数理解析研究所講究録
1074 巻 1999 年 61-68

A space with a countable network and different dimensions —Delistathis and Watson's example

横浜国立大学工学部

玉野 研一 (Kenichi Tamano)

1 3つの次元

次元とは一体何だろうか. 方向の自由度が、直線では1つだけなので1次元、平面では2つなので2次元、空間では3つなので3次元である. 物理では私たちの時空は、空間の3次元と時間軸の1次元をあわせて4次元の世界である考える. 普通、次元という言葉を聞くとだいたいこのようなことを思い浮かべる. 例えば多様体などを考える限り、次元の概念はこれで十分なのだが、もう少し wild な図形になるとこれだけでは判定できない. そこで位相空間論では、次元の定義をちょっと抽象的ではあるが、もっと適用範囲の広いものに変える. よく使われる次元の定義に、ind (small inductive dimension = 小さな帰納的次元)、Ind (large inductive dimension = 大きな帰納的次元)、 dim (covering dimension = 被覆次元) の3つがある.

定義. 位相空間 X の部分集合 A に対し、その境界を $\mathrm{Bd}\, A$ で表わすことにする. 位相空間 X が空集合であるとき $\mathrm{ind}\, X = \mathrm{Ind}\, X = \dim X = -1$ とする. n を非負整数とする. 位相空間 X が $\mathrm{ind}\, X \leq n$ をみたすとは、任意の点 $x \in X$ と x の任意の近傍 U に対して、開集合 V で、$x \in V \subset U$ かつ $\mathrm{ind}\,\mathrm{Bd}\, V \leq n-1$ をみたすものが存在するときいう. 位相空間 X が $\mathrm{Ind}\, X \leq n$ とは、X の任意の閉集合 F と、F を含む開集合 U に対して、開集合 V で、$F \subset V \subset U$ かつ $\mathrm{ind}\,\mathrm{Bd}\, V \leq n-1$ をみたすものが存在するときいう. 位相空間 X が $\dim X \leq n$ とは、X の任意の有限開被覆 $\mathcal{U}$ に対して、ある開細分 $\mathcal{V}$ で、$\mathrm{ord}\,\mathcal{V} \leq n+1$ をみたすものが存在するときいう. ここで、$\mathrm{ord}\,\mathcal{V} \leq m$ とは、任意の点 $x \in X$ に対して x を含む $\mathcal{V}$ の要素の個数が m 個以下であるときいう.

次の定理が知られている．

定理１． X が可分距離空間のとき、$\mathrm{ind}\, X = \mathrm{Ind}\, X = \dim X$ である．

定理２． X が距離空間のとき、$\mathrm{ind} \leq \mathrm{Ind}\, X = \dim X$ である．$\mathrm{ind}\, X$ が他の２つの次元と一致するとは限らない．

定理３． 任意の部分集合が Lindelöf である空間 X に対して、$\mathrm{ind}\, X = \mathrm{Ind}\, X$ である．

2　Arkhangel'skii の問題

一般に次の問題は次元論の目的の１つである．

一般的問題． 距離空間のクラスよりも広い位相空間のクラスで、十分な次元論が展開できるようなものが存在するか．

そのような問題の一つとして Arkhangel'skii は次の問題を提起した．

問題１（Arkhangel'skii、1970年）．可算ネットをもつ空間 X に対して $\mathrm{ind}\, X = \dim X$ が成立するか？

位相空間 X の部分集合からなる族 $\mathcal{N}$ が**ネット**であるとは、任意の点 $x \in X$ と x の任意の近傍 U に対して、$N \in \mathcal{N}$ で、$x \in N \subset U$ をみたすものが存在するときいう．もし $\mathcal{N}$ が開集合からなる族であれば、これは基の定義にほかならない．$\mathcal{N}$ の要素の数が可算個のとき、$\mathcal{N}$ を可算ネットという．なぜ可算ネットをもつ空間を考えるのだろう．私たちの扱う図形は、可算基をもつ空間（＝可分距離空間）が多い．ところが、可算基をもつという性質は、もろい．ちょっとした位相的操作でくずれてしまうことがある．例えば、xy 平面を考え、x 軸を１点に縮めてできる商空間を考える．するとそれはたちまち距離空間ではなくなってしまう．また可算個の胞体からなる CW 複体は距離空間とは限らない．しかし、これらの空間が可算ネットをもつことは容易にわかる．そこで可算ネットをもつ空間での次元論が意味をもってくるのである．

最近 Delistathis と Watson は次の反例を発見した．X が可算ネットをもつ空間ならば、その任意の部分空間は Lindelöf となるので、定理３より、$\mathrm{ind}\, X = \mathrm{Ind}\, X$ となることに注意しておく．連続体仮説とは、「自然数の濃度の次が実数の濃度であ

る」という集合論的仮定である.「連続体仮説の肯定も否定も、現在の数学（ZFC 集合論）では証明ができない」ことが証明されている.

定理 4 （Delistathis, Watson [DW]）. 連続体仮説の仮定のもとで、可算ネットをもつ位相空間 X で、$\dim X = 1$ だが、$\mathrm{ind}\, X = \mathrm{Ind}\, X \geq 2$ であるものが存在する.

上の定理で、$\dim X = 0$ となる例を作ることはできない. なぜならば可算ネットをもつ位相空間は Lindelöf であり、Lindelöf 空間 X では、$\mathrm{ind}\, X = 0$、$\mathrm{Ind}\, X = 0$、$\dim X = 0$ という 3 つの性質が同値だからである. 定理 4 の証明は、Delistathis の学位論文 [D] に、詳しく載っている.

3 μ-space の問題

位相空間 X は、距離化可能である可算個の閉集合の和として表されるとき、F_σ-距離化可能であるという. 位相空間 X は、可算個のパラコンパクト F_σ-距離化可能空間の積の中に埋め込めるとき、μ-空間であるという. 位相空間 X の部分集合の族 $\mathcal{A}$ は、局所有限な可算個の族 $\mathcal{A}_n$, $n \in \omega$ をとってきて $\mathcal{A} = \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{A}_n$ と表せるとき、σ-局所有限という. 位相空間 X が距離化可能であるための必要十分条件が、σ-局所有限な基をもつことであることが知られている. σ-局所有限なネットをもつ空間を σ-空間という. 距離空間や可算ネットをもつ位相空間は σ-空間である. 次の問題がある.

問題 2 (Nagami). 被覆次元が 0 であるパラコンパクト σ-空間の閉完全写像による像は μ-空間か.

問題 3 (Tamano). パラコンパクト σ-空間は μ-空間か.

次の定理より、Delistathis-Watson の例（定理 4）は、連続体仮説のもとで、上の 2 つの問題に反例を与えることになる.

定理 5 （Mizokami). X が μ-空間ならば、$\mathrm{Ind}\, X = \dim X$ である.

連続体仮説の仮定がなくても次のように問題 2 、問題 3 の反例を構成することができる. しかし、Arhangel'ski の問題 1 の反例が連続体仮説の仮定なしに構成できるか、すなわち Delistathis-Watson の例の性質をみたす位相空間を、連続体仮説なしで作れるかどうかは未解決である.

定理5 (Tamano [T_2]). 可算ネットをもつ空間で、μ-空間でないものが存在する.

Stratifiable 空間に関する次の問題も未解決である. Stratifiable 空間は σ-空間であることに注意しておく. Stratifiable μ-空間は M_1-空間であることが知られているので、もし次の問題が肯定的に解ければ、それは古典的未解決問題の $M_3 \Rightarrow M_1$ 問題の肯定解を与えることになる.

問題4 (Mizokami, Junnila, Tamano). Stratifialble 空間は μ-空間か.

問題5. X が stratifiable ならば Ind $X = \dim X$ か.

この節について詳細に知りたい方は、[M]、[O]、[OT]、[T_1] を参照していただきたい.

4 Delistathis-Watson の反例構成のアイデア

X を平面とする (実際には、平面の部分集合を取ることになるが、どんな部分集合をとるかは後述する. しばらく X は、平面全体と考えていただいてもかまわない). X の通常のユークリッド位相を ε とし、ε よりも細かい位相 τ を構成する. (X,τ) が求めるものとしたい. 次の3つの条件をみたすように反例 (X,τ) を構成する必要がある.

(a) (X,τ) は可算ネットをもつ.
(b) ind $(X,\tau) \geq 2$.
(c) dim $(X,\tau) = 1$.

(a)、(b)、(c) の各条件を得るためにどのように τ を構成したらよいか. アイデアは以下の通りである. おおざっぱにアイデアを示そうというのが趣旨なので、省略したり誇張したりする. それらが重なり合って嘘になってしまうこともあると思うがお許しいただきたい. 原論文を読むためのヒントになれば幸いである.

(a) : xy 平面上の点は、2つの座標が共に有理数であるとき有理点という. X の異なる2つの有理点を結ぶ線分 (有理線分) 全体からなる可算族を $\mathcal{I}$ とし、X のユークリッド位相 ϵ の可算基を $\mathcal{B}$ とする. このとき、可算族 $\mathcal{N} = \mathcal{I} \cup \mathcal{B}$ がネットとなるように反例 (X,τ) を構成する.

(b) : 最終的にできる位相空間 (X,τ) での開集合は、もとのユークリッドの位相

空間 (X,ε) での開集合とそれほど変わらないようにする．新しい開集合とその閉包がもとの開集合とその閉包で近似できるようにするのである．詳しく言うと、任意の $V\in\tau$ に対して、ある $U\in\varepsilon$ で、V と U、そして $\mathrm{cl}_\tau V$ と $\mathrm{cl}_\varepsilon U$ の差が高々可算集合であるものが存在する．したがって、もとのユークリッドの位相での開集合全体を $\mathcal{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha<c}$ と数え上げ、各 $\mathrm{Bd}_\varepsilon U_\alpha$ からある種の可算集合を除いた集合の次元が 1 次元以上になるように位相 τ_α を構成し、τ を $\{\tau_\alpha\}_{\alpha<c}$ で生成される位相とする．

境界の次元を上げるには Kuratowski の方法を用いる．次節で詳しく紹介する．

(c)：各段階での位相 τ_α をだんだん細かくなるようにとっていく．すなわち $\alpha<\beta$ に対して $\tau_\alpha\subset\tau_\beta$ をみたすようにする．しかも各 (X,τ_α) の次元が 1 であるようにする（各 (X,τ_α) は可分距離空間になるので、どの次元を考えても同じである）．

このように構成すると、$\dim(X,\tau)\leq 1$ となる．なぜならば、$\mathcal{U}$ を (X,τ) の任意の有限開被覆とする．すると、(X,τ) が可算ネットをもつことから、(X,τ) の任意の開集合は、基 $\bigcup_{\alpha<c}\tau_\alpha$ の要素の可算和として表される．したがって $\{\tau_\alpha\}_{\alpha<c}$ の単調増加性より、$\mathcal{U}$ は、ある τ_α の開被覆となる．ゆえに (X,τ_α) の次元が 1 であるという仮定から、$\mathcal{U}$ に対して、τ_α の開集合からなる細分 $\mathcal{V}$ で、$\mathrm{ord}\,\mathcal{V}\leq 2$ をみたすものが存在する．

最初の出発点 (X,ϵ) も 1 次元の空間にしなければならない．それには X を、平面 R^2 から稠密な可算集合を除いた集合で、すべての有理線分を含むものとすればよい．

5　条件 (b) を実現させるためのアイデア

τ_α を構成するとき、位相 τ_α を、$\mathrm{Bd}_\varepsilon U_\alpha$ の境界からある種の可算集合を除いた集合の次元が 1 次元以上になるように構成する．そのとき、境界に含まれるカントール集合に着目し、次の Kuratowski のアイデアで、そのカントール集合の次元を高くする．

Kuratowski のアイデア（[E] Exercise 1.2 E)：

$C=\{x=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{x_i}{3^i} : x_i=0$ または $2\}$ をカントール集合とする．$f:C\to[-1,1]$ を次のように定義する．$x\in C$ に対して、$x_i=2$ をみたす i を小さいものから順番に $i_1<i_2<i_3<\cdots$ とする．このとき、$f(x)=\frac{(-1)^{i_1}}{2^1}+\frac{(-1)^{i_2}}{2^2}+\cdots$ と定義する．そこで f のグラフ $G(f)$ と C を自然な一対一対応で同一視し、ユークリッド平面の部分空間としての $G(f)$ の位相を C に導入し、その位相空間を (C,ρ) とする．このとき、次のことが成立する．

1. ε をカントール集合の通常のユークリッド位相とするとき、$\varepsilon \subset \rho$.

2. (C,ρ) は、可分距離空間である.

3. (C,ρ) の位相が (C,ε) と異なるのは可算個の点のまわりだけである.

4. $\dim\,(C,\rho) = 1$ である.

τ_α の構成：

$\bigcup_{\beta<\alpha}\tau_\beta$ で生成される X の位相を τ' とする．もし、$\dim_{\tau'}\mathrm{Bd}_{\,\varepsilon}\, U_\alpha = 0$ だとすると、τ_α を次のように構成する（そうでないときは、$\tau_\alpha = \tau'$ とする）.

Bd $_{\varepsilon}U_\alpha$ の可算部分集合 D_α で、その各点がそれぞれ、ある有理線分にのっていて、しかも cl $_{\varepsilon}D_\alpha$ がカントール集合 C_α となるものをとる．そして、C_α に、上の例の Kuratowski の位相を導入する．その位相は、D_α の点以外では、(X,τ') の位相と一致しているようにできる．したがって、その位相を下の図のように X 全体に拡張して、新しい位相 τ_α を得ることができる.

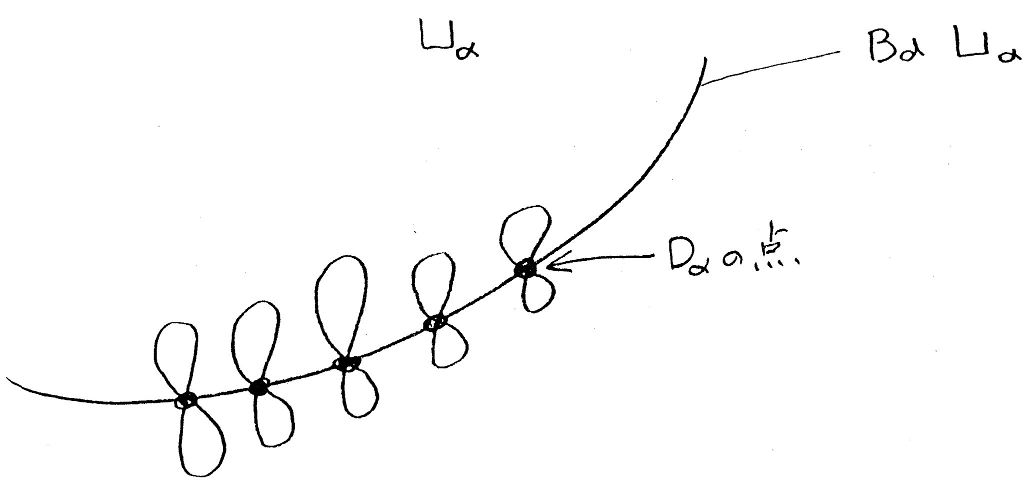

図 1

最後に、どこで連続体仮説を用いたかについて説明しておこう.

1. 途中の位相 (X,τ_α) を可分距離空間にするために用いた..

2. 途中の位相 (X, τ_α) が可算個の点を除いてユークリッド位相と同じにするために用いた.

3. Kuratowski の方法で、0 次元のカントール集合が 1 次元になってしまうのは、D_α の任意の点 x に、D_α のある種の点列 $\{x_m^\alpha\}$ が収束していることがその理由である. したがって、τ_α を構成するときに、$\beta < \alpha$ に対してあった収束点列 $\{x_m^\beta\}$ の少なくとも部分列がやはり x に収束しているようにする必要がある. そこで、彼らは、今まで取った収束点列、すなわち、$\{x_m^\beta\}$, $\beta < \alpha$ が可算個で押さえられるという要請をした. そうすれば、うまく可算個の点列のそれぞれから少しずつ点をとって全体としてやはり収束点列になるように作り替えられ、その点列が x に収束するように位相 τ_α をうまく構成できるのである.

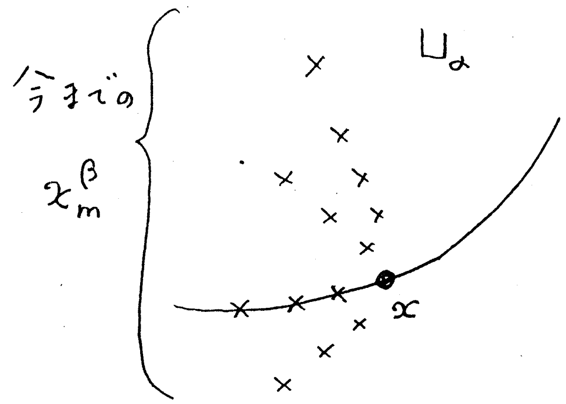

図 2

参考文献

[D] G. Delistathis, A regular space with a countable network and different dimensions – Compact spaces with few regular open Baire subsets, Ph.D. thesis, 1996, York University.

[DW] G. Delistathis and S. Watson, A regular space with a countable network and different dimensions, to appear in Trans. Amer. Math. Soc.

[E] R. Engelking, Theory of Dimensions, Finite and Infinite, 1995, Heldermann Verlag, Germany.

[M] T. Mizokami, On the dimension of μ-spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 83 (1981), 195–200.

[O] S. Oka, Dimension of stratifiable spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 275 (1983), 231–243.

[OT] H. Ohta, K. Tamano, Perfect images of zero-dimensional σ-spaces, Kobe J. Math. 7 (1990), 89–108.

[T_1] K. Tamano, Generalized metric spaces II, in Topics in General Topology, K. Morita, J. Nagata eds, North-Holland, Amsterdam-New York-Oxford, 1989.

[T_2] K. Tamano, A cosmic space which is not a μ-space, August 1997.