

Rotational form の打ち切り誤差と回転チャネル流

Truncation error of Rotational form and rotating channel flow

堀内 潔 (東工大工) 伊丹 隆夫 (東工大院)

Kiyosi HORIUTI and Takao ITAMI

Dept. of Mechano-Aerospace Eng., Tokyo Institute of Technology, O-okayama, Meguro-ku, Tokyo 152, Japan

Rotational and conservative (Skew-symmetric) forms for the nonlinear terms in the discretized Navier-Stokes equation are compared in the direct numerical simulation (DNS) of turbulent channel and mixing layer flows. Noticeable differences were found in these two form results, i.e., a relaminarization of turbulence occurred in the channel flow when the Rotational form was used combined with a lower-order finite difference method, whereas the turbulence was sustained in the Skew-symmetric form.¹⁾ It is shown that a large truncation error arising in the Rotational form behaves similarly as the Coriolis force term in the budget of the turbulent shear stress on the suction side of the rotating channel. It is further shown that this large truncation error can be eliminated by using the consistent scheme.^{4,5)} In the mixing layer, the difference in the two form results was not significant.

1. 緒 論

Navier-Stokes方程式は、運動量、運動エネルギーといった保存量をもつが、離散近似をする際にもこの性質を保持することが望ましい。こうした保存型スキームとしては、Skew symmetric型とRotational型が良く知られている。Horiuti¹⁾は、チャネル流のLES計算において、Rotational型を用いた場合、乱流の層流化現象が発生することを示した。しかしながら、LESでの検証ではSGSモデルとの相互作用も影響している可能性も否めない。そこで、本研究の目的は、さらに混合層も含めたDNS計算において両者の型の比較を行い、より詳細な解析を行う点にある。

2. 基礎方程式および計算方法

基礎方程式は、以下に示すNavier-Stokes方程式(1)と連続の式(2)である。

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2)$$

計算における離散化手法としてはチャネル流、混合層いずれにおいても、流れ方向(x)とスパン方向(z)にaliasing誤差を除去する擬スペクトル法を、y方向には3次精度不等間隔差分法 (CASE1,式(3))、

$$\frac{\partial u}{\partial y_K} = \frac{h_K}{(h_{K+1}+h_K)h_{K+1}} u_{K+1} + \frac{h_{K+1}-h_K}{h_{K+1}h_K} u_K - \frac{h_{K+1}}{(h_{K+1}+h_K)h_K} u_{K-1} \quad (3)$$

2次精度不等間隔差分法 (CASE2) および後述のconsistent schemeを用いる。ここで $\delta/\delta y$ は差分法によるy方向の離散化を表す。また時間前進には非線形項と圧力項に2次精度Adams-Bashforth法を、粘性項には2次精度Crank-Nicolson法を用いた。チャネル流では、完全に発達した乱流状態での壁面摩擦速度 $u_{\tau 0}$ とチャネル半値幅 δ にもとづくレイノルズ数を180とし、格子点数はx,y,z方向に各々128,129,128とした。また初期条件は完全に発達した乱流状態とした。境界条件はx,z方向には周期境界条件を、y方向には壁での粘着条件を適用した。混合層では、層の上端と下端における速度差と初期運動量厚さにもとづくレイノルズ数を200、格子

点数は192×127×128とした。y方向の境界条件はfree slipとした。

非線形項の離散近似型には、運動量および全運動エネルギーを保存する近似型として、Skew symmetric型((4)式) およびRotational型 ((5)式) を考慮した。

$$\frac{1}{2} \frac{\delta(u_i u_j)}{\delta x_j} + \frac{1}{2} u_j \frac{\delta u_i}{\delta x_j} \quad (4)$$

$$u_j \left(\frac{\delta u_i}{\delta x_j} - \frac{\delta u_j}{\delta x_i} \right) + \frac{1}{2} \frac{\delta(u_j u_j)}{\delta x_i} \quad (5)$$

計算結果の型依存性を明示するために、チャネル流では、上半分にSkew symmetric型を、下半分にRotational型を用いた計算 (以下Mixed form) を行った。混合層では2つの近似型を用いた計算を別々に行った。

3. 計算結果および考察

3.1 チャネル流 図1は、CASE1における壁面摩擦速度の時間発展を示すが、下側の壁で減少しており層流化が起きているのに対し、上側の壁では乱流が維持されている。層流化に伴い、チャネル下半分では、乱流強度が減少するが、この傾向は、図2の垂直成分で顕著であった。図3はせん断応力 $\langle u'v' \rangle$ の収支式中のvelocity-pressure gradient(vpg)項のy分布であるが、Rotational型はSkew symmetric型と定性的に全く異なる分布を示す。図2に見るとおり、CASE2の結果は、CASE1とほぼ同一であった。

解析の結果このチャネル流での近似形による結果の相違は、Rotational型の壁の近くでの差分法による打ち切り誤差に原因していることが分かった。同型の打ち切り誤差中の主要項は、(5)式の $i=2(y)$ 成分中に生ずる項

$$-u \frac{\delta u}{\delta y} + \frac{1}{2} \frac{\delta u^2}{\delta y} = \frac{h_K h_{K+1}}{3!} \left\{ 3 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right\} \quad (6)$$

である。この誤差がsource項となり、図3で見えるような圧力分布に大きな差異が生じた。この誤差項のせん断応力 $\langle u'v' \rangle$ 収支式中での分布を図4 (error) に示すが、壁近傍で大きな値をとり、図3中のvpg項に対応する項となっている。Horiuti¹⁾で指摘されたように、Skew

symmetric型では、こうした大きな打ち切り誤差は発生しない。さらに、式(6)が乱流強度の非等方表現モデルの2次項²⁾に相当することを考慮し、回転チャンネル流でのコリオリ項

$$-2\Omega(u^2 - v^2) \quad (7)$$

と比較すると(図4)、両者は定性的に一致している(ここで $\Omega=0.45$ とした)。従って、Rotational型で見出された層流化現象は、回転チャンネルのsuction側での層流化現象³⁾と相似であることが示された。実際、図1中に含めた回転チャンネルでの壁面摩擦速度の変化は、下の壁において、Mixed formの結果とほぼ一致している。

(6)の大きな打ち切り誤差は、離散近似をした場合、微分演算の交換性が必ずしも成立しないことに原因している。この欠点を解消する近似型として、Rotational型((6)式)の第1項にconsistent scheme^{4,5)}((8)式)を適用した。

$$\begin{aligned} \left(u \frac{\delta u}{\delta y}\right)_K &= \frac{1}{2} \left(\left(u \frac{\delta u}{\delta y}\right)_{K+\frac{1}{2}} + \left(u \frac{\delta u}{\delta y}\right)_{K-\frac{1}{2}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{u_{K+1} + u_K}{2} \frac{u_{K+1} - u_K}{h_{K+1}} + \frac{u_K + u_{K-1}}{2} \frac{u_K - u_{K-1}}{h_K} \right) \end{aligned} \quad (8)$$

図3には、この場合のvpg項の分布も含めたが、Rotational型で生じた負のピークは解消され、層流化の発生も防げることが分かった。

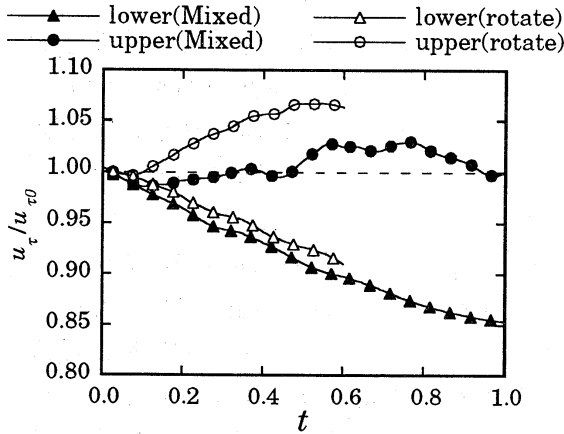


Fig.1 Time development of the wall friction velocity

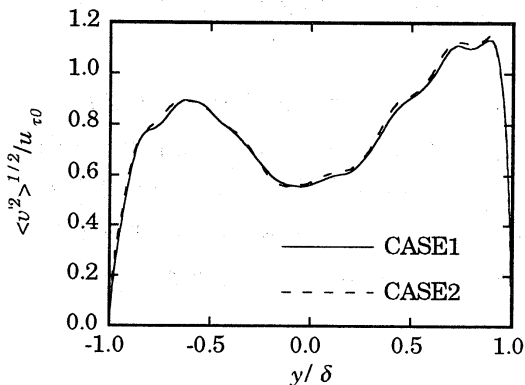


Fig.2 Normal turbulence intensities

3.2 混合層 混合層の計算においては、Skew symmetric型とRoataional型の計算結果に有為な差は見出されなかった。これは、混合層におけるShear rateがチャンネル流に比べかなり小さいため、打ち切り誤差の影響が小さいためと考えられる。

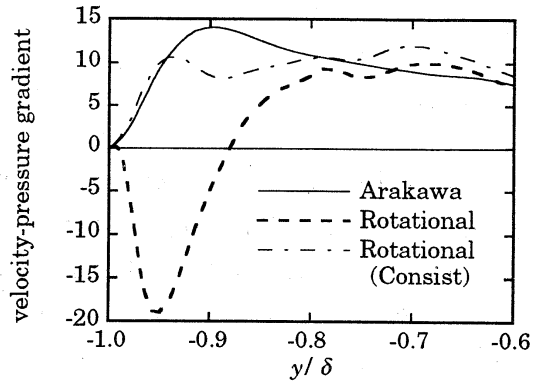


Fig.3 y-distribution of velocity-pressure gradient terms

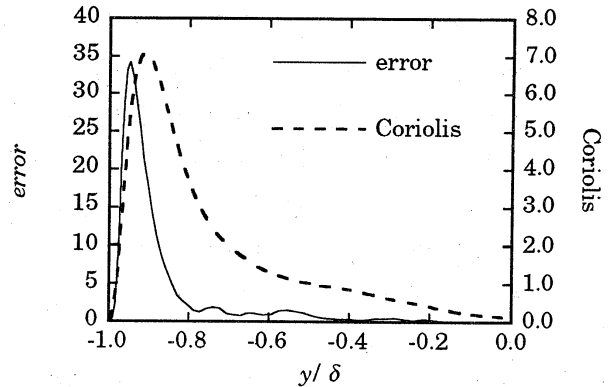


Fig.4 y-distribution of error and Coriolis terms

4. 結 論

Navier-Stokes方程式の非線形項の近似型にRotational型を低次精度の差分法と併用することにより生じるチャンネル乱流での層流化現象は、打ち切り誤差が原因であり、その物理的な効果は回転チャンネルでのコリオリ力の効果と定性的に相似であることを、その誤差解析により示した。さらに、Rotational型におけるこの大きな打ち切り誤差は、微分演算の交換性を保証するconsistent schemeを用いることにより、消去できることを示した。詳細はHoriuti et al.⁶⁾を参照されたい。

引用文献

- 1) K. Horiuti : *J. Comput.Phys.* **2**(1987) 343.
- 2) K. Horiuti : *Phys.Fluids A* **2**(1990) 1708.
- 3) R. Kristoffersen & H. I. Andersson : *J. Fluid Mech.* **256** (1993) 163.
- 4) 梶島,対流項の差分形式とその保存性,日本機械学会論文集B編**60-574**(1994) 2058.
- 5) 鈴木,河村,乱流の数値シミュレーションにおける差分式の整合性,日本機械学会論文集B編**60-578**(1994) 3280.
- 6) K. Horiuti and T. Itami: submitted to *J. Comput.Phys.* (1997).