_{uv}\})$ が 2 で割り切れるとき，定義出来る．従って以下 $k=(d+1)/2$ とし，$C(\{g_{uv}\})$ は 2 で割り切れると仮定する．

7. Map(X,G)-bundle の幾何学

以下での仮定の為 Map(X,G)-bundleについての幾つかの結果をまとめておく。

$L^2(X)$の有界線形作用素の代数 $B(L^2(X))$ の部分群 GL_p を

(26) $$GL_p = \{T \in B(L^2(X)) \mid T\text{は逆を持ち } [T,J] \in I_p\},$$

$$I_p \text{ は } B(L^2(X)) \text{ の } p\text{-Schatten ideal},$$

で定義する。$p > d/2$ のとき Map(X,G) は GL_p の部分群であり、GL_p は loop群の homotopy型を持つから Map(X,G)-bundle は loop群-bundleと思える([3], [15])。

$G=U(m)$のときの loop群-bundle $\{g_{uv}\}$(Hilbert多様体 M 上の)の特性類(string類)は $\{g_{uv}\}$ の loop代数値接続 $\{A_u\}$ とその曲率 $\{F_u\}$ を用いて次の様に表わされる; $\int_0^1 tr(\overbrace{F_u\wedge\cdots\wedge F_u}^{p}\, g_{uv}' g_{uv}^{-1})dt$ は U 上の $2p$-形式 B_u の集りによって $B_v - B_u$ と書ける。更に

$$d\left(\int_0^1 tr(F_u\wedge\cdots\wedge F_u\, g_{uv}' g_{uv}^{-1})dt\right)$$
$$= \int_0^1 tr(F_v\wedge\cdots\wedge F_v\wedge A_v')dt - \int_0^1 tr(F_u\wedge\cdots\wedge F_u\wedge A_u')dt$$

である。但し $g_{uv}' = dg_{uv}/dt$ 等と書く。これから M 上の global な closed $(2p+1)$-形式 h を

(27) $$h|U = \int_0^1 tr(F_u\wedge\cdots\wedge F_u\wedge A_u')dt - dB_u$$

で定義する。このとき、$\{g_{uv}\}$ から $M\times S^1$ 上の G-bundle $\{g_{uv}\}^\natural$ を

$\{g_{uv}\}^\natural = \{g_{uv}^\natural\}$, $\quad g_{uv}^\natural(x,t) = (g_{uv}(x))(t)$ で定義すると

(28) $$\langle h\rangle = (2\pi i)^{p+1}(p+1)!\int_{S^1} Ch^{p+1}(\{g_{uv}\}^q),$$

$\langle h\rangle$ は h の de Rham class, Ch は Chern character

となり，$\langle h\rangle$ は $\{A_u\}$, $\{B_u\}$ の取り方によらず定まる．更に $\{g_{uv}\}$ の特性写像を $g : M \to U(m)$，e_p を $H^*(U(m), Z)$ の $(2p+1)$-次元の生成元とすると

(29) $$\langle h\rangle = -(2\pi i)^{p+1}(2p+1)!/(p+1)!\; g^*(e_p)$$

が成り立つ．$\langle h\rangle$ を $\{g_{uv}\}$ の p-次 string 類と呼ぶ．特に第1 string 類は $\{g_{uv}\}$ の構造群が中心拡大迄 lift されるための obstruction である([1], [2], [9], [13][16])．

$\{g_{uv}\}$ の orientation class (構造群が単位元の連結成分に reduce されるための obstruction) は string 類では表わせない．この class は $D = \frac{1}{i}\frac{d}{dt}$ に関する接続 $\{A_u\}$ を用いて次の様に表わす事が出来る：$\eta(A)(x) = \eta(D + A_u(x), 0)$ とおけば $\eta(A)$ は M 上の関数で不連続点は，$D + A_u(x)$ が退化する点である．更に $\exp(\pi i\,\eta(A))$ は M 上 smooth になる．$\{g_{uv}\}$ の orientation class は (real class として)

$\frac{1}{\pi i}(\exp \pi i\eta(A))^{-1} d(\exp \pi i \eta(A))$ の de Rham class である．更に η_A の current としての外微分は

$$d\eta(A) = -\pi i\,\delta_{\overline{Y}_1},\quad Y_1 = \{x \mid \dim (D + A_u(x)) = 1\}$$

となる．従って

(30) $$\langle \tfrac{1}{\pi i}\, d\eta(A)\rangle = -\langle \overline{Y}_1\rangle$$

である（[7]）

8. Clifford bundle の構成

$Map(X,M)$ 上の Clifford bundle で ∞-spinor (γ_5) による Clifford 積が Hodge 作用素を与える様なものを構成する為，$R(\mathcal{C}^\infty)$ を次の作用素 $E^\infty = E_u^\infty(x) : \Lambda^p(W^{-k}(x)) \oplus \Lambda^p(W^k(x)\otimes\tau) \to \Lambda^p(W^{-k}(x)) \oplus \Lambda^p(W^k(x)\otimes\tau)$ におきかえる．

$$(31) \qquad E^\infty = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^{\nu(\nu+1)/2 - \nu/2 + p}(D+A_u)^{2k}\det(D+A_u)^{-k-d/2} \\ (-1)^{\nu(\nu+1)/2 + \nu \pm \nu p}\det(D+A_u)^{k+d/2} G_{A_u}^{2k} & 0 \end{pmatrix}$$

定義から

$$(E^\infty)^2 u^p = (-1)^{p(\nu-p)+\nu_-} u^p, \quad (E^\infty)^2 f^{\infty-p} = (-1)^{(p-\nu)p+\nu_-} f^{\infty-p}$$

となる．従って $\Lambda^p W^{-k}(x) \oplus \Lambda^p(W^k(x)\otimes\tau)$ の上で $(E^\infty)^{-1} = (-1)^{p(\nu-p)+\nu_-} E_\infty$ である．この事から

$$(32) \qquad E_u^\infty(E_v^\infty)^{-1}$$
$$= \begin{pmatrix} (D+A_u)^{2k}\det(D+A_u)^{-k-d/2}\det(D+A_v)^{k+d/2} G_{A_v}^{2k} & 0 \\ 0 & \det(D+A_u)^{k+d/2} G_{A_u}^{2k}(D+A_v)^{2k}\det(D+A_v)^{-k-d/2} \end{pmatrix}$$

となる．$G_{A_u(x)}$ が存在する所（$D+A_u(x)$ が退化しない所）では，$\{E_u^\infty(E_v^\infty)^{-1}\}$ を transition function とし $\Lambda^p(W^{-k}(x)) \oplus \Lambda^p(W^k(x)\otimes\tau)$ $(\cong C(W^{-k})[\mathcal{C}^\infty])$ を fibre として Clifford bundle が構成出来る．この bundle を Clif と書く．Clif は $Map(X,M) - Y$，$Y = \{x \mid \dim \mathrm{Ker}(D+A_u(x)) \geq 1\}$ で定義される（D が positive definite なら $Map(X,M)$ 上で定義される）．

以後 $Y_r=\{x \mid \dim \mathrm{Ker}(D+A_{u(x)})=r\}$ が $\mathrm{Map}(X,M)$ の smooth submanifold になると仮定する。$x\in Y_r$ の時 $\mathrm{Ker}(D+A_{u(x)})$ の basis を $e_{\lambda_1},\dots,e_{\lambda_r}$ とすれば、仮定から x の近傍で Y_r は $e_{\lambda_1}=\dots=e_{\lambda_r}=0$ で定義される。従って $\mathrm{Ker}(D+A_{u(x)})$ は x での Y_r の normal space と同一視出来る。言いかえると Y_r の normal bundle $N(Y_r)$ は

(33) $$N(Y_r)=\bigcup_{x\in Y_r}\mathrm{Ker}(D+A_{u(x)})$$

で与えられる。以下 $\overline{Y_r}$ も submanifold と仮定する。

$\mathrm{Map}(X,M)$ の接 bundle を $T^\#$, $\overline{Y_r}$ の接 bundle を $T(\overline{Y_r})$ とすれば $T^\#|\overline{Y_r}=N(\overline{Y_r})\oplus T(\overline{Y_r})$ で $N(\overline{Y_r})$ は有限次元 bundle だから $T(\overline{Y_r})$ は (GL_p-bundle, 従って) loop 群 bundle になる。よって (28) により (torsion を除いて)

(34) $$s^p(T(\overline{Y_r}))=i^*(s^p(T^\#)),\quad s^p \text{ は } p\text{-th string class}$$

である。

(34) から (real class としては) $N(\overline{Y_r})$ は1次元の class (orientation class) を除いて特性類を持たない。$N(\overline{Y_r})$ の orientation class は $T(\overline{Y_r})$ の orientation class が消えれば消える。$T(\overline{Y_r})$ の orientation class は $\overline{Y_r}$ の中での $\overline{Y_{r+1}}\cap\overline{Y_r}$ の dual class だから、$\overline{Y_{r+1}}$ の $\mathrm{Map}(X,M)$ の中での dual class が $N(\overline{Y_r})$ が trivial になる為の obstruction になる。

$N(\overline{Y_r})$ が trivial であれば適当な座標変換により、$\mathrm{Ker}(D+A_u)$ への projection P_u と $\mathrm{Ker}(D+A_v)$ への projection P_v は等しくなる。従って $\mathrm{Map}(X,M)-Y$ の点列 $\{y_n\}$ が x に収束するとき

$$\lim_{y_n\to x}(D+A_u(y_n))^{2k}G_{A_v(y_n)}^{2k}, \text{ および } \lim_{y_n\to x}G_{A_u(y_n)}^{2k}(D+A_v(y_n))^{2k}$$

が存在し，その値は x だけできまる．従って $E_u^\infty(E_v^\infty)^{-1}$ が x で定義され Clif は $\overline{Y_r}$ でも定義出来る．以上まとめて

定理２．$\overline{Y_{2r}}$ が $Map(X,M)$ の smooth submanifold になるとき，$Map(X,M)$ の接 bundle $T^\#$ の r-th string class が Clif が $\overline{Y_{2r}}$ 迄拡張出来るための obstruction である．

9．Dirac-Kaehler 型作用素についての注意

$C(W^{-k})$ は even spinor の作る module と odd spinor の作る module の直和である．対応する Clif の subbundle を S^0 と S^1 と書く．又 $*u=E^\infty u$ とする．Clif の subbundle $S^0(+)$, $S^0(-)$, $S^1(+)$, $S^1(-)$ を

(35) $$S^0(\pm)=\{u\pm *u \mid u\in S^0\},\quad S^1(\pm)=\{v\pm *v \mid v\in S^1\}$$

で定義する．又

$$S(+)=S^0(+)\oplus S^1(+),\quad S(-)=S^0(-)\oplus S^1(-)$$

とおく．Clif は $S(+)$ と $S(-)$ の直和である．

(25) から

(36) $$*^2=(-1)^{\nu_-} \text{ on } S^0, *S^0,$$
$$*^2=(-1)^{\nu_+ +\nu_- -1} \text{ on } S^1, *S^1$$

となる．従って d の formal adjoint δ を

(37) $$\delta u^p=(-1)^p *^{-1}d*u^p,\quad \delta f^{\infty-p}=(-1)^{\nu-p}*^{-1}d*f^{\infty-p}$$

で定義すれば，u^0, u^1 を S^0 と S^1 の section（偶数次および奇数次の

微分形式と同一視)としたとき

$$(38)\qquad \begin{aligned} &\delta u^0=(-1)^{\nu+\nu_- -1}*d*u^0, && \delta*u^0=-*du^0,\\ &\delta u^1=(-1)^{\nu_- -1}*d*u^1, && \delta*u^1=*du^1 \end{aligned}$$

である．尚 d が $(\infty-p)$-形式の空間 ($C(W^k\otimes\tau)$ の section の空間)上で巾零でないから，δ は $C(W^{-k})$ の section の空間の上では巾零でない．

(38) により

$$(d+\delta)u^0=du^0+(-1)^{\nu+\nu_- -1}*d*u^0,\quad (d-\delta)u^0=du^0+(-1)^{\nu+\nu_-}*d*u^0,$$

$$(d+\delta)*u^0=-*(du^0+(-1)^{\nu+\nu_-}*d*u^0),\quad (d-\delta)*u^0=*(du^0+(-1)^{\nu+\nu_- -1}*d*u^0),$$

$$(d+\delta)u^1=du^1+(-1)^{\nu_- -1}*d*u^1,\quad (d-\delta)u^1=du^1+(-1)^{\nu_-}*d*u^1,$$

$$(d+\delta)*u^1=*(du^1+(-1)^{\nu_-}*d*u^1),\quad (d-\delta)*u^1=-*(du^1+(-1)^{\nu_- -1}*d*u^1)$$

となるから微分作用素 $D(+)$ と $D(-)$ を

$$(39)\qquad \begin{aligned} &D(+)u^p=(d+\delta)u^p, && D(+)*u^p=(-1)^{p-1}i(d-\delta)*u^p\\ &D(-)u^p=(-1)^{p-1}i(d-\delta)u^p, && D(-)*u^p=(d+\delta)*u^p, \quad p=0,1 \end{aligned}$$

とおくと $D(+)$, $D(-)$ は共に $S(+)$ の cross-section を $S(-)$ の cross-section に，$S(-)$ の cross-section を $S(+)$ の cross-section に写す ([14] 参照)．

d, δ は共に巾零ではないから $(d+\delta)^2$, $(\pm i(d-\delta))^2$ は Hodge Laplacian $d\delta+\delta d$ にはならない．しかし $\Delta=d\delta+\delta d$ として

$$D(+)^2u^p=(\Delta+\delta^2)u^p,\quad D(+)^2*u^p=(\Delta-d^2)*u^p,$$

$$D(-)^2u^p=(\Delta-\delta^2)u^p,\quad D(-)^2*u^p=(\Delta+d^2)*u^p$$

となるから

(40) $$\Delta = \frac{1}{2}(D(+)^2 + D(-)^2)$$

が成立する。

$W^k(X)$ では Hodge Laplacian は $-\sum \partial^2/\partial x_{\lambda,k}^2$ と書けるから $L^2(X)$ の座標系では

$$-\Delta = \sum \lambda^{2k} \partial^2/\partial x_\lambda^2$$

となる。従って $L^2(X)$ の微分作用素

(41) $$\Delta(s) = \sum \lambda^{-2s} \partial^2/\partial x_\lambda^2$$

は $W^{-s}(X)$ 上の作用素 $-(d\delta+\delta d)$ である。但し Sobolev 計量は D によって固定されているから $\Delta(s)$ は $L^2(X)$ と D の組 $(L^2(X), D)$ に対して考えているとした方が良い。

$\mathrm{Re}\, s$ が大きいとき $\Delta(s)f$ が定義され、s の関数として $s=0$ 迄解析接続されると仮定して

(42) $$:\Delta: f = \Delta(s) f|_{s=0}$$

と定義する。例えば $r(x)^2 = \sum x_\lambda^2$ に対して $\Delta f \,(= -(d\delta+\delta d) f)$ は定義されないが $\Delta(s)\, r(x)^2 = 2\zeta(D^2, s)$ だから

$$:\Delta: r(x)^2 = 2\zeta(D^2, 0) = 2\nu$$

である。又 $L^2(X)$ の座標系を $\{x_1, x_2, \cdots\}$ とし極座標を

$$r = \sqrt{\sum x_n^2},$$

$$x_1 = r\cos\theta_1, \quad x_2 = r\sin\theta_1 \cos\theta_2, \cdots,$$

$$x_n = r\sin\theta_1 \cdots \sin\theta_{n-1}\cos\theta_n, \cdots, \qquad 0 \leqq \theta_i \leqq \pi,$$

で導入すれば(この極座標は緯度だけで経度がない, その代り $\lim_{n\to\infty}\sin\theta_1\cdots\sin\theta_n=0$ の条件がつく), Re s が大きいとき $\Delta(s)$ は $\partial/\partial r$, $\partial/\partial\theta_i$, $i=1,2,\cdots$, で書くことが出来, それは $s=0$ に解析接続可能であり

$$(43)\qquad \Delta := \frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{\nu-1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\Lambda$$

$$\Lambda=\sum\frac{1}{\sin^2\theta_1\cdots\sin^2\theta_{n-1}}\left\{\frac{\partial^2}{\partial\theta_n^2}+(\nu-n-1)\frac{\cos\theta_n}{\sin\theta_n}\frac{\partial}{\partial\theta_n}\right\}$$

となる. Λ の形は有限次元の場合と似ているが, 有限次元と違って殆んどすべての $\nu-n-1$ は負になる.

参考文献

[1] Alvarez, O.-Killingback, T. P.-Mangano, M.-Windey, P.: String theory and loop space index theorems, Commun. Math. Phys 111, (1987), 1-10, The Dirac-Ramond operator in string theory and loop space index theorems, Nucl Phys. B1A (1987), 189-215

[2] Asada, A.: Characteristic classes of loop group bundles and generalized string classes, Coll. Math. Soc. János Bolyai 56 (1992), 33-66

[3] Asada, A.: Non commutative geometry of GLp-bundles, Coll. Math. Soc. János Bolyai 66 (1995), New Developements of Differential Geometry, 25-49, Kluwer.

[4] Asada, A.: Hodge operators on mapping spaces, Group 21, Physical Applications and Mathematical Aspects of Geometry, Groups and Algebras, 925-928, World Sci. 1997, Hodge operators over mapping spaces, Local Study, BSG Proceedings 1, Global Analysis, Differential Geometry, Lie Algebras, (1997), 1-10.

[5] Asada, A.: Vector analysis on Sobolev spaces, I, II, J. Fac. Sci. Shinshu Univ. 31 (1996), 7-20, 59-70

[6] Asada, A.: Clifford algebas on Sobolev spaces, to appear in BSG Proc.

[7] Asada, A.. Non commutative de Rham theory and spectral monodromy, preprint, Spectral invariant and geometry of mapping spaces, to appear in Contemporary Math., Clifford bundles over mapping spaces, to appear in Proc. DGA, Bruno, 1998.

[8] Asada, A.-Tanabe, N.: A remark on infinite dimensional Gaussian integral in a Sobolev space, J. Fac. Sci. Shinshu Univ. 32 (1997), 61-67.

[9] Carey, A.L.-Crowley, D-Murray, M.K.: Principal bundles over the Dixmier Douady class, Comm. Math. Phys. 193 (1998), 171-196

[10] Farber, M.S.-Levine, J.P.: Jumps of the eta-invariant, Math. Zeit. 223 (1996), 197-244.

[11] Gilkey, P.. The Geometry of Spherical Space Groups, World Sci, 1989.

[12] Kostant, B-Sternberg, S.: Symplectic reduction, BRS cohomology, and infinite-dimensional Clifford algebras, Ann. Phys., 176 (1987), 49-113.

[13] Léandre, R.: Stochastic gauge transform of the string bundle, J. Geo. Phys. 26 (1998), 1-25.

[14] Lizzi, F.-Szabo, J.R.. Target space duality in noncommutative geometry, Phys. Rev. Lett. 79 (1997), 3581-3584.

[15] Mickelsson, J.-Rajeev, S.G.: Current algebras in D+1-dimensions and determinant bundles over infinite-dimensional Grassmannians, Com. Math. Phys. 116 (1988), 365-400.

[16] Pilch. K-Warner, N.P.: String structure and index of the Dirac-Ramond operator on orbifolds, C.M.P 115 (1988) 191-212.