数理解析研究所講究録
1074 巻 1999 年 69-75

The virtual cohomological dimension of Coxeter groups

– results of Bestvina-Mess and Dranishnikov –

筑波大学大学院数学研究科
保坂 哲也 (Tetsuya Hosaka)

1 はじめに

近年、ある群 (hyperbolic group, Coxeter group, etc.) に対して、群の boundary と呼ばれる位相空間を考え、その性質を求めることが盛んに行われている。群の boundary に関する一般的な定義は Bestvina [Be2] によって与えられているが、ここでは特に Coxeter group の boundary に関して、Dranishnikov [Dr1] の結果を中心に紹介する。

Coxeter group の boundary は極限によって定義され、一般に複雑な形をしている。例えば、Coxeter group Γ の boundary $\partial\Gamma$ で $\dim \partial\Gamma = 2$, $\dim_{\mathbf{Q}} \partial\Gamma = 1$ となる例が Dranishnikov [Dr1] によって構成されている。ここで、abelian group G に関する compact metric space X の cohomological dimension $\dim_G X$ は次のように定義される。

$$\dim_G X = \sup\{\, i \mid \check{H}^i(X, A; G) \neq 0 \text{ for some closed set } A \subset X\}$$

一般に X が有限次元のときには $\dim X = \dim_{\mathbf{Z}} X$ が成り立ち、また、 X が polyhedron や manifold の場合には、任意の G に対して $\dim X = \dim_G X$ が成り立つことが知られている。このことから分かるように、上の例は Coxeter group の boundary が polyhedron や manifold のような単純な形を一般にはしていないことを示している。

一方、 compact metric space の cohomological dimension theory において、歴史的に compact metric space X_n で $\dim X_n = n$, $\dim_{\mathbf{Q}} X_n = 1$ となるものが存在するかどうかが問題であった。この問題は、$n = 2$ については 1930 年代に Pontryagin によって、$n = 3$ については 1960 年代に Kuzminov [Ku] によって、そして、すべての n について 1980 年代に Dranishnikov [Dr3] によって肯定的に解決された。(すなわち、このような cohomological dimension を持つ compact metric space が構成された。)

ここで、次の問題が提起される。

Problem 1.1 (Dranishnikov [Dr1]) Does there exists a Coxeter group Γ_n such that $\dim \partial\Gamma_n = n$ and $\dim_{\mathbf{Q}} \partial\Gamma_n = 1$?

この Problem は、現在 $n \geq 3$ について未解決である。まず、Bestvina - Mess および Dranishnikov の諸結果を紹介し、最後に、それらを踏まえてこの Problem に関していま何が課題となっているかについて述べる。

2 Coxeter group

まず、(right-angled) Coxeter group および (right-angled) Coxeter system の定義を与える。

Definition 2.1 Let V be a finite set. Let $m : V \times V \to \mathbf{N} \cup \{\infty\}$ be a map satisfying the following conditions:

(i) $m(v,w) = m(w,v)$ for all $v, w \in V$,

(ii) $m(v,v) = 1$ for all $v \in V$,

(iii) $m(v,w) \geq 2$ for all $v \neq w \in V$.

The group Γ given by the presentation $\left\langle V \,|\, (vw)^{m(v,w)} = 1 \text{ for } v,w \in V \right\rangle$ is called a *Coxeter group* and the pair (Γ, V) is called a *Coxeter system.* If $m(v,w) = 2$ or ∞ for all $v \neq w \in V$, then the group Γ is called a *right-angled Coxeter group* and the pair (Γ, V) is called a *right-angled Coxeter system.*

Coxeter system (Γ, V) と $W \subset V$ について、Γ_W を W によって生成される Γ の部分群とする。このとき (Γ_W, W) は再び Coxeter system となり、Γ_W を Γ の parabolic subgroup と呼ぶ。Coxeter system (Γ, V) に対して simplicial complex $K(\Gamma, V)$ が次のように定義される。

Definition 2.2 Let $\mathcal{F}$ be the set of all nonempty subsets of V that generated a finite subgroup of Γ, i.e.

$$\mathcal{F} = \{W \subset V \,|\, \Gamma_W : \text{finite group},\ W \neq \emptyset\}.$$

Then the simplicial complex $K(\Gamma, V)$ is defined by the following conditions:

(i) the set of vertices of $K(\Gamma, V)$ is V,

(ii) for $v_0, \ldots, v_k \in V$, $\{v_0, \ldots, v_k\}$ spans a simplex of $K(\Gamma, V)$ if and only if $\{v_0, \ldots, v_k\} \in \mathcal{F}$.

Right-angled Coxeter system の $K(\Gamma, V)$ を特徴付けるために flag complex を定義する。

Definition 2.3 A simplicial complex K is called a *flag complex* if any finite set of vertices, which are pairwise joined by edges, spans a simplex in K.

Remark **2.4** The barycentric subdivision of a simplicial complex is a flag complex.

このとき、次が成り立つ。

Proposition 2.5 (Davis [Da1])

(1) Let (Γ, V) be a right-angled Coxeter system. Then $K(\Gamma, V)$ is a finite flag complex.

(2) Let K be a any finite flag complex. Then there is a right-angled Coxeter system (Γ, V) with $K(\Gamma, V) = K$. Namely, let V be the vertex set of K and define $m : V \times V \to \mathbf{N} \cup \{\infty\}$ by

$$m(v,w) = \begin{cases} 1 & \text{if } v = w \\ 2 & \text{if } \{v,w\} \text{ spans an edge in } K \\ \infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

If Γ is the associated right-angled Coxeter group, then $K(\Gamma, V) = K$.

この Proposition から、right-angled Coxeter system と finite flag complex が一対一に対応していることがわかる。

3 Coxeter group の virtual cohomological dimension

一般に、群の cohomological dimension は次のように定義される。

Definition 3.1 Let Γ be a group and R be a ring with 1. The *cohomological dimension of* Γ *over* R is defined as

$$\mathrm{cd}_R \Gamma = \sup\{i \mid H^i(\Gamma; M) \neq 0 \text{ for some } R\Gamma\text{-module } M\}.$$

If $R = \mathbf{Z}$ then $\mathrm{cd}_{\mathbf{Z}} \Gamma$ is simply called the cohomological dimension of Γ, and denoted by $\mathrm{cd}\, \Gamma$.

一般に finite index な torsion-free subgroup を持つ群を *virtually torsion-free group* と呼ぶが、このような群に対して virtual cohomological dimension が次のように定義される。

Definition 3.2 Let Γ be a virtually torsion-free group and $\Gamma' \subset \Gamma$ be a torsion-free subgroup of finite index. Then the *virtual cohomological dimension of* Γ *over a ring* R is defined as $\mathrm{cd}_R \Gamma'$, and denoted by $\mathrm{vcd}_R \Gamma$. If $R = \mathbf{Z}$ then $\mathrm{vcd}_{\mathbf{Z}} \Gamma$ is simply called the virtual cohomological dimension of Γ, and denoted by $\mathrm{vcd}\, \Gamma$.

Remark **3.3** A Coxeter group is virtually torsion-free and the virtual cohomological dimension of a Coxeter group is finite.

次の Theorem が Dranishnikov によって示された。この Theorem から Coxeter group の virtual cohomological dimension が $K(\Gamma, V)$ から得られることがわかる。

Theorem 3.4 (Dranishnikov [Dr1]) *Let* (Γ, V) *be a Coxeter system and* R *be a principal ideal domain. Then there is the formula*

$$\mathrm{vcd}_R \Gamma = \max\{\mathrm{lcd}_R K(\Gamma, V),\ \mathrm{cd}_R K(\Gamma, V) + 1\}.$$

ただしここで、simplicial complex K と abelian group G に対して、G に関する K の *local cohomological dimension* $\operatorname{lcd}_G K$ と、G に関する K の *global cohomological dimension* $\operatorname{cd}_G K$ は次で与えられる。

$$\operatorname{lcd}_G K = \max_{\sigma \in K}\{i \mid H^i(\operatorname{St}(\sigma, K), \operatorname{Lk}(\sigma, K); G) \neq 0\}$$
$$\operatorname{cd}_G K = \max\{i \mid H^i(K; G) \neq 0\}$$

これらの次元は次のような性質を持つことが知られている。

Proposition 3.5 (Dranishnikov [Dr1]) Let K be a n-dimensional simplicial complex.Then

(1) $\operatorname{cd}_G K \leq \operatorname{lcd}_G K \leq \dim K$ for any abelian group G,

(2) $\operatorname{lcd}_G \operatorname{sd} K = n$ for any non-trivial abelian group G.

Here $\operatorname{sd} K$ is the barycentric subdivision of K.

4 Coxeter group の boundary

ここでは簡単のため、right-angled Coxeter group についてのみ述べる。Right-angled Coxeter group の boundary を定義するために、まず right-angled Coxeter system (Γ, V) に対して cubical complex $\Sigma(\Gamma, V)$ を定義する。

Definition 4.1 The cubical complex $\Sigma(\Gamma, V)$ is defined by the following conditions:

(i) the vertex set of $\Sigma(\Gamma, V)$ is Γ,

(ii) for $\gamma, \gamma' \in \Gamma$, $\{\gamma, \gamma'\}$ spans an edge in $\Sigma(\Gamma, V)$ if and only if the length $\ell_V(\gamma^{-1}\gamma') = 1$,

(iii) for $\gamma \in \Gamma$ and $v_0, \ldots, v_k \in V$, the edges $|\gamma, \gamma v_0|, \ldots, |\gamma, \gamma v_k|$ form a k-cube in $\Sigma(\Gamma, V)$ if and only if $\{v_0, \ldots, v_k\}$ spans a k-simplex in $K(\Gamma, V)$.

We define the natural metric on the cubical complex $\Sigma(\Gamma, V)$ on which each cube of $\Sigma(\Gamma, V)$ is isometric to the standard unit cube in Euclidean space.

このとき、$\Sigma(\Gamma, V)$ は次の性質を持つ。

Proposition 4.2 (cf. Davis [Da2])

(1) The cubical complex $\Sigma(\Gamma, V)$ is a CAT(0) geodesic space and contractible.

(2) Let $\Gamma' \subset \Gamma$ be a torsion-free subgroup of finite index. Then $\Sigma(\Gamma, V)$ is the universal cover of an Eilenberg-MacLane complex $K(\Gamma', 1)$.

(3) $vcd_R \Gamma = \max\{i \mid H^i_c(\Sigma(\Gamma, V); R) \neq 0\}$.

ここで CAT(0) geodesic space の定義は次で与えられる。

Definition 4.3 Let (X, d) be a metric space. A path $g : [0, a] \to X$ is a *geodesic* if it is an isometric embedding, i.e., if $d(g(t), g(s)) = |t - s|$ for all $s, t \in [0, a]$. A metric space X is a *geodesic space* if any two points can be connected by a geodesic segment.

Let X be a geodesic space. For any triangle $x_0, x_1, x_2 \in X$, a triangle $x'_0, x'_1, x'_2 \in \mathbf{R}^2$ is called a *comparison triangle for* x_0, x_1, x_2 if $d(x_i, x_j) = \|x'_i - x'_j\|$ for $i, j \in \{0, 1, 2\}$. X is called a *CAT(0) space* if for every three points $x_0, x_1, x_2 \in X$ and for every point y lying on a geodesic joining x_1 and x_2, $d(x_0, y) \leq \|x'_0 - y'\|$ for corresponding comparison triangle $x'_0, x'_1, x'_2 \in \mathbf{R}^2$ and corresponding point $y' \in \mathbf{R}^2$.

CAT(0) geodesic space に対して visual sphere と呼ばれる位相空間が次のように定義される。

Definition 4.4 Let X be a CAT(0) geodesic space. For $x \in X$, the *visual sphere of X at x* is defined as $S_x(\infty) = \{g : [0, \infty) \to X \text{geodesic ray} \mid g(0) = x\}$ with the topology of the uniform convergence on compact sets.

このとき、次が成り立つ。

Proposition 4.5 (cf. Davis [Da2], Dranishnikov [Dr2]) Let X be a proper CAT(0) geodesic space. (A metric space is *proper* if every closed metric ball is compact.)

(1) A visual sphere is a compact metrizable space and X can be compactified by adding a visual sphere $S_x(\infty)$.

(2) For every $x, y \in X$, the visual spheres $S_x(\infty)$ and $S_y(\infty)$ are homeomorophic.

ここで right-angled Coxeter group の boundary を次のように定義する。

Definition 4.6 For a right-angled Coxeter system (Γ, V), the boundary $\partial\Gamma$ of Γ is defined as the visual sphere of CAT(0) geodesic space $\Sigma(\Gamma, V)$.

このとき、Coxeter group とその boundary については次が成り立つ。この Theorem は、最初 hyperbolic group に関して Bestvina-Mess [B-M] によって与えられたものである。

Theorem 4.7 (Bestvina-Mess [B-M], Dranishnikov [Dr1]) Let (Γ, V) be a Coxeter system.Then

(1) $\Sigma(\Gamma, V) \cup \partial\Gamma$ is an AR, and $\partial\Gamma$ is a Z-set in $\Sigma(\Gamma, V) \cup \partial\Gamma$

(2) $\dim_R \partial\Gamma = \mathrm{vcd}_R \Gamma - 1$ for any ring R with 1.

5 Dranishnikov の問題について

ここで Problem 1.1 について考える。まず Theorem 4.7 から、Problem 1.1 は次のように言い換えることができる。

Problem 5.1 Does there exists a Coxeter group Γ_n such that $\operatorname{vcd}\Gamma_n = n+1$ and $\operatorname{vcd}_{\mathbf{Q}}\Gamma_n = 2$?

また、right-angled Coxeter group に関する Problem 5.1 は、Theorem 3.4 と Proposition 2.5 から、さらに次のように言い換えることができる。

Problem 5.2 Does there exists a finite flag complex K_n such that

$$\max\{\operatorname{lcd}_{\mathbf{Z}} K_n,\ \operatorname{cd}_{\mathbf{Z}} K_n + 1\} = n+1 \text{ and}$$
$$\max\{\operatorname{lcd}_{\mathbf{Q}} K_n,\ \operatorname{cd}_{\mathbf{Q}} K_n + 1\} = 2\ ?$$

ここで、望む global cohomological dimension を持つ finite flag complex を構成することは容易で、例えば $\operatorname{cd}_{\mathbf{Z}} L = n$, $\operatorname{cd}_{\mathbf{Q}} L = 1$ となるような finite simplicial complex L を重心細分したものを K とすることにより、$\operatorname{cd}_{\mathbf{Z}} K = n$, $\operatorname{cd}_{\mathbf{Q}} K = 1$ をみたす finite flag complex K が得られる。しかし、重心細分したことから Proposition 3.5 より $\operatorname{lcd}_{\mathbf{Q}} K = \operatorname{lcd}_{\mathbf{Z}} K = \dim K$ となり、結局 $\max\{\operatorname{lcd}_{\mathbf{Q}} K,\ \operatorname{cd}_{\mathbf{Q}} K + 1\} = \dim K$ となる。$n = 2$ の場合に関してはこの方法で K_2 を得ることができる (Dranishnikov [Dr1]) が、$n \geq 3$ に関してはこの方法では条件をみたす K_n を得ることはできない。逆に、$n = 3$ に関しては望む local cohomological dimension を持つような finite flag complex を構成する手法が Dranishnikov [Dr1] によって与えられているが、この場合については今度は global cohomological dimension が望むようにコントロールできない状況にある。Problem 1.1 を肯定的に解くことを考えるときに、flag complex の global cohomological dimension と local cohomological dimension の両方をどのようにしてコントロールするかということが今後の課題となっている。

参考文献

[Be1] M. Bestvina, *The virtual cohomological dimension of Coxeter groups*, Geometric Group Theory Vol 1, LMS Lecture Notes **181**, 19-23.

[Be2] M. Bestvina, *Local homology properties of bundaries of groups*, Michigan Math. J. **43 (no. 1)** (1996), 123-139.

[B-M] M. Bestvina, G. Mess, *The boundary of negatively curved groups*, Jorn. of Amer. Math. Soc. **4 (no. 3)** (1991), 469-481.

[Br] K. S. Brown, *Cohomology of groups*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1982.

[Da1] M. W. Davis, *Groups generated by reflections and aspherical manifolds not covered by Euclidean space*, Annals of Math. **117** (1983), 293-324.

[Da2] M. W. Davis, *Nonpositive curvature and reflection groups*, Preprint (1994).

[Dr1] A. N. Dranishnikov, *On the virtual cohomological dimensions of Coxeter groups*, Proc. Am. Math. Soc. **125 (no. 7)** (1997), 1885-1891.

[Dr2] A. N. Dranishnikov, *Boundaries and cohomological dimensions of Coxeter groups*, Preprint (1994).

[Dr3] A. N. Dranishnikov, *Homological dimension theory*, Russian Math. Surveys **43 (4)** (1988), 11-63.

[Gr] M. Gromov, *Hyperbolic groups*, Essays in group theory (S. M. Gersten, ed) M.S.R.I. Publ. 8 (1987), 75-264.

[Hu] J. E. Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge University Press, 1990.

[Ku] V. I. Kuzminov, *Homological dimension theory*, Russian Math. Surveys **23 (5)** (1968), 1-45.