

球殻テイラー流の遷移の諸問題¹

岡山理科大工 荒木圭典
岡山大工 柳瀬眞一郎
同志社大工 水島二郎

1 球殻 Couette 流の概観

これより同軸回転する同心球殻²間の流れ (球殻 Couette 流) の遷移の研究を、筆者の知る範囲内において概観する。

遷移についての実験的・理論的研究の紹介の前に、同心二重円筒間の流れ (Taylor-Couette 流) との対比において、いくつかの一般的な注意をする。まず系のパラメーターであるが、アスペクト比 $\beta = (r_2 - r_1)/r_1$ と Reynolds 数 $Re = \Omega r_1^2/\nu$ の二つ³である。ここで r_1, r_2 は各々外球、内球の半径、 Ω は内球の回転角速度⁴、 ν は動粘性係数である。特に注意すべき点は、アスペクト比 β は系の幾何学的形状のパラメーターであり、 β の値によって流れの遷移の振る舞いは定性的に全く異なっている。したがって同一の Reynolds 数であっても相似則は成り立たない。

流れの遷移の定性的な性質がアスペクト比に依存することは、これまで実験的な研究において明らかにされてきた (例えば Egbers and Rath[8] に遷移のダイアグラムがレビューされている)。直観的には、流体層が薄い (アスペクト比が大きい) 場合には、同軸円筒間の流れの振る舞いに漸近されることが期待される。実験的にも、最初の分岐は軸対称な Taylor 渦が赤道付近に形成されることが観察されている (例えば Büler のレビュー [5] を参照)。

しかし球殻の厚みの増大 (アスペクト比 β の低下) に伴い、この Taylor 渦の形成は起こりにくくなる。実験的にはアスペクト比 $\beta \sim 0.24$ 程度の間隙を境にして、球殻の厚い領域では 0-渦解から非軸対称な流れへの直接の遷移が観察されている [3]。(数値的にも軸対称な Taylor 渦解の存在が、やはり同じ程度の β の領域までしか存在できないことが示されている [20]。)

次に最初の遷移の数値計算の上で重要になる、低 Reynolds 数の場合の流れの振る舞いについて述べる。実験的にはアスペクト比に依らず、赤道面を境にして南北に一つずつの大きな循環流が形成されることが知られている [8]。この場合の非圧縮 Navier-Stokes 方程式の厳密解についてだが、Taylor-Couette 流の場合には、Reynolds 数が低い場合には、境界条件を満たす Stokes 流が安定な厳密解として存在する。しかし球殻 Couette 流は系の形状が球殻である事より、Stokes 流を厳密解として持たない。というのも直観的に言えば、東西方向の流れは自らの遠心力によって、球殻に沿った南北の流れを誘導する。その結果、南北方向には赤道面で上昇、北極・南極において下降流となる大規模な Taylor 渦が各半球に一つずつ形成される。この流れは Navier-Stokes 方程式の定常非線形平衡解であり、その解析的な表式は未だに与えられていない。Araki *et al.*[2] の $\beta = 0.5$ における計算結果

¹ 講演時表題は『球殻テイラー・クエット流の乱流遷移』。この文章の責任は荒木にある。

² これ以降、回転軸を「北極・南極」、回転軸に対して垂直な方向を「東西」と表現することにする。

³ 本報告においては外球殻は静止している場合を取り上げて考えることにする。

⁴ 本報告では、外球が静止している場合を考えている。

を見ると、臨界値の近傍ではこの渦は Stokes 解で近似できない構造 (内殻近傍でのせん断層など) を持っている。これ以降、この渦を Marcus and Tuckerman[14] にならい「0-渦解」と呼ぶ。

したがって遷移における流れの安定性を「近似や予断を入れずに (*ab initio*)」計算する場合には、まず Reynolds 数毎に主流を数値的に計算しておく必要がある。この主流の非線形性が球殻 Couette 流の解析を困難にしている大きな原因のひとつである。

2 広間隙 Couette 流の遷移

広間隙 Couette 流の遷移の研究は、Belyaev, Yavorskaya らのグループによって精力的に研究された [3, 22]。まず、軸対称な 0-渦状態から非軸対称ならせん渦への遷移が観測されている。このらせん渦は、ある特定の位相速度を持って、内球の回転方向と同一の方向へと進行する定常進行渦流である。このらせん渦の状態よりさらに Reynolds 数が上昇するにつれて、カオス的な流れへの遷移が観測されており、その遷移の Reynolds 数に対する依存性や流れの諸性質の定量的な研究が $\beta = 1.006$ の場合に報告されている [4]。

Munson らはエネルギー法 [15] および線形安定性 [16] に基づく解析を $\beta = 1$ の場合に行った。しかし求められた臨界値 ($Re = 90$) は実験的に観測された値 ($Re = 450$) [4] よりかなり低い値⁵となっている。広間隙 Couette 流の最初の遷移に対する解析的・数値的な研究は、これらの研究以降しばらく進展がなかったように見受けられる。Araki et al. はこの問題に対して、Navier-Stokes 方程式に対する *ab initio* 計算を行い⁶、アスペクト比 $\beta = 0.5$ の場合に Egbers and Rath の実験結果 ($Re_c = 1244$) [8] と良く合う臨界 Reynolds 数 ($Re_c = 1245$)、らせん渦の数 (5 組)、および位相速度を得た [2]。

Araki et al. の数値計算より、最初の分岐とその数値計算に関するいくつかの重要な知見が得られた。まず第一に、線形安定性解析の範囲内の定式化で、不安定モードの解析をしたにもかかわらず、臨界 Reynolds 数の一致が良い。このことよりこの遷移は超臨界 (もしくは線形と非線形の臨界点の値が極めて近い亜臨界) 分岐であることが推測される。したがってこの不安定性に伴う非線型ダイナミクスは、中立モードの空間への射影 (「動的縮約」、文献 [11] 参照) によって十分に良く近似されることが期待できる。超臨界状態における線形不安定モードの位相速度と、実験によって観測されたらせん渦の進行速度の良い一致は、この力学的描像を裏書きしているものと考えられる。したがって広間隙球殻 Couette 流の最初の不安定化は、分岐理論の枠組みの中で考えると、実験で観測される構造と線形安定モードの一致より、余次元 1 の超臨界 Hopf 分岐であると結論される。

分岐の基本的な性質については、対称性の観点からいくつかの結論を詳細な解析なしで得ることができる。まず軸対称な主流が不安定化することより、不安定モードは東西方向に対する軸対称性 ($O(2)$ 対称性) を破る分岐となる。このことから線形不安定モードは、

⁵エネルギー法は安定性の十分条件を求めるので、一般に線形安定性解析よりも低い臨界値を与えることが知られている。(エネルギー法の概略については文献 [10, 21] を参照。) この低い臨界値は Henningson らの optimal disturbance 解析の結果 [19] を見ると、線形安定ではあるが過渡的には (代数的に) 成長・増幅するモードが存在するか否かの臨界値となっているようである。

⁶主流に関しては、実験的に観測されている軸対称性を仮定したが、それ以外の仮定や近似、例えば Stokes 解からの漸近展開などは、一切用いなかった。攪乱については系の対称性よりフーリエモード毎に分離した以外は仮定を設けなかった。

函数空間における $O(2)$ 群の既約表現であるフーリエモードごとに分離される⁷。また系の鏡像対称性が破れているので、Hopf 分岐が生じることが期待される⁸。このような鏡像対称性の破れに伴う Hopf 分岐は、この系にとどまらない。例えばコリオリ力が働く場合の熱対流の場合の、 $SO(2)$ 対称性を破る分岐には一般的に見られるようである (例えば文献 [1, 6] を参照)。

次に不安定攪乱の空間的構造と、それを求めるための数値解析上の諸問題について述べる。文献 [2] で明らかにしたように、線形安定問題に伴う固有値問題を精度よく解くためには、かなり細かい空間解像度を必要とする。その理由は、不安定攪乱のみならず、主流の 0-渦状態にも空間的に局在した構造を持つからである。臨界 Reynolds 数の近傍における主流の構造は、Stokes 解とは大きく異なり、(1) 内球の近傍に強いせん断層が形成される、(2) 赤道面上に球殻の厚みの幅にわたって東西方向の (1) と同程度の振幅を持つせん断層が形成される、という特徴を持っている。不安定攪乱の空間構造も、主流の赤道せん断層構造に対応した部分に強い振幅を持ち、その外側に実験と同様ならせん状の構造を形成している。この構造の観察をもとに、この遷移は赤道面でのせん断層の TS 波的な不安定化によって生じ、その振動が Rossby 波的に両極へ向かって伝播し、実験的に観察されているらせん渦が生成されているのではないか、というシナリオをわれわれは提示した。

さてこの節を「失敗」に学びつつ締めくくろう。われわれの数値計算の結果、アスペクト比 $\beta = 0.5$ の場合、臨界 Reynolds 数は $Re = 1244$ 、形成されるらせん渦の数は 5 組であるにもかかわらず、空間解像度が粗いうちは 1 組のらせん渦のモードが最も不安定となるという、「誤った」結果を与えることが判った。ここで「誤った」と括弧書きにした理由は、定量的には誤っていても、数値解析から与えられる分岐のトポロジカルな構造についての情報 (超臨界 Hopf 分岐) は全くおなじであるからである。このことは「少数自由度力学系の解のトポロジー」の観点は、われわれの「流体力学的な」関心 (臨界 Reynolds 数や不安定化の機構) に対し有効な回答を、必ずしも与えないということである。

また手法が *ab initio* であっても、計算機資源の限界に突き当たって正しい答から遠ざかる、という場合もある。現在、実験の方が格段に多くの定量的・定性的な情報を集める事に成功し、理論はやや「後追い」状態になっている。しかしわれわれの計算は、従来実験的な報告がなされていなかった境界層やせん断層の存在を指摘している。この事実は、実験においても、遷移の過程の機構のかぎとなる部分を、ひょっとするとまだいくつも見逃しているのではないか、ということを示唆している。

3 狭間隙球殻 Couette 流の遷移

狭間隙 Couette 流の流れの Reynolds 数依存性や形成される渦構造については、中林の系統的な諸研究 (文献群 [18] に挙げたものは日本語で手に入る)。解の多様性の詳細な記述

⁷Araki *et al.*[2] の数値計算においてもこの性質は利用されている。

⁸というのも、もし系が鏡像対称ならば、東向きの位相速度を持つモードがあれば、対称性より西向きのモードも必ず存在しなくてはならない。これは不安定モードが、もし時間に依存する性質を持つならば、「定在波」的な性質を持たねばならないことを示しているが、主流が軸対称なので振動的な不安定性を起こす機構が物理的に存在せず、熊手型分岐が生ずるように思われる。

逆に鏡像対象性が破れていれば、この対称性に関する拘束が取れるので、一定の位相速度をもつ定常進行するパターンが許容される。

は、むしろ狭間隙の場合の方が充実している。実験の結果を見ると、Taylor 渦の構造は全領域で均一ではなく、むしろいくつかの際だった特徴を持つ領域毎に分解できるような印象を与える。

狭間隙 Couette 流の最初の分岐は軸対称な流れの間の遷移である。この遷移の軸対称な非線形解の間の分岐に関しては、Marcus and Tuckerman, Mamun and Tuckerman[14, 13] に詳しい数値的研究がある。最初の分岐に伴う流れの変化は、南北反対称なモードによる不安定化が生じ、南北に非対称な渦が成長し、最終的に 1 渦解と呼ばれる南北対称な解へと遷移していく、というものである。数値的には、この南北非対称なモードの不安定化は、非対称な解への熊手型分岐を伴っている。しかしこの分岐の枝は解としては線形不安定なので、実験的には生じない。

この分岐のトポロジカルな性質に関する議論は Manneville らの仕事がある [12]。彼らは分岐のトポロジカルな性質を説明するために、少数自由度の力学的モデルを導いている。彼らの方法の問題点は、分岐の定性的な性質を後づけてはいるが、なぜその分岐にならなくてはならないかについてのアприオリな評価が欠けている点にある。すなわち、遷移を引き起こす物理的な過程に関する情報をほとんど含んでいない。より具体的には、球殻 Taylor 渦は赤道付近にのみ現れるという特徴を捨象してしまっている。分岐理論の基本的枠組みを構成した系を考えると、パターンの点から言えば、ほとんど並進対称なモードのみが対象になっており、系の形状が問題になることはなかった。(これに関しては Faraday 共鳴のパターンの研究において、系の形状がパターンに影響を与えない例が教訓的であろう [7]。) 球殻 Couette 流の遷移の研究においては、これまで分岐理論が捨象した要素が問題になっている。

最近、Nakabayashi[17] は Reynolds 数を上げていくに連れて、解がカオス的な振る舞いから、一転して定常な状態に遷移することを見いだした。このような「再層流化」現象も、力学系の次元を考えると従来の分岐の枠組みに入りそうである。

4 まとめの代わりとして

球殻 Couette 流は Reynolds 数、アスペクト比に応じて多様な解を持つ。多様性を持つということは博物学的な側面を持たざるを得ないことに他ならない。

ここではパラメータを変化させたときの変化を、たとえば「倍周期カスケードによるカオス化」といった単線的な記述、すなわち単一のシナリオに落として整理してしまうことは期待できない。この多様性に対して理論的・数値的なアプローチは一体どのような研究戦略を採ることができるのであろうか。

現在、equivariant unfolding に基づく分岐の記述の主要な関心は、数学的に可能な力学系の「分岐パラメータをアルファベティカルに用いた」解の分岐の地図的・百科事典的な記述にあるように、思われる(少なくとも端目には見える)。しかし定性的な力学系的構造と分岐ダイアグラムの変化の博物学的記述で足りるのであろうか。

ここでわたくしが問題としたいことは、分岐の記述がややもすると「博物学的」に過ぎ、物理学のもつ「演繹的な性格」からかけ離れていることではない。そうではなく、流体力学的な関心が常にそこに向いている「定量性への欲求」と現実の解の多様性との間をどのように理論的に「取り持つべきか」という課題の前にたたずんでいるということなのだ。

球殻の厚みに依らず、軸対称な 0-渦解からの最初の分岐の課題に対してさえ、定量性を追求すれば ab initio 計算が必要になる。もちろんそれは定量性への要求と、力学系のトポロジカルな構造よりは、流れの(局所的 / 大域的)構造の形成の力学、および(応用面では)エネルギー収支やトルクのパラメーター依存性に関心があるからだ。これら実験的に発見される解の多様性に対して、理論・数値解析の側からは、どのようなアプローチを考えることが出来るのであろうか。ab initio 計算を行い、自然を計算機の中で追体験するより無いのであろうか。

参考文献

- [1] Alonso, A., Net, M., and Knobloch, E., "On the transition to columnar convection", *Phys. Fluids*, **7** (1995) pp.935-940.
- [2] Araki, K., Mizushima, J., and Yanase, S., "The nonaxisymmetric instability of the wide-gap spherical Couette flow", *Phys. Fluids*, **9** (1997) pp.1197-1199.
- [3] Belyaev, Yu. N., Monakhov, A. A. and Yavorskaya, I. M., "Stability of spherical Couette flow in thick layers when the inner sphere revolves", *transl. Izv. Akad. Nauk. SSSR, Mekh. Zhid. i Gaza*, No.2, pp.9-15, March-April, 1978.
- [4] Belyaev, Yu. N., and Yavorskaya, I. M., "Transition to stochasticity of viscous flow between rotating spheres", in *Nonlinear Dynamics and Turbulence*, Ed. Barenblatt, G. I., Iooss, G., and Joseph, D. D., (Pitman advanced publishing program, Boston, 1983); "Spherical Couette flow: transitions and onset of chaos", *transl. Izv. Akad. Nauk. SSSR, Mekh. Zhid. i Gaza*, No.1, pp.10-18, January-February, 1991.
- [5] Büler, K., "Symmetric and asymmetric Taylor vortex flow in spherical gaps", *Acta Mech.*, **81** (1990) pp.3-38.
- [6] Ecke, R. E., Zhong, F., and Knobloch, E., "Hopf bifurcation with broken reflection symmetry in rotating Rayleigh-Bénard convection", *Euro. Phys. Lett.*, **19** (1992) pp.177-182.
- [7] Edwards, W. S., and Fauve, S., "Parametrically excited quasicrystalline surface waves", *Phys. Rev. E*, **47** (1993) pp.R788-R791.
- [8] Egbers, C., and Rath, H. J., "The existence of Taylor vortices and wide-gap instabilities in spherical Couette flow", *Acta Mech.*, **111** (1995) pp.125-140.
- [9] Golubitsky, M., Stewart, I., and Schaeffer, D. G., *Singularities and Groups in Bifurcation Theory* (Springer, New York, 1988) vol.II.
- [10] Joseph, D. D., *Stability of Fluid Motions*, Vol.I and Vol.II, (Springer, Berlin, 1976).
- [11] 蔵本由紀, 森肇, 「散逸構造とカオス」(岩波講座「現代の物理学 15」), (岩波書店, 東京, 1994).

- [12] Manneville, P., and Tuckerman, L. S., "Phenomenological modelling of the first bifurcations of spherical Couette flow", J. Phys., **48** (1987) pp.1461-1469.
- [13] Mamun, C. K., and Marcus, L. S., "Asymmetry and Hopf bifurcation in spherical Couette flow", Phys. Fluids, **7** (1995) pp.80-91.
- [14] Marcus, P. S., and Tuckerman, L. S., "Numerical simulation of spherical Couette flow, Part 1", J. Fluid Mech., **185** (1987) pp.1-30, "ibid, Part 2. Transitions", J. Fluid Mech., **185** (1987) pp.31-65.
- [15] Munson, B. R., and Joseph, D. D., "Viscous incompressible flow between concentric rotating spheres. Part2. Hydrodynamic stability", J. Fluid Mech., **49** (1971) pp.305-318.
- [16] Munson, B. R., and Menguturk, M., "Viscous incompressible flow between concentric rotating spheres. Part3. Linear stability and experiments", J. Fluid Mech., **69** (1975) pp.705-719.
- [17] 中林功一, 「球ケット系の層流 - 乱流遷移と渦の挙動」, 数理研研究会「回転流の数理」(1998); 機論 **B63**(1997)3499-3504.
- [18] 中林、機論 **42**(1976)1839-1848; 中林、機論 **42**(1976)3451-3458; 中林ら、機論 **B47**(1981)297-306; 中林ら、機論 **B48**(1982)238-244; 中林ら、機論 **B48**(1982)610-618; 中林、大森、機論 **B49**(1983)1329-1337; 中林、機論 **B50**(1984)11-18; 中林ら、機論 **B52**(1986)1456-1462; 中林ら、機論 **B52**(1986)1463-1469; 中林、土田、機論 **B52**(1986)2787-2793; 中林、土田、機論 **B53**(1987)60-65; 中林、機論 **B55**(1989)624-630; 中林、土田、機論 **B55**(1989)2568-2573; 中林、鄭、機論 **B55**(1989)2574-2579; 中林、鄭、機論 **B57**(1991)2924-2930; 中林ら、機論 **B58**(1992)698-705; 中林、鄭、機論 **B58**(1992)2080-2086:
- [19] Reddy, S. C., Schmid, P. J., and Henningson, D. S., "Pseudospectra of the Orr-Sommerfeld operator", SIAM J. Appl. Math., **53** (1993) pp.15-47; Reddy, S. C., and Henningson, D. S., "Energy growth in viscous channel flows", J. Fluid Mech., **252** (1993) pp.209-238; Schmid, P. J., and Henningson, D. S., "Optimal energy density growth in Hagen-Poiseuille flow", J. Fluid Mech., **277** (1994) pp.197-225;
- [20] Schrauf, G., "The first instability in spherical Taylor-Couette flow", J. Fluid Mech., **166** (1986) 287.
- [21] Straughan, B., *The Energy Method, Stability, and Nonlinear Convection*, (Springer, New York, 1992).
- [22] Yavorskaya, I. M., Belyaev, Yu. N., and Monakhov, A. A., "Experimental study of a spherical Couette flow", Sov. Phys. Dokl., **20** (1975) pp.256-258; Yavorskaya, I. M., Belyaev, Yu. N., and Monakhov, A. A., "Stability investigation and secondary flows in rotating spherical layers at arbitrary Rossby numbers", Sov. Phys. Dokl.,

22 (1978) 717; Yavorskaya, I. M., Astaf'eva, N. M., and Vvendenskaya, N. D., "Stability and nonuniqueness of liquid flow in rotating spherical layers", Sov. Phys. Dokl., **23** (1978) pp.461-463