数理解析研究所講究録
1073 巻 1998 年 67-73

Raynaud による Abhyankar 予想の解決 I

諏訪紀幸 (中央大学理工学部)

1. Abhyankar 予想

1.1. k を標数 $p>0$ の代数的閉体，$D=\mathbb{A}_k^1$ を k の上の affine 直線とする．U を D の上の連結な Galois 不分岐被覆，G を被覆 U/D の Galois 群とする．このとき，G は p-Sylow 群によって生成される．実際，N を p-Sylow 群によって生成される G の部分群とすれば，N は G の正規部分群で，G/N の位数は p と素．$V=U/N$ とすれば，V は G/N を Galois 群とする D の連結な不分岐被覆．$\tilde{V}\to\mathbb{P}_k^1$ を $V\to D=\mathbb{A}_k^1$ の完備化とすれば，$\tilde{V}/\mathbb{P}_k^1$ は G/N を Galois 群とする tamely ramified covering．したがって，Riemann-Hurwitz の公式から，$\deg\tilde{V}/\mathbb{P}_k^1=1$.

有限群 G が p-Sylow 部分群によって生成されるとき，G は quasi-p-群であるということにする．

Abhyankar は次の予想を提出した．

(Abh) G が quasi-p-群なら，G を Galois 群とする $D=\mathbb{A}_k^1$ の連結な Galois 不分岐被覆 $U\to D$ が存在する．

Abhyankar 自身様々な例を構成し ([1], [2])，また，多くの研究がなされたが，Raynaud [3] が次のような形で完全に解決した．

G を有限群，S を G の p-Sylow 部分群とする．p-Sylow 部分群が S に含まれるような G の quasi-p-部分群 $\neq G$ によって生成される部分群を $G(S)$ によって表わす．

— G を quasi-p-群，S を G の p-Sylow 部分群とする．このとき，

(1) N を G の正規 p-部分群とする．G/N が D の連結な Galois 不分岐被覆の Galois 群として実現できれば，G もまた D の連結な Galois 不分岐被覆の Galois 群として実現できる．

(2) G のすべての quasi-p-部分群 $\neq G$ が D の連結な Galois 不分岐被覆の Galois 群として実現できれば，$G(S)$ もまた D の連結な Galois 不分岐被覆の Galois 群として実現できる．

(3) $G(S)\neq G$ で G が $\{1\}$ 以外に正規 p-部分群を含まなければ，G は D の連結な Galois 不分岐被覆の Galois 群として実現できる．

(1)(2)(3) を組み合わせて G の位数に関する帰納法によって (Abh) を示す．(1) から G が正規 p-部分群を持たない場合に (Abh) を示せばよい．S を G の p-Sylow 群とする．$G(S)=G$ なら帰納法の仮定と (2) から G に対する (Abh) を得る．$G(S)\neq G$ なら (3) から G に対する (Abh) を得る．

(1) は Serre [4] による次の結果の一部である．

— G を quasi-p-群，N を G の正規部分群とする．N が可解群で G/N が D の連結な Galois 不分岐被覆の Galois 群として実現できれば，G もまた D の連結な Galois 不分岐被覆の Galois 群として実現できる．

(2)(3) は Raynaud による結果で，(2) は rigid geometry の理論を，(3) は stable curve の理論を援用する．本稿では (1)(2) については概略を解説する．また，(3) については本報告集所収の中島幸喜氏による論稿を参照されたい．

補註 1.2.1. p-群は quasi-p-群．

補註 1.2.2. G が単純群で G の位数が p で割り切れるなら G は quasi-p-群.

例 1.3.1. $\mathfrak{S}_n$ は quasi-2-群. しかし, $p > 2$ なら $\mathfrak{S}_n$ は quasi-p-群ではない.

例 1.3.2. $n > p$ なら $n = 4$, $p = 2$ の場合を除いて $\mathfrak{A}_n$ は quasi-p-群.

例 1.4.1. $G = \mathfrak{S}_n$, S を G の 2-Sylow 部分群とする. $n = 3$ のとき, $G(S) = S$, $n > 3$ のとき, $G(S) = G$.

例 1.4.2. $G = \mathfrak{A}_n$, S を G の 3-Sylow 部分群とする. $n = 4$ のとき, $G(S) = S$, $n > 4$ のとき, $G(S) = G$.

2. Case I

まず, よく知られた事実を振り返っておく.

定理 2.1. k を代数的閉体, X を有限型 k-scheme, $N = \dim X$, また, F を X の上の constructible sheaf とする.
(1) X が affine なら, $H^j(X, F) = 0\ (j > N)$.
(2) k が標数 $p > 0$ で F が p-torsion なら, $H^j(X, F) = 0\ (j > N)$.

補題 2.2. k を代数的閉体, X を k の上の affine 曲線, Π を X の基本群とし, N を discrete finite Π-module, F を対応する X の上の locally constant constructible sheaf とすれば, $H^j(X, F)$ は $H^j(\Pi, N)$ に同型.

$\tilde{X}$ を X の普遍被覆とすれば, Hochshild-Serre の specral sequece

$$E_2^{ij} = H^i(\Pi, H^j(\tilde{X}, F)) \Rightarrow H^{i+j}(X, F)$$

を得る. X が affine で $\dim X = 1$ なので, $j > 1$ なら $H^j(\tilde{X}, F) = 0$. また, $H^0(\tilde{X}, F) = N$, $H^1(\tilde{X}, F) = 0$. これから, 同型 $H^j(\Pi, N) \xrightarrow{\sim} H^j(X, F)$ を得る.

2.3. (1) の証明 $D = \mathbb{A}_k^1$ の基本群を Π で表わす. G を quasi-p-group, N を G の正規 p-部分群, $\Gamma = G/N$ とし, $\varphi : \Pi \to \Gamma$ を準同型とする. φ が全射であると仮定する. このとき, 全射 $\tilde{\varphi} : \Pi \to G$ が存在して

$$\begin{array}{ccc} & \tilde{\varphi} & \Pi \\ & \swarrow & \downarrow \varphi \\ G & \to & \Gamma \end{array}$$

が可換となることを示す.

N が $(p, \dots, p)$ 型で, Γ-加群として既約であると仮定してよい. Π は準同型 $\varphi : \Pi \to \Gamma$ を通して N の上に作用する. N_φ を Π の N の上への作用によって定義される D の上の locally constant constructible sheaf, U を Γ を Galois 群とする D の連結な不分岐被覆とする. このとき, U の基本群を Π_U で表わせば, $\Pi_U = \mathrm{Ker}[\varphi : \Pi \to \Gamma]$ で, Hochschild-Serre の完全列

$$0 \to H^1(\Gamma, N) \to H^1(\Pi, N) \to H^1(\Pi_U, N)^\Gamma \to H^2(\Gamma, N) \to H^2(\Pi, N)$$

を得る．e を群の拡大 $1 \to N \to G \to \Gamma \to 1$ の $H^2(\Gamma, N)$ における類とする．ここで，補題 2.2 から $H^2(\Pi, N) = H^2(D, N_\varphi) = 0$．したがって，$f \in H^1(U, N_\varphi)^\Gamma = H^1(\Pi_U, N)^\Gamma$ が存在して $f \mapsto e$ となる．さらに，群の拡大の射

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \Pi_U & \longrightarrow & \Pi & \xrightarrow{\varphi} & \Gamma & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{\varphi}} & & \| & & \\ 1 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & G & \longrightarrow & \Gamma & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

を得る．このとき，$\tilde{\varphi} : \Pi \to G$ が全射 $\Leftrightarrow f : \Pi_U \to N$ が全射．ここで，N が Γ-加群として既約なので，$f : \Pi_U \to N$ が全射 $\Leftrightarrow f \neq 0$．$e \neq 0$ なら $f \neq 0$ なので，$\tilde{\varphi} : \Pi \to G$ は全射．

$e = 0$ の場合．以下の補題から，$\dim_{\mathbb{F}_p} H^1(D, N_\varphi) = \infty$．$H^1(\Gamma, N)$ は有限群なので，$H^1(D, N_\varphi) \neq \mathrm{Ker}[H^1(D, N_\varphi) \to H^1(U, N_\varphi)^\Gamma]$．したがって，$f \in H^1(U, N_\varphi)^\Gamma$ が存在して $f \neq 0$ で $f \mapsto 0$ となる．

補題 2.4. k を標数 $p > 0$ の代数的閉体，F を $D = \mathrm{Spec}\, k[T]$ の上の locally constant constructible $\mathbb{F}_p$-module とする．このとき，埋め込み $k[T] \subset k((T^{-1}))$ によって定義される写像 $H^1(D, F) \to H^1(\eta, F)$ は全射．

$X = \mathbb{P}^1_k = D \cup \{\infty\}$ とし，$j : D \to X$ を canonical immersion，$\tilde{N} = j_* N_\varphi$ とする．このとき，local cohomology の完全列

$$H^1(D, N_\varphi) \to H^2_\infty(X, \tilde{N}) \to H^2(X, \tilde{N})$$

を得る．$\dim X = 1$ で $\tilde{N}$ が p-torsion なので，$H^2(X, \tilde{N}) = 0$．したがって，$H^1(D, N_\varphi) \to H^2_\infty(X, \tilde{N})$ は全射．ここで，$H^1(D, N_\varphi) \to H^2_\infty(X, \tilde{N})$ は $H^1(D, F) \to H^1(\eta, F)$ に他ならない．

補題 2.5. k を標数 $p > 0$ の代数的閉体，F を $\eta = \mathrm{Spec}\, k((T))$ の上の locally constant constructible $\mathbb{F}_p$-module とする．このとき，$F \neq 0$ なら $\dim_{\mathbb{F}_p} H^1(\eta, F) = \infty$．

F が Π_η-加群として既約であると仮定してよい．I_1 を Π_η の wild ramification subgroup とする．I_1 が Π_η の normal pro-p-subgroup なので，I_1 は F に自明に作用する．したがって，F が $k((T))$ の m 次巡回拡大 $k((T^{1/m}))$ の上で自明になるような $(m, p) = 1$ が存在する．$q = p^m$ とおけば，F は指標 $\chi : \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to \mathbb{F}_q^\times$ によって定義される．$\tilde{\eta} = \mathrm{Spec}\, k((T^{1/m}))$，$I_m = \mathrm{Gal}(\tilde{\eta}/\eta)$ とし，ζ_m を 1 の原始 m 乗根とする．このとき，$\gamma(T^{1/m}) = \zeta_m T^{1m}$ によって $\gamma \in I_m$ を定義すれば，I_m は γ によって生成される．さらに，

$$H^1(\eta, F) = H^1(\tilde{\eta}, F)^{I_m}$$

ここで，Artin-Schreier 理論から

$$H^1(\tilde{\eta}, F) = \left\{ \sum_{i<0,\ q\nmid i} a_i T^{i/m} \ ;\ a_i \in k \right\}$$

で，γ は

$$\sum a_i T^{i/m} \mapsto \sum a_i \chi(\gamma)\zeta_m^i T^{i/m}$$

によって作用する．これから，$\chi(\gamma) = \zeta_m^r$ なら

$$H^1(\eta, F) = \left\{ \sum_{i<0,\ q\nmid i,\ m|(i+r)} a_i T^{i/m}\ ;\ a_i \in k \right\}$$

したがって，$\dim_{\mathbb{F}_p} H^1(\eta, F) = \infty$.

補註 2.6. 上記の議論の原型は Witt[5] に見られる．

補註 2.7. N が $(l, \ldots, l)$ 型の場合，Serre[4] は Ogg-Safarevic-Grothendieck の公式を用いて $\dim_{\mathbb{F}_l} H^1(D, N_\varphi)$ の評価をして，定理の結論を導出している．

3. Case II

Raynaud は次の精密な形で (2) を示している．

定理 3.1. k を標数 $p > 0$ の代数的閉体とする．G を有限群，Q を G の p-部分群，$\{G_i\}_{i\in I}$ を G の部分群の族とし，各 i に対して $Q_i = G_i \cap Q$ とする．さらに，
(a) G は $\{G_i\}_{i\in I}$ と Q で生成される，
(b) 各 $i \in I$ に対して，無限遠点における惰性群が Q_i であるような，G_i を Galois 群とする $\mathbb{A}_k^1$ の連結な Galois 不分岐被覆が存在する，
と仮定する．このとき，無限遠点における惰性群が Q であるような，G を Galois 群とする $\mathbb{A}_k^1$ の連結な Galois 不分岐被覆が存在する．

$R = k[[t]]$, $K = k((t))$ とし，$\mathcal{P}$ を K の上の rigid projective line，$\{x_i\}_{i\in I}$ を $\mathcal{P}$ の相異なる有理点，t_i を x_i における局所座標とする．x_i を中心とする円板 $v(t_i) \geq -1$ が互いに交わらないように $\{x_i\}_{i\in I}$ を選ぶ．$\mathcal{D}_i$ を x_i を中心とする閉単位円板 $v(t_i) \geq 0$ とする．

$P_{i,k}$ を k の上の射影直線，$D_{i,k}$ を t_i を座標とする affine 直線，∞_i を無限遠点とする．仮定から，∞_i 以外では不分岐で，∞_i における惰性群が Q_i であるような，G_i を Galois 群とする連結な有限被覆 $\tilde{X}_{i,k} \to P_{i,k}$ が存在する．$X_{i,k}$ を $\tilde{X}_{i,k}$ における $D_{i,k}$ の逆像とすれば，不分岐被覆 $X_{i,k} \to D_{i,k}$ は formal scheme の不分岐被覆 $\mathfrak{X}_i \to \mathfrak{D}_i = \mathrm{Spf}\, R\{t_i\}$ に一意的に持ち上げられる．さらに，generic fiber への移行によって rigid space の不分岐被覆 $\mathcal{X}_i \to \mathcal{D}_i$ を得る．

命題 3.2 から，$n > 0$ が存在して $\mathcal{X}_i \to \mathcal{D}_i$ が円板 $\mathcal{D}_i' : v(t_i) \geq -1/n$ の上の G_i を Galois 群とする不分岐被覆 $\mathcal{X}_i' \to \mathcal{D}_i'$ に延長できる．n を充分大きく取れば，半開円環 $0 > v(t_i) \geq -1/n$ の上の $\mathcal{X}_i'$ の連結成分が $\tilde{X}_{i,k}$ の ∞_i の上の点と一対一対応する．$\mathcal{U}_i$ を半開円環 $0 > v(t_i) \geq -1/n$ の上の $\mathcal{X}_i'$ の連結成分の一つとすれば，$\mathcal{U}_i$ は Q_i を Galois 群とする半開円環 $0 > v(t_i) \geq -1/n$ の上の不分岐被覆．$\mathcal{C}_i' : v(t_i) = -1/n$ とすれば，G_i を Galois 群に持つ被覆の同型

$$\mathcal{X}_i'|_{\mathcal{C}_i'} \xrightarrow{\sim} G_i \wedge^{Q_i} \mathcal{U}_i|_{\mathcal{C}_i'}$$

を得る．$\mathcal{P}-\bigcup_{i\in I}\mathcal{D}_i$ に無限遠点 ∞ を取る．

$$\mathcal{V}_i=Q\wedge^{Q_i}\mathcal{U}_i|_{\mathcal{C}_i'}$$

とおけば，$\mathcal{V}_i$ は Q を Galois 群とする $\mathcal{C}_i$ の不分岐被覆．命題 3.3 から，∞ と x_i $(i\in I)$ 以外では不分岐な，Q を Galois 群とする，K の上の射影直線 P の連結な有限被覆 Y が存在して，各 i に対して $Y|_{\mathcal{C}_i'}$ は $\mathcal{V}_i$ に Q を Galois 群とする不分岐被覆として同型になる．さらに，Q は ∞ における惰性群であると仮定してよい．

$\mathcal{W}$ を $\mathcal{P}$ における開円板 $\{t_i\ ;\ v(t_i)>-1/n\}$ $(i\in I)$ の補集合，$\mathcal{Y}$ を $\mathcal{W}$ の Y における逆像とする．Q が無限遠点における惰性群なので，$\mathcal{Y}$ は連結．

$$\mathcal{Z}=G\wedge^{Q}\mathcal{Y}$$

とすれば，$\mathcal{Z}$ は G を Galois 群とする $\mathcal{W}$ の有限被覆．また，各 i に対して

$$\mathcal{Z}_i'=G\wedge^{G_i}\mathcal{X}_i'$$

とすれば，$\mathcal{Z}_i'$ は G を Galois 群とする $\mathcal{D}_i'$ の不分岐被覆．さらに，$\mathcal{Z}|_{\mathcal{C}_i'}$，$\mathcal{Z}_i'|_{\mathcal{C}_i'}$ は $G\wedge^{Q_i}\mathcal{U}_i|_{\mathcal{C}_i'}$ に G を Galois 群とする $\mathcal{C}_i'$ の不分岐被覆として同型．これから，$\mathcal{Z}$ に $\mathcal{Z}_i$ を $\mathcal{C}_i$ に沿って貼り合わせて，∞ 以外では不分岐で，∞ における惰性群が Q であるような，G を Galois 群とする rigid space の有限被覆 $\mathcal{M}\to\mathcal{P}$ を得る．$\mathcal{X}_i'$，$\mathcal{Y}$ が連結で，G が G_i，Q によって生成されるので，$\mathcal{M}$ は連結．

Kiehl の比較定理から $\mathcal{M}$ は G を Galois 群とする $\mathbb{P}^1_K$ の有限被覆 M に代数化される．M は有理点を持つので，絶対連結．k への特殊化によって，無限遠点以外では不分岐で，無限遠点における惰性群が Q であるような，G を Galois 群とする $\mathbb{P}^1_k$ の連結な有限被覆を得る．

命題 3.2. K を剰余体が代数的閉体である完備離散付値体，$\mathcal{D}$ を K における単位円板 $:v(T)\geq 0$，$\mathcal{U}\to\mathcal{D}$ を rigid space の不分岐有限被覆とする．このとき，$\varepsilon>0$ が存在して $\mathcal{U}\to\mathcal{D}$ は円板 $\mathcal{D}':v(T)\geq-\varepsilon$ の上の不分岐有限被覆 $\mathcal{U}'\to\mathcal{D}'$ に延長できる．

rigid affine line あるいは rigid projective line における円板あるいは円環については本報告集所収の加藤文元氏による概説を参照されたい．

以下，定理 3.1 の証明における記号をそのまま用いる．$U=\mathbb{P}^1_K-\{x_i:\imath\in I\}\cup\{\infty\}$, $\mathcal{U}=\bigcup_{i\in I}\mathcal{C}_i'$ とする．U の基本群を Π で，$\{\mathcal{C}_i'\}$ の基本群を Π_i で表わす．また，$\rho_i:\Pi_i\to\Pi$ を自然な射 $\mathcal{C}_i'\to U$ から誘導される準同型とする．

命題 3.3. Q を p-群，$h_i:\Pi_i\to Q$ を準同型とする．このとき，全射 $h:\Pi\to Q$ および $q_i\in Q$ が存在して各 i に対して $h\circ\rho_i=\mathrm{Int}(q_i)\circ h_i$ となる．ここで，$\mathrm{Int}(q_i)$ は q_i によって定義される Q の内部自己同型．

Q の位数に関する帰納法による．Q の中心に含まれる位数 p の巡回部分群が存在するので，次の補題を示せばよい．

補題 3.4. G を p-群，N を Q の中心に含まれる位数 p の巡回部分群，$\Gamma = Q/N$ とし，$\varphi : \Pi \to \Gamma$ を準同型とする．φ が全射で，各 $i \in I$ に対して $\varphi \circ \rho_i : \Pi_i \to \Gamma$ の持ち上げ $\tilde{\varphi}_i : \Pi_i \to G$ が存在すると仮定する．このとき，φ の持ち上げ $\tilde{\varphi} : \Pi \to G$ および $q_i \in N$ が存在して，$\tilde{\varphi}$ は全射で，各 i に対して $\tilde{\varphi} \circ \rho_i = \mathrm{Int}(q_i) \circ \tilde{\varphi}_i$ となる．ここで，$\mathrm{Int}(q_i)$ は q_i によって定義される N の内部自己同型．

Π は準同型 $\varphi : \Pi \to \Gamma$ を通して N の上に作用するが，N は Γ-加群として自明．したがって，Π の N の上への作用によって定義される U の上の locally constant constructible sheaf は constant sheaf $\mathbb{F}_p$ に他ならない．補題 2.2 と同様にして

$$H^1(\Pi, N) \xrightarrow{\sim} H^1(U, \mathbb{F}_p),\ H^2(\Pi, N) = 0$$

また，

$$H^1(\Pi_i, N) \xrightarrow{\sim} H^1(\mathcal{U}_i, \mathbb{F}_p)$$

$H^2(\Pi, N) = 0$ なので，$\varphi : \Pi \to \Gamma$ の持ち上げ $\tilde{\varphi}$ が存在する．また，他の φ の持ち上げは $f\tilde{\varphi}$, $f \in Z^1(\Pi, N)$ の形をしている．ここで，補題 3.5 から $H^1(\Pi, N) \to \bigoplus_{i\in I} H^1(\Pi_i, N)$ は全射なので，$\tilde{\varphi}$ を適当な $f\tilde{\varphi}$ で置き換えることによって各 i に対して $\tilde{\varphi} \circ \rho_i = f_i \tilde{\varphi}_i$, $f_i \in B^1(\Pi_i, N)$ が成立する．このとき，$f_i(\pi) = \pi(q_i^{-1})q_i$ とすれば，$\tilde{\varphi} \circ \rho_i = \mathrm{Int}(q_i) \circ \tilde{\varphi}_i$.

さらに，補題 3.5 から $\mathrm{Ker}[H^1(\Pi, \mathbb{F}_p) \to \bigoplus_{i\in I} H^1(\Pi_i, N)]$ は無限群．一方，$H^1(\Gamma, N)$ は有限群なので，$H^1(\Gamma, N) \to H^1(\Pi, N)$ の像に属さない $\mathrm{Ker}[H^1(\Pi, \mathbb{F}_p) \to \bigoplus_{i\in I} H^1(\Pi_i, N)]$ の元 $[f]$, $f \in Z^1(\Pi, N)$ が存在する．$\tilde{\varphi}$ が全射でなければ $\tilde{\varphi}$ を $f\tilde{\varphi}$ に取り換えればよい．

補題 3.5. 制限写像 $H^1(U, \mathbb{F}_p) \to H^1(\mathcal{U}, \mathbb{F}_p)$ は全射で，$\mathrm{Ker}[H^1(U, \mathbb{F}_p) \to H^1(\mathcal{U}, \mathbb{F}_p)]$ は $\mathbb{F}_p$ の上に無限次元．

$D = \mathrm{Spec}\, K[T]$, $\mathcal{D} = \mathrm{Spf}\, K\{T\}$ に対して補題が成立することを示す．$\mathcal{U}$ の affinoide 環の元が U の affine 代数の元によって近似されることに注意すれば同様の議論が進行する．

Artin-Schreier 理論から

$$H^1(D, \mathbb{F}_p) = \mathrm{Coker}[F - 1 : K[T] \to K[T]],$$
$$H^1(\mathcal{D}, \mathbb{F}_p) = \mathrm{Coker}[F - 1 : K\{T\} \to K\{T\}]$$

$f(T) \in K\{T\}$ とすれば，

$$f(T) = g(T) + h(T),\ g(T) \in K[T],\ h(t) = \sum_{i>0} a_i T^i,\ \text{各 } i \text{ に対して } v(a_i) > 0$$

と表わせる．このとき，

$$u(T) = -\sum_{j\geq 0} h(T)^{p^j}$$

とすれば，$u(T) \in R\{T\}$ で $u(T)^p - u(T) = h(T)$ なので，$\mathrm{Coker}[F - 1 : R\{T\} \to R\{T\}]$ において $[f] = [g]$．したがって，制限写像 $H^1(D, \mathbb{F}_p) \to H^1(\mathcal{D}, \mathbb{F}_p)$ は全射．

次に，$a \in R$, $v(a) > 0$, $i > 0$ なら，$\mathrm{Coker}[F-1 : K\{T\} \to K\{T\}]$ において $[aT^i] = 0$. 一方，$\mathrm{Coker}[F-1 : R[T] \to R[T]]$ において $[aT^i] \neq 0$. したがって，$\mathrm{Ker}[H^1(D, \mathbb{F}_p) \to H^1(\mathcal{D}, \mathbb{F}_p)]$ は $\mathbb{F}_p$ の上に無限次元.

補註 3.6. 原論文では Raynaud は命題 3.3. より非常に一般の事実を示している.

X を K の上の非特異射影曲線，$(U, \mathcal{U})$ を X の Runge couple，V を U の G を Galois 群とする連結不分岐被覆，$\varphi : \Pi \to \Gamma$ を V/U に対応する全射とする．$\{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$ を $\mathcal{U}$ の連結成分とし，U の基本群を Π で，$\mathcal{U}_i$ の基本群を Π_i で表わす．$\rho_i : \Pi_i \to \Pi$ を自然な射 $\mathcal{U}_i' \to U$ から誘導される準同型とし，$\varphi_i = \varphi \circ \rho$ とおく．さらに，G を Γ の p-群 N による拡大とする．$\tilde{\varphi}_i : \Pi_i \to G$ を φ_i の持ち上げとする．このとき，全射 $\tilde{\varphi} : \Pi \to G$ および $q_i \in N$ が存在して各 i に対して $\tilde{\varphi} \circ \rho_i = \mathrm{Int}(q_i) \circ \tilde{\varphi}_i$ となる.

これを示すために原論文では次の補題を準備している.

— k を標数 $p > 0$ の代数的閉体，$K = k((t))$，X を K の上の連結な smooth curve，$(U, \mathcal{U})$ を Runge couple，M を U の上の locally constant constructible $\mathbb{F}_p$-module とする．このとき，

(1) 制限写像 $H^1(U, M) \to H^1(\mathcal{U}, M)$ は全射.

(2) $M \neq 0$ なら $\dim_{\mathbb{F}_p} \mathrm{Ker}[H^1(U, M) \to H^1(\mathcal{U}, M)] = \infty$.

文献

[1] S. Abhyankar – Coverings of algebraic curve, Amer. J. Math. 79 (1957) 825-856

[2] S. Abhyankar – Galois theory on the line in nonzero characteristics, Bull. Amer. Math. Soc. 27 (1992) 68-131

[3] M. Raynaud – Revêtements de la droite affine en caractérisque $p > 0$ et conjecture d'Abhyankar, Invent. Math. 116 (1994) 425-462

[4] J-P. Serre – Construction de revêtements étales de la droite affine en caractérisque p, C. R. Acad. Sci. Paris 311 (1990) 341-346

[5] E. Witt – Konstruktion von galoisschen Körpern der Characteristik p zu vorgegebener Gruppe der Ordnung p^f, J. reine angew. Math. 174 (1936) 237-245