数理解析研究所講究録
1076 巻 1999 年 107-118

Nonexistence of branch points of large H-surfaces spanning a Jordan curve

名古屋大学大学院多元数理科学研究科

笹原 康浩 (Sasahara, Yasuhiro)

1. Introduction

$\Gamma\subset\mathbf{R}^{3}$: を長さ有限な有向単純閉曲線, $H>0$ が与えられた時、これを張る定数平均曲率 H となる曲面を考える。

以下では、種数 0 の場合のみを考える。

$B=(B, dz)=\left(\{(x, y)\in\mathbf{R}^{2};\ |x|^{2}+|y|^{2}<1\}, dx+idy\right)$,

$\mathcal{C}(\Gamma)=\{\gamma\in C(\partial B, \mathbf{R}^{3});\text{weakly monotone parameter of }\Gamma.\}$ とする。

このとき、$u:B\to\mathbf{R}^{3}$ が次の (H)(P) を満たすなら、$\Sigma=u(B)$ が求める曲面を与える。

(H) $$u_{z\bar{z}}=2Hu_{z}\wedge u_{\bar{z}}\quad \text{in } B.$$

(P) $$\begin{cases}(u_{z}, u_{\bar{z}})_{\mathbf{C}}=0 & \text{in } B,\\ u|_{\partial B}\in\mathcal{C}(\Gamma).\end{cases}$$

ここで $\bar{d}z$ は dz の共役形式であり、$v_{z}, v_{\bar{z}}$ は $(dz, \bar{d}z)$ の双対基底 $(\partial_{z}, \partial_{\bar{z}})$ による v の偏微分を表す。

汎関数 $E : H^1(B;\mathbf{R^3}) \to \mathbf{R}$ を

$$E(v) = \frac{i}{2}\int_B |v_z|^2 + |v_{\bar{z}}|^2 dz \wedge d\bar{z} + \frac{2iH}{3}\int_B v \cdot (v_z \wedge v_{\bar{z}}) dz \wedge d\bar{z}$$
$$= D(v) + 2HV(v)$$

と定めると $\gamma_0 \in \mathcal{C}(\Gamma) \cap H^{\frac{1}{2}}(\partial B;\mathbf{R^3})$ に対し、E の

$$H_{\gamma_0} = \{v \in H^1(B;\mathbf{R^3}); v|_{\partial B} = \gamma_0.\}$$

における臨界点は Dirichlet 条件

$$\text{(D)} \qquad u(1,\theta) = \gamma(\theta).$$

を満たす (H) の解となる。

Small solution の存在

'70 年に Hildebrandt は $|H|\|\gamma\|_{L^\infty} < 1$ という条件のもとで $H_\gamma \cap \{\sup|v| < |H|^{-1}\}$ における最小化元として得られる解の存在を示した。

また、'72 年に Steffen は $\inf_{H_\gamma} D < \dfrac{2\pi}{3H^2}$ のとき、$H_\gamma \cap \{D(v) < 5\inf D\}$ における最小化元として解が得られることを示した。

この二つはいずれも E の H_γ における極小点となっており、どちらも small solution と呼ばれている。E の極小点について次のようなことが知られている。

E は H_γ 上で高々一つしか極小点をもたない。また、極小点 $\underline{u}$ が与える臨界値 $\underline{c} = E(\underline{u})$ は、E の最小の臨界値となる。さらに、$\mathcal{C}(\Gamma)$ においてこの臨界値 $\underline{c}$ が最小となる境界値に対する small solution が (H)-(P) の解となる。一般には、(H)-(D) の極小解、(H)-(P) の極小解のどちらも区別なく small solution とよばれているが、ここでは、前者のみを small solution とよび、後者を small surface とよぶことにする。

Min-Max 法による非極小解の存在

E は下に非有界であるから、極小点の存在とあわせて、Min-Max 法によって非極小解の存在が示されることが期待されるのだが、E は $\underline{c}+\dfrac{4\pi}{3H^2}$ で Palais-Smale 条件を満たさないため、ただちに Min-Max 法を適用することはできない。この困難を克服して得られたのが、Brezis-Coron('84) の large solution である。彼らは $|H|\|\gamma\|_{L^\infty}<1$ ならば、つぎのような経路 $p:[0,\infty)\to H_\gamma$ が存在することを示した。

(1) $p(0)=\underline{u}$

(2) $\lim_{t\to\infty}E(p(t))=-\infty.$

(3) $\max_{t\geq 0}E(p(t))<\underline{c}+\dfrac{4\pi}{3H^2}.$

これから、Morse Index が 1 となる (H)-(D) の解 $\bar{u}$ が存在が得られる。

この $\bar{u}$ が与える臨界値 $\bar{c}=E(\bar{u})$ は、$\underline{u}$ を除けば E の最小の臨界値である。また、$\bar{u}$ は一般には一意的ではない。small solution の場合と同様に $\mathcal{C}(\Gamma)$ においてこの臨界値 $\bar{c}$ が最小となる境界値に対する large solution が (H)-(P) の解を与える。さきほどと同様にこうして得られた (H)-(P) の解を large surface とよぶことにする。

このようにして得られた解の像として目的となる曲面が得られることになるのだが、解の微分が消えている点では古典的な意味で平均曲率が定義することができない。ここで、これらの解の微分が消えていないこと、すなわちはめこみとなっているか否かという問題が生じる。'73 年に Gulliver によって small surface がはめこみであることが示されている。彼の手法は'69 年に Osserman が Douglas の極小曲面に用いたものを援用したものである。この手法は対象となる解の最小性に大きく依拠しており、large surface に対して用いることはできないため、これがはめこみとなるか否かは不明だった。この稿の目的

は large surface がはめこみであることを示すことにある。

2. Sketch of proof

$\bar{u}$ を large surface とする。$\sigma > 0$ が存在して $\tilde{\Gamma} = u(\partial B_\sigma)$ としたとき、$\bar{u}|_{B_\sigma}$ が $\tilde{\Gamma}$ に対する small surface であることを示せば Gulliver の結果から B_σ 上で $\bar{u}$ がはめこみとなる。これと方程式が等角変換によって不変であることとをあわせて、B 全体ではめこみであることが示される。

ここよりしばらく (H)-(D) の解の性質について述べることにする。すなわち、以下の議論は解が等角写像であるか否かによらない。また、証明の道筋を示すことが本章の目的であり、技術的な補題などには証明を与えないことをあらかじめお断りしておく。

$\mathcal{S} := \{\bar{u} \in H^1(B; \mathbf{R^3});\ \bar{u}$ is a large solution of (H)-(D).$\}$ とする。このとき $\mathcal{S}$ は $H^1(B; \mathbf{R^3})$ において compact である。また、$A_\rho = B \setminus B_\rho(0)$. $X_\rho = H_0^1(A_\rho; \mathbf{R^3})$. としておく。

Lemma 1.

ある $\rho_1 > 0$ が存在して任意の $\rho \in (0, \rho_1)$ に対し次を満たす。

(1) $D_{B_\rho}(\bar{u}) < \frac{\pi}{15H^2}$, for every $\bar{u} \in \mathcal{S}$.

(2) すべての $\bar{u} \in \mathcal{S}$ は affine 空間 $\bar{u} + X_\rho$ 上における汎関数 E の非退化な Morse index 1 の臨界点である。(補題終)

$P : \mathcal{S} \to H^{\frac{1}{2}}(S^1; \mathbf{R^3})$ を $P\bar{u}(\theta) = \bar{u}(\rho, \theta)$ と定める。small solution の一意性と内部解析性より P は 1 対 1 写像となる。Lemma 1. より、$\bar{u} + X_\rho$ において陰関数定理を用いると次の補題が得られる。

Lemma 2.

$\delta_1 > 0$ と $I_1 : B_{\delta_1}(P(\mathcal{S})) \to H^1(A_\rho; \mathbf{R^3})$ が存在して次を満たす。

(1) I_1 は C^∞-級写像。

(2) $\tilde{\gamma}_0 \in P(\mathcal{S})$ ならば $I_1(\tilde{\gamma}_0) = P^{-1}(\tilde{\gamma}_0)\big|_{A_\rho}$.

(3) $\tilde{u} = I_1(\tilde{\gamma})$ は方程式

$$\begin{cases} \Delta\tilde{u} = 2H\tilde{u}_x \wedge \tilde{u}_y & \text{in } A_\rho, \\ \\ \tilde{u}(1,\theta) = \gamma_0(\theta), \\ \\ \tilde{u}(\rho,\theta) = \tilde{\gamma}(\theta). \end{cases}$$

の解である。(補題終)

Steffen の存在定理より、$0 < \delta_2 < \frac{\pi}{15H^2}$ ならば、$\tilde{\gamma} \in B_{\delta_2}(P(\mathcal{S}))$ に対し、つぎを満たす $\underline{u} \in H^1(B_\rho; \mathbf{R^3})$ がただ一つ存在する。

$$\begin{cases} \Delta\underline{u} = 2H\underline{u}_x \wedge \underline{u}_y & \text{in } B_\rho, \\ \\ \underline{u}(\rho,\theta) = \tilde{\gamma}(\theta), \\ \\ D_{B_\rho}(\underline{u}) < \dfrac{2\pi}{3H^2}. \end{cases}$$

この $\tilde{\gamma} \mapsto \underline{u}$ を I_2 と表すことにする。

$\delta_3 = \min\{\delta_1,\ \delta_2\}$ とし、$I : B_{\delta_3}(P(\mathcal{S})) \to H^1(B; \mathbf{R^3})$ を

$$I(\tilde{\gamma})(z) = \begin{cases} I_1(\tilde{\gamma})(z) & z \in A_\rho, \\ \\ I_2(\tilde{\gamma})(z) & z \in B_\rho, \end{cases}$$

と定める。

このとき、$E \circ I : B_{\delta_3}(P(\mathcal{S})) \to \mathbf{R}$ は連続写像となり、さらに次の命題が成立する。

Proposition 1.

$\delta_0 > 0$ が存在して $P(\mathcal{S})$ は $E \circ I$ の $B_{\delta_0}(P(\mathcal{S}))$ における狭義最小点となる。すなわち、

$$\bar{c} = \min_{\tilde{\gamma} \in B_{\delta_0}(P(\mathcal{S}))} E(I(\tilde{\gamma})),$$

であり、さらに

$$\inf_{\tilde{\gamma}\in\partial B_{\delta_0}(P(\mathcal{S}))} E(I(\tilde{\gamma})) > \bar{c},$$

が成立する。

Remark.

$\tilde{\gamma} \in B_{\delta_0}(P(\mathcal{S}))$ が $E(I(\tilde{\gamma})) = \bar{c}$ を満たす時、$\tilde{u} = I(\tilde{\gamma})$ は B 上で方程式 (H) の解となり、$\tilde{\gamma} \in P(\mathcal{S})$ となる。

(略証)

$\tilde{\gamma} \in B_{\delta_0}(P(\mathcal{S}))$ に対し、つぎを満たす経路 $p : [0,\infty) \to H^1(B;\mathbf{R^3})$ を構成することによって Propsition 1. を示す。

(1) $p(0)$ は (H)-(D) の small solution である。

(2) $\lim_{t\to\infty} E(p(t)) = -\infty$.

(3) $p(1) = I(\tilde{\gamma})$ で、$t = 1$ が $E(p(t))$ の唯一の最大点となる。

$I(\tilde{\gamma})$ の周辺での経路を定めるために以下の考察を行なう。

$$\Lambda(\tilde{\gamma}) = \inf_{\varphi\in X_\rho} \frac{d^2E(I(\tilde{\gamma}))(\varphi,\ \varphi)}{D_{A_\rho}(\varphi)}$$

もまた連続で、$\sup\Lambda \le \alpha < 0$ となる。

さらに $\psi(\tilde{\gamma}) \in X_\rho$ を $D_{A_\rho}(\psi(\tilde{\gamma})) = 1$ かつ

$$\Lambda(\tilde{\gamma}) = d^2E(I(\tilde{\gamma}))(\psi(\tilde{\gamma}),\ \psi(\tilde{\gamma}))$$

となるものとする。

$\tilde{\gamma} \in P(\mathcal{S})$ ならば、$V(\psi(\tilde{\gamma})) \neq 0$ より、$\delta_4 > 0$ を十分小さくとれば、$B_{\delta_4}(P(\mathcal{S}))$ 上で $|V(\psi(\tilde{\gamma}))| \ge \varepsilon > 0$ とできる。

$V(\psi(\tilde{\gamma})) < 0$ となるように $\psi : B_{\delta_4}(P(\mathcal{S})) \to X_\rho$ を定めると $B_{\delta_4}(P(\mathcal{S}))$ 上で連続な写像となる。

$t_0 > 0$ を十分小さくとって任意の $\tilde{\gamma} \in B_{\delta_4}(P(\mathcal{S}))$ と $t \in [-t_0,\ t_0]$ に対し、

$$E(I(\tilde{\gamma}) + t\psi(\tilde{\gamma})) - E(I(\tilde{\gamma})) < \frac{\alpha}{2}t^2$$

が成り立つようにできる。

I の連続性から $\delta_0 > 0$ を十分小さくとれば、任意の $\tilde{\gamma} \in B_{\delta_0}(P(\mathcal{S}))$ に対し、

$$\bar{c} - E(I(\tilde{\gamma})) > \frac{\alpha}{2}t_0^2$$

となる。

このとき、

$$E(I(\tilde{\gamma}) \pm t_0\psi(\tilde{\gamma})) \le \bar{c}$$

が成立する。

任意の $\tilde{\gamma} \in B_{\delta_0}(P(\mathcal{S}))$ に対し、$|\tilde{\gamma} - \tilde{\gamma}_0| < \delta_0$ となるような $\gamma_0 \in P(\mathcal{S})$ が存在することに留意してつぎのような経路を考える。

$$\underline{u} \to \{I(\tilde{\gamma}_0) - t_0\psi(\tilde{\gamma}_0)\} \to \{I(\tilde{\gamma}) - t_0\psi(\tilde{\gamma})\} \to I(\tilde{\gamma}) \to \{I(\tilde{\gamma}) + t\psi(\tilde{\gamma})\}\ (t \to \infty)$$

large solution の定義よりこの経路上での最大値は $\bar{c}$ 以上でなくてはならない。また最大値をあたえるのは $I(\tilde{\gamma})$ となるのは構成の仕方から明らかである。

Proposition 2 では、B に別の等角構造を定める一次形式を導入し、そのもとでの small solution の与える臨界値ともとの値との差の評価を与える。つぎの二つの補題はそのための準備となる。

Lemma 3.

$\tilde{B} = (B, \tilde{dz})$ で $B \setminus B_{1/2}$ 上で $dz = \tilde{dz}$ とする。

$\gamma \in H^{\frac{1}{2}}(S^1)$ に対し $h, \tilde{h}$ を次のように定める。

$$\begin{cases} \Delta_{dz} h = 0 & \text{in } B, \\ \\ h(1,\theta) = \gamma(\theta). \end{cases}$$
$$\begin{cases} \Delta_{\tilde{dz}} \tilde{h} = 0 & \text{in } B, \\ \\ \tilde{h}(1,\theta) = \gamma(\theta). \end{cases}$$

このとき、γ や $\tilde{dz}$ に依らない定数 $C > 0$ が存在して、

$$C^{-1} D_B(h) \leq D_{\tilde{B}}(\tilde{h}) \leq C D_B(h)$$

が成立する。(補題終)

Lemma 4

$0 < \sigma < \frac{1}{2}$ を定めておく。$\tilde{B} = (B, \tilde{dz})$ で $B \setminus B_\sigma$ 上で $dz = \tilde{dz}$ とし、$\tilde{B}_r = (B_r, \tilde{dz}|_{B_r})$ と表す。

$\tilde{u}$ を $D_{\tilde{B}}(\tilde{u}) < \dfrac{2\pi}{15H^2}$ を満たす (H) の解とする。(Steffen の small solution となる)

このとき、σ や $\tilde{dz}, \tilde{u}$ によらない定数 $\mu > 0$ が存在して

$$D_{\tilde{B}_\rho}(\tilde{u}) \leq \rho^\mu D_{\tilde{B}}(\tilde{u}) \quad \rho \in (2\sigma, 1)$$

が成立する。(補題終)

証明

$\Phi(r) = D_{\tilde{B}_r}(\tilde{u})$ とする。$h^\rho, \tilde{h}^\rho$ を

$$\begin{cases} \Delta_{dz} h^\rho = 0 & \text{in } B_\rho, \\ \\ h(\rho,\theta) = \tilde{u}(\rho,\theta). \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta_{\tilde{dz}}\tilde{h} = 0 & \text{in } B_\rho, \\ \tilde{h}^\rho(\rho,\theta) = \tilde{u}(\rho,\theta). \end{cases}$$

と定める。

$$\begin{aligned} \left.\frac{d\Phi}{dr}\right|_{r=\rho} &= \frac{1}{2}\int_{\partial B_\rho} |\nabla \tilde{u}|^2 d\theta \geq \frac{1}{2}\int_{\partial B_\rho} \frac{|\tilde{u}_\theta|^2}{\rho} d\theta \\ &\geq \frac{D_{B_\rho}(h^\rho)}{\rho} \geq \frac{D_{\tilde{B}_\rho}(\tilde{h}^\rho)}{C\rho} \\ &\geq \frac{\Phi(\rho)}{5C\rho}. \end{aligned}$$

この微分不等式から任意の $2\sigma < \rho < R < 1$ に対し、

$$\log\frac{\Phi(R)}{\Phi(\rho)} \geq \frac{1}{5C}\log\frac{R}{\rho}$$

となり、

$$\Phi(\rho) \leq \Phi(R)\left(\frac{\rho}{R}\right)^{\frac{1}{5C}}$$

が得られる。

Lemma 3, 4 より次の命題が得られる。

Proposition 2.

u を $D(u) < \frac{\pi}{15H^2}$ を満たす (H) の解とする。$\rho_2 > 0$ が十分小さければ、$\rho \in (0,\rho_2)$ に対し、$\tilde{B} = (B, \tilde{dz})$ で $B \setminus B_\rho$ 上で $dz = \tilde{dz}$ ならば Dirichlet 条件 $\tilde{u}(1,\theta) = u(1,\theta)$ の下での $\tilde{B}$ における Steffen の small solution $\tilde{u}$ が存在する。

このとき、u や $\tilde{dz}$ に依らない定数 $C > 0$ が存在して

$$|E_B(u) - E_{\tilde{B}}(\tilde{u})| < C\rho^\mu \ (0 < \rho < \rho_2)$$

が成立する。

証明

$$\eta(r)=\begin{cases}1 & 2\rho\le r<1,\\ \dfrac{r-\rho}{\rho} & \rho<r<2\rho,\\ 0 & r\le 0\end{cases}$$

とする。

$$\bar{u}_\rho=(4\pi\rho^2)^{-1}\int_{B_\rho}u\ dxdy$$

とし、

$$v(z)=\bar{u_\rho}+\eta(|z|)\,(u(z)-\bar{u_\rho})$$

とすると

$$\begin{aligned}|D_B(v)-D_B(u)|&\le D_{B_{2\rho}}(v)+D_{B_{2\rho}}(u)\\&\le 2D_{B_{2\rho}}(u)+\rho^{-2}\int_{B_{2\rho}}|u-\bar{u_\rho}|^2\ dxdy\\&\le CD_{B_{2\rho}}(u)\le C\rho^\mu\end{aligned}$$

ここで $C\rho_2^\mu<\dfrac{\pi}{15H^2}$ となるように ρ_2 を定めれば $D(v)<\dfrac{2\pi}{15H^2}$ となり、Steffen の存在定理より、$D_{\tilde{B}}(\tilde{u})<\dfrac{2\pi}{3H^2}$ となる small solution の存在が得られる。

引続き、等周不等式より

$$|V(v)-V(u)|\le(D_{B_{2\rho}}(v)+D_{B_{2\rho}}(u))^{\frac{3}{2}}$$

となり、

$$|E_B(v)-E_B(u)|\le C\rho^\mu$$

を得る。

B_ρ 上で v は定数だから、$E_{\tilde{B}}(v) = E_B(v)$ となる。$\tilde{u}$ の最小性と $D_{\tilde{B}}(v) = D_B(v) < \frac{2\pi}{3H^2}$ から

$$E_{\tilde{B}}(\tilde{u}) \leq E_{\tilde{B}}(v) \leq E_B(u) + C\rho^\mu$$

が成立する。

$\tilde{u}$ に対しても同様の方法を用いることで

$$E_B(u) \leq E_{\tilde{B}}(\tilde{u}) + C\rho^\mu$$

が得られる。

ここから、large suface $\bar{u}$ がはめこみであることを示そう。$\bar{u}$ は large surface であり、$\gamma_0 = \bar{u}|_{\partial B}$ とする。前述の議論にしたがって $\rho \in (0, \rho_1)$ と $\delta_0 > 0$ を定める。ここで

$$\varepsilon_0 = \inf_{\tilde{\gamma} \in \partial B_{\delta_0}(P(\mathcal{S}))} E(I(\tilde{\gamma})) - \inf_{\tilde{\gamma} \in B_{\delta_0}(P(\mathcal{S}))} E(I(\tilde{\gamma}))$$

としておく。

また、Proposition 2 における C, μ に対し、

$$C\left(\frac{\sigma}{\rho}\right)^\mu < \frac{\varepsilon_0}{3}$$

となるように $\sigma > 0$ を定める。

いま $\tilde{dz} = dz$ on $B \setminus B_\sigma$ なる B の新しい形式 $\tilde{dz}$ をとり、さきほどのように $\tilde{B} = (B, \tilde{dz})$, $\tilde{B}_\rho = (B_\rho, \tilde{dz}|_{B_\rho})$ とする。さらに $\tilde{\gamma} \in B_{\delta_0}(P(\mathcal{S}))$ に $\tilde{B}_\rho$ での small solution を対応させる写像を $\tilde{I}_2$ とし、前述の I_1 とあわせて $\tilde{I} : B_{\delta_0}(P(\mathcal{S})) \to H^1(\tilde{B}, \mathbf{R^3})$ を

$$\tilde{I}(\tilde{\gamma})(z) = \begin{cases} I_1(\tilde{\gamma})(z) & z \in A_\rho, \\ \tilde{I}_2(\tilde{\gamma})(z) & z \in B_\rho, \end{cases}$$

とする。

このとき、Proposition 2 と σ のとりかたから、

$$\inf_{\tilde{\gamma}\in\partial B_{\delta_0}(P(\mathcal{S}))} E_{\tilde{B}}(\tilde{I}(\tilde{\gamma})) - \inf_{\tilde{\gamma}\in\bar{B}_{\delta_0}(P(\mathcal{S}))} E(\tilde{I}(\tilde{\gamma})) > \frac{\varepsilon_0}{3}$$

となる。このことから、$E_{\tilde{B}} \circ \tilde{I}$ は $B_{\delta_0}(P(\mathcal{S}))$ の内点で最小値をとる。この最小値を与えるものを $\tilde{\gamma}_1$ とし、τ を B から $\tilde{B}$ への等角写像とすると $\tilde{u} = \tilde{I}(\tilde{\gamma}_1) \circ \tau$ は $\gamma = \gamma_0 \circ \tau$ に対する (H)-(D) の解となる。

$\tilde{u}$ の Morse Index は明らかに 1 以上であり、large suface の定義から $E_B(\tilde{u}) \geq E_B(\bar{u})$ が成立する。

ここで、もし $\bar{u}|_{B_\sigma}$ が small surface でないと仮定するとある B_σ 上の一次形式 $\tilde{dz}$ が存在して $\tilde{B}_\sigma = (B_\sigma, \tilde{dz})$ における $\gamma = \bar{u}|_{\partial B_\sigma}$ に対する (H)-(D) の small solution $\underline{v}$ があたえる臨界値が $E_{B_\sigma}(\bar{u}|_{B_\sigma})$ よりも真に小さくなる。

B_σ の外で $\tilde{dz} = dz$ として拡張し、$\tilde{B}_\rho = (B_\rho, \tilde{dz})$ とする。このとき、

$$\tilde{v} = \begin{cases} \underline{v} & \text{in } B_\sigma, \\ \bar{u} & \text{in } B_\rho \setminus B_\sigma \end{cases}$$

とし、$\tilde{w}$ を $\gamma = \bar{u}|_{\partial B_\rho}$ に対する (H)-(D) の small solution とすると

$$E_{\tilde{B}_\rho}(w) \leq E_{\tilde{B}_\rho}(\tilde{v}) < E_{B_\rho}(\bar{u}|_{B_\rho})$$

が成立する。B_ρ の外では $w \equiv \bar{u}$ として拡張すると $E_{\tilde{B}}(w) < E_B(\bar{u})$ が得られる。ところが、$\tilde{u}$ の定義から明らかに $E_B(\tilde{u}) \leq E_{\tilde{B}}(w)$ であり、これはさきほどの不等式 $E_B(\tilde{u}) \geq E_B(\bar{u})$ と矛盾する。よって $\bar{u}|_{B_\sigma}$ が small surface であることが示される。