数理解析研究所講究録
1076 巻 1999 年 57-64

4 次元多様体上の Yang-Mills heat flow の小さな初期値を持つ解について

内藤 久資 (Hisashi Naito)
名古屋大学多元数理科学研究科

1 Introduction

ここでは, コンパクト 4 次元多様体上の Yang-Mills heat flow の "small data global existence problem" について, 最近得られた結果を解説する.

M をコンパクト 4 次元多様体で境界はないもの, G をコンパクト線形 Lie 群で, $SO(l)$ または $SU(l)$ の Lie 部分群となっているものと仮定する. さらに, P を M 上の G-主束とする. この時, P 上の接続に対して, Yang-Mills 汎関数を

$$E(D) = \frac{1}{2}\int_M |F_D|^2\, dV \tag{1.1}$$

と定義する. 汎関数 (1.1) の停留点となる滑らかな接続を Yang-Mills 接続とよぶ. (1.1) の Euler-Lagrange 方程式は

$$d_D^* F_D = 0 \tag{1.2}$$

となる. 方程式 (1.2) は, 接続 D に関しての 2 階の方程式である. この汎関数に対する heat flow の初期値問題

$$\begin{cases} \partial_t D = -d_D^* F_D, & \text{in } [0,\infty)\times M, \\ D(0,x) = D_0(x), & \text{on } M \end{cases} \tag{1.3}$$

が Yang-Mills heat flow の方程式である. コンパクト 4 次元多様体上の Yang-Mills heat flow の解の存在に関しては, Struwe [5] と Kozono-Maeda-Naito [1] によって, 時間大域的な弱解の存在が知られている.

Theorem 1.1 (Struwe [5], Kozono-Maeda-Naito [1]). 任意の滑らかな初期条件 D_0 に対して, (1.3) の $(0,\infty]\times M$ 上の解 $D(t)$ が存在する. また, 解 $D(t)$ は $(0,\infty]\times M$ 上の有限個の点からなる集合 $\mathcal{S}$ を除いて滑らかである. さらに, $(t_i, x_i)\in\mathcal{S}$ となるための必要十分条件は, ある定数 $\varepsilon > 0$ が存在して, 任意の $r > 0$ に対して,

$$\limsup_{t\uparrow t_i} \int_{B_r(x_i)} |F_D(t,x)|^2\, dV \geq \varepsilon \tag{1.4}$$

となることである.

解 $D(t)$ が滑らかでないための条件 (1.4) とエネルギー不等式 (Theorem 2.1) から次の結果を導くことができる.

Corollary 1.2. 初期条件 D_0 が $E(D_0) < \varepsilon$ をみたすならば, (1.3) の $(0,\infty)\times M$ 上の滑らかな解 $D(t)$ が存在する.

しかしながら, コンパクト 4 次元多様体上の Yang-Mills 汎関数と主束 P の位相不変量の間には, 次の関係が成立する：P 上の任意の滑らかな接続 D は

$$E(D) \geq |p_1(P)|, \quad p_1(P) = \frac{1}{2}\int_M F_D \wedge F_D \tag{1.5}$$

を満たす. ここで, $p_1(P)$ は主束 P の位相不変量であり, $4\pi^2$ の整数倍となる. したがって, $p_1(P) \neq 0$ の時には, Corollary 1.2 の状況は期待できないことが容易にわかる.

4 次元多様体上の Yang-Mills heat flow に対して, 「小さな初期値」に対する問題は, (1.5) の関係式を考慮すると, 次のように定式化しなくてはならない.

Problem 1.3. ある定数 $\varepsilon_1 > 0$ が存在して, 初期条件 D_0 が $E(D_0) < \varepsilon_1 + |p_1(P)|$ をみたすならば, (1.3) の $(0,\infty) \times M$ 上の滑らかな解 $D(t)$ が存在するか？

さらに, $t \to \infty$ の時に, 何らかの意味で $D(t)$ は Yang-Mills 接続に収束するか？

この問題に対する部分的な解答は Schlatter [4] によって示された.

Theorem 1.4 (Schlatter [4]). *M, P が以下の条件のいずれかを満たすと仮定する:*

1. $M = S^4$ かつ $|p_1(P)| = 4\pi^2$,
2. P の構造群は $SO(3)$ で, $|p_1(P)| \leq 12\pi^2$.

この時, M にしか依存しない定数 $\varepsilon > 0$ が存在して, $E(D_0) < \varepsilon + |p_1(P)|$ をみたすならば, (1.3) の初期条件 D_0 をもつ解 $D(t)$ は, $t = \infty$ まで滑らかである.

このノートでは, Problem 1.3 に対する完全な解答を与える.

Theorem 1.5 (Maeda-Naito [3]). *$E(D_0) < 8\pi^2 + |p_1(P)|$ をみたすならば, (1.3) の初期条件 D_0 をもつ解 $D(t)$ は, $t = \infty$ まで滑らかである.*

2 基本的な性質

ここでは, Yang-Mills 接続, Yang-Mills heat flow の解に対する基本的な性質を証明を抜きにして述べる.

D を P 上の滑らかな接続, F_D をその曲率形式とする. F_D は $\mathfrak{g}$ に値を持つ M 上の 2-形式 であり, さらに, $F_D \in \Omega^2(\mathfrak{g}_P)$ となる. すなわち, $\{U, V, \cdots\}$ を M の局所自明近傍系とするとき, $U \cap V$ 上で定義される変換関数 $\phi_{UV} \colon U \cap V \longrightarrow G$ が存在するが, 変換関数の族 $\{\phi_{UV}\}$ に対して,

$$F_U = \phi_{UV}^{-1} \cdot F_V \cdot \phi_{UV}$$

なる関係を持つ. また, 空間 $\Omega^2(\mathfrak{g}_P)$ 上には, Hodge の star operator $*\colon \Omega^2(\mathfrak{g}_P) \longrightarrow \Omega^2(\mathfrak{g}_P)$ が存在するが, $\dim M = 4$ の場合, $*^2 = \mathrm{id}$ となる. したがって, $\Omega^2(\mathfrak{g}_P)$ は $*$ の固有空間に分解され,

$$\Omega^2(\mathfrak{g}_P) = \Omega^2_+(\mathfrak{g}_P) \oplus \Omega^2_-(\mathfrak{g}_P), \quad \Omega^2_\pm(\mathfrak{g}_P) = \{\omega \in \Omega^2(\mathfrak{g}_P) : *\omega = \pm\omega\}$$

が成り立つ. この分解にしたがって, 曲率形式を $F_D = F_D^+ + F_D^-$, $F_D^\pm = \frac{1}{2}(F_D \pm *F_D)$ と分解する. この時,

$$E_\pm(D) = \frac{1}{2}\int_M |F_D^\pm|^2 \, dV$$

と定義すると, 簡単な計算により,

$$E(D) = E_+(D) + E_-(D), \quad p_1(P) = E_+(D) - E_-(D)$$

が成り立つ．ここで，$p_1(P)$ は主束 P の第1ポントリャーギン数（の $4\pi^2$ 倍）であり，P の位相不変量である．すなわち，$p_1(P)$ は接続 D のとり方によらず，一定の値をとる．さらに，

$$E(D) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_M |F_D - *F_D|^2\, dV + p_1(P), & (p_1(P) \geq 0 \text{ の時}) \\ \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_M |F_D + *F_D|^2\, dV - p_1(P), & (p_1(P) \leq 0 \text{ の時}) \end{cases} \geq |p_1(P)|$$

が成り立つ．したがって，$F_D = \pm * F_D$ を満たす時に，汎関数は最小となり，その値は P の位相不変量から決まる．この時には，D は（反）自己双対接続であると呼ばれる．

Yang-Mills-heat flow の滑らかな解は，次のエネルギーの関係式を満たす．

Theorem 2.1. $D(t)$ を (1.3) の滑らかな解とすると，

$$\frac{d}{dt}E(D(t)) = -\int_M |d_D^* F_D|^2\, dV$$

が成り立つ．特に，エネルギーは解に沿って単調非増加である．

Yang-Mills heat flow の解の解析的な性質を調べるためには，次の関係式 (Bochner-Weiztenböck formula) が重要な役割を果たす．

Proposition 2.2. $D(t)$ を (1.3) の滑らかな解とすると，次の関係式が成り立つ．

$$\partial_t F_D = \nabla_D^2 F_D + R(F_D) + [F_D, F_D].$$

ここで，R は M の曲率から決まる線形作用素である．特に，

$$\partial_t |F_D| \leq \Delta |F_D| + C|F_D| + C|F_D|^2$$

が成り立つ．

したがって，Yang-Mills heat flow は，初期条件 $D(0)$ のエネルギーが有限（すなわち，$F_D(0) \in L^2(M)$ ）という仮定の元で考えると，$\dim M = 4$ の時，いわゆる critical non-linearity を持っていることが容易にわかる[1]．

3 証明の準備

主定理を証明するために，ここでは次の（いずれかの）方程式を考えよう:

$$\partial_t D = -2 d_D^* F_D^+, \tag{3.1}$$

$$\partial_t D = -2 d_D^* F_D^-. \tag{3.2}$$

Lemma 3.1. 次の3つは互いに同値である．

1. $D(t)$ は (1.3) の滑らかな解．

2. $D(t)$ は (3.1) の滑らかな解．

3. $D(t)$ は (3.2) の滑らかな解．

[1] 一般に，汎関数が幾何学的に「良い」性質（例えば共形不変性など）を持っている次元では，ちょうど critical non-linearity になっていることが多い．

Proof. 任意の滑らかな接続に対して, $d_D F_D = 0$ (Bianchi の恒等式) が成り立つことを利用する. すなわち,

$$-d_D^* F_D^\pm = \frac{1}{2} * d_D * (F_D \pm *F_D) = \frac{1}{2}(*d_D * F_D \pm *d_D F_D)$$
$$= \frac{1}{2} * d_D * F_D = -\frac{1}{2} d_D^* F_D$$

が成り立つ. ここから主張は明らかである. □

Lemma 3.2. $D(t)$ が (1.3) の滑らかな解であれば, $E_\pm(D(t))$ は単調非増加である.

Proof. はじめに, $p_\pm\colon \Omega^2(\mathfrak{g}_P) \longrightarrow \Omega^2_\pm(\mathfrak{g}_P)$ を射影とし, $d_D^\pm = p_\pm \circ d_D$ とおく. $d_D \partial_t D = \partial_t F_D$ より, (1.3) の両辺に $d_D^\pm$ を作用させると,

$$\partial_t F_D^\pm = -d_D^\pm d_D^* F_D = -2 d_D^\pm d_D^* F_D^\pm \tag{3.3}$$

が成り立つ. (3.3) の両辺に $F_D^\pm$ を内積して, M 上で積分すれば,

$$\frac{d}{dt} E_\pm(D(t)) = \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_M |F_D^\pm|^2\, dV = -2\int_M \langle d_D^\pm d_D^* F_D^\pm, F_D^\pm\rangle\, dV = -2\int_M |d_D^* F_D^\pm|^2\, dV \le 0$$

が成り立つ. □

したがって, 方程式 (3.1) または (3.2) は, 形式的には, 汎関数 $E_\pm$ の heat flow と考えられ, これらに関する解析を行なうことによって主定理を証明する. 次に, 方程式 (3.1), (3.2) に対する Bochner-Weitzenböck formula を調べておく.

Proposition 3.3. $D(t)$ が (1.3) の滑らかな解とすると, 次の関係式が成り立つ.

$$\partial_t F_D^\pm = \nabla_D^2 F_D^\pm - \frac{\kappa}{6} F_D^\pm + F_D^\pm \circ W_\pm + [F_D^\pm, F_D^\pm].$$

ここで, κ は M のスカラー曲率, $W_\pm$ は M の *Wely* テンソルである. 特に, X, $Y \in \mathfrak{g}$ に対して, $|[X,Y]| \le \sqrt{2}|X|\,|Y|$ となるように $\mathfrak{g}$ の内積の正規化を定めると,

$$\partial_t |F_D^\pm| \le \Delta |F_D^\pm| - K_\pm |F_D^\pm| + \frac{2}{\sqrt{3}} |F_D^\pm|^2$$

が成り立つ. ここで, $K_\pm = \frac{1}{6}\min \kappa - \mu_\pm$, $\mu_\pm \ge 0$ は $W_\pm$ の最大固有値である.

4 主定理の証明

ここでは, $p_1(P) > 0$ と仮定し, $E(D(0)) < p_1(P) + 2\varepsilon_1$ であるとする. この時, $E_-(D(0)) < \varepsilon_1$ であることがわかる. これを利用して, 以後, $E_-(D(0)) = E_-(0) < \varepsilon_1$ の仮定のもとで, 方程式 (3.2) に関する評価を行なう.

はじめに, 良く知られた Sobolev の不等式を確認しておこう: $u \in W^{1,2}(M)$ ならば

$$\left(\int_M |u|^4\, dV\right)^{1/2} \le S^{-1}\int_M |\nabla u|^2\, dV + V_0^{-1/2}\int_M |u|^2\, dV \tag{4.1}$$

が成り立つ. (cf. Li [2].) ここで, $V_0 = \mathrm{Vol}(M)$ であり, M がコンパクトで境界のない多様体の時には, S は M には依存しない.

Lemma 4.1. 任意の $0 < T < \infty$ に対して,

$$\int_T^{T+\delta}\int_M |\nabla_D F_D^-|^2\, dV dt \le C(1+\delta)$$

が成り立つ. ここで, 定数 C は $E_-(0)$, S, K_-, V_0 のみに依存する.

Proof. Bochner-Weitzenböck formula (Proposition 3.3), Hölder の不等式, Sobolev の不等式 (4.1) により,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_M |F_D^-|^2\, dV + \int_M |\nabla_D F_D^-|^2\, dV \\
&= -\int_M \frac{\kappa}{6}|F_D^-|^2\, dV + \int_M \langle F_D^- \circ W_-, F_D^-\rangle\, dV + \int_M \langle [F_D^-, F_D^-], F_D^-\rangle\, dV \\
&\le -K_-\int_M |F_D^-|^2\, dV + \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\int_M |F_D^-|^2\, dV\right)^{1/2}\left(S^{-1}\int_M |\nabla_D F_D^-|^2\, dV + V_0{}^{-1/2}\int_M |F_D^-|^2\, dV\right)
\end{aligned} \tag{4.2}$$

が成り立つ. ここで, $\sqrt{\frac{8E_-(0)}{3S^2}} < 1$ が成り立つように $\varepsilon_1 > 0$ を選べば,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_M |F_D^-|^2\, dV + C\int_M |\nabla_D F_D^-|^2\, dV \le 2E_-(0)(\sqrt{\frac{8E_-(0)}{3V_0}} - \min\{K_-, 0\}) \tag{4.3}$$

が成り立つ. ここで, 定数 C は $E_-(0)$ と S のみに依存する. したがって, (4.3) を $[0,T]$ 上で積分すれば, 求める結論を得る. □

Lemma 4.2. 任意の $2 < p < 3$, $0 < T < \infty$ に対して,

$$\int_T^{T+\delta}\int_M |F_D^-|^p\, dV dt \le C(1+\delta) \tag{4.4}$$

が成り立つ. ここで定数 C は $E_-(0)$, S, K_-, V_0, p のみに依存する.

さらに, $E_-(0)$ のみに依存する定数 p $(2 < p < 3)$ が存在して, 任意の $0 < T < \infty$ に対して,

$$\sup_{T<t<T+\delta}\int_M |F_D^-|^p\, dV \le C(1+\delta) \tag{4.5}$$

が成り立つ. ここで定数 C は $E_-(0)$, S, K_-, V_0 のみに依存する.

Proof. はじめに (4.4) を示す. $2 < p < 3$ であるので, Hölder の不等式, Sobolev の不等式 (4.1) より,

$$\begin{aligned}
\int_M |F_D^-|^p\, dV &\le \left(\int_M |F_D^-|^2\, dV\right)^{\frac{4-p}{2}}\left(\int_M |F_D^-|^4\, dV\right)^{\frac{p-2}{2}} \\
&\le \left(\int_M |F_D^-|^2\, dV\right)^{\frac{4-p}{2}}\left(S^{-1}\int_M |\nabla_D F_D^-|^2\, dV + V_0{}^{-1/2}\int_M |F_D^-|^2\, dV\right)^{p-2}
\end{aligned}$$

が成り立つ. さらに, 時間の積分について Hölder の不等式を用いれば,

$$\begin{aligned}
&\int_T^{T+\delta}\int_M |F_D^-|^p\, dV dt \le \left(\int_T^{T+\delta}\left(\int_M |F_D^-|^2\, dV\right)^{\frac{4-p}{2(3-p)}} dt\right)^{3-p} \\
&\times\left(S^{-1}\int_T^{T+\delta}\int_M |\nabla_D F_D^-|^2\, dV dt + V_0{}^{-1/2}\int_T^{T+\delta}\int_M |F_D^-|^2\, dV dt\right)^{p-2} \\
&\le \delta^{3-p}\sup_{T<t<T+\delta}\left(\int_M |F_D^-|^2\, dV\right)^{\frac{4-p}{2}}\left(S^{-1}\int_T^{T+\delta}\int_M |\nabla_D F_D^-|^2\, dV dt + V_0{}^{-1/2}\int_T^{T+\delta}\int_M |F_D^-|^2\, dV dt\right)^{p-2} \\
&\le \delta^{3-p}(2E_-(0))^{(4-p)/2}\left(S^{-1}\int_T^{T+\delta}\int_M |\nabla_D F_D^-|^2\, dV dt + V_0{}^{-1/2}\int_T^{T+\delta}\int_M |F_D^-|^2\, dV dt\right)^{p-2} \\
&\le C(1+\delta)
\end{aligned}$$

が成り立つ. したがって (4.4) が証明できた.

さらに, Lemma 4.1 と同様な計算により,

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\int_M |F_D^-|^p\,dV + \frac{4(p-1)}{p^2}\int_M |\nabla|F_D^-|^{\frac{p}{2}}|^2\,dV \leq -K_-\int_M |F_D^-|^p\,dV + \frac{2}{\sqrt{3}}\int_M |F_D^-|^{p+1}\,dV$$
$$\leq -K_-\int_M |F_D^-|^p\,dV + \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\int_M |F_D^-|^2\,dV\right)^{1/2}\left(\int_M |F_D^-|^{2p}\,dV\right)^{1/2}$$
$$\leq -K_-\int_M |F_D^-|^p\,dV + \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\int_M |F_D^-|^2\,dV\right)^{1/2}\left(S^{-1}\int_M |\nabla|F_D^-|^{\frac{p}{2}}|^2\,dV + {V_0}^{-1/2}\int_M |F_D^-|^p\,dV\right)$$

が成り立つ. 仮定より, ある $p>2$ が存在して, $\frac{4(p-1)}{p^2} > \sqrt{\frac{8E_-(0)}{3S^2}}$ を満たすので,

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\int_M |F_D^-|^p\,dV + C\int_M |\nabla|F_D^-|^{\frac{p}{2}}|^2\,dV \leq C\int_M |F_D^-|^p\,dV \tag{4.6}$$

が成り立つ. したがって, (4.6) を $[0,T]$ 上で積分して, (4.4) を用いれば, (4.5) を示すことができる. □

Theorem 4.3. $\sup_{\substack{0<t<\infty \\ x\in M}} |F_D^-| \leq C$ が成り立つ. ここで定数 C は $E_-(0)$, S, K_-, V_0 のみに依存し, T には依存しない.

Proof. Lemma 4.2 より, ある $p>2$ と任意の $\delta<T<\infty$ に対して, $|F_D^-| \in L^\infty(T-\delta, T+\delta; L^p(M))$ が成り立つ. そこで, 放物型方程式に対する Moser の定理を用いれば, 任意の $T>\delta$ に対して,

$$\sup_{T<t<T+\delta} |F_D^-|^2 \leq \frac{C}{\delta}\int_{T-\delta}^{T+\delta}\int_M |F_D^-|^2\,dV dt \tag{4.7}$$

が成り立つ. したがって, エネルギー不等式を用いれば,

$$\sup_{T<t<T+\delta} |F_D^-|^2 \leq C\int_M |F_D^-(T-\delta)|^2\,dV \leq CE_-(0) \tag{4.8}$$

が成り立つ. ここで, 右辺は T に依存しないので,

$$\sup_{\delta<t<\infty} |F_D^-|^2 \leq CE_-(0)$$

が成り立つ. また, 時間局所的には滑らかな解の存在がわかっているので, $0<t\leq\delta$ に対しても, 評価が成り立つ. □

higher regularity も同様に示すことができ, $\sup_{\substack{0<t<\infty \\ x\in M}} |\nabla_D^n F_D| \leq C$ を示すことができる.

Theorem 4.3 を用いれば, 初期条件 $D(0)$ が $E_-(0) < 3S^2/8$ を満たすならば, その解は任意の有限時間 T まで $F_D(t)$ は有界である. したがって, F_D の有界性から D の有界性を示す必要がある. それを示すためには, 任意の局所自明近傍 U 上で, $D = d + A$ とあらわし, A の有界性を示す必要がある.

Proposition 4.4. 任意の局所自明近傍 U 上で $D(t) = d + A(t)$ と表したとする. この時, 任意の p $(2\leq p<\infty)$, $T<\infty$ に対して, $A(t) \in L^\infty(0,T;L^p(U))$ が成り立つ.

Proof. 方程式 (1.3) に $|A|^{p-2}A$ を内積して, U 上で積分すると,

$$\frac{d}{dt}\|A\|_{L^p(U)}^p \leq p\|d_D^* F_D^-\|_{L^p(U)}\|A\|_{L^p(U)}^{p-1}$$

が成り立つ. したがって,

$$\frac{d}{dt}\|A\|_{L^p(U)} \leq \|d_D^* F_D^-\|_{L^p(U)} \tag{4.9}$$

が成り立ち, (4.9) を $(T, T+\delta)$ 上で積分することにより,

$$\sup_{T<t<T+\delta} \|A\|_{L^p(U)} \leq C\delta + \|A\|_{L^p(U)}$$

を得る. したがって, $\|A(t)\|_{L^p(U)}$ は任意の有限時間において有界である. □

同様に, 任意の有限時間において, $A(t) \in W^{n,\infty}(0,T;L^p(U))$ を示すことができる.

U_α, U_β を局所自明近傍で, $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ を満たすものとする. $U_\alpha \cap U_\beta$ 上で, 変換関数 $\{g_{\alpha\beta}\}$ は $dg_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}A_\alpha - A_\beta g_{\alpha\beta}$ を満たすので, $\{g_{\alpha\beta}\}$ もまた滑らかである. よって, $D(t)$ の大域的な整合性を示すことができた. したがって, 任意の有限時間までの滑らかな解の存在が証明された.

次に $T=\infty$ までの有界性を示す. ここまででは F_D^- が一様有界であることは示せたのだが, $T=\infty$ において F_D^+ の部分が爆発する可能性は排除できない. もし $T=\infty$ までの滑らかさが成り立たないとすれば, F_D^+ の部分で爆発がおきているはずである. したがって, そのようなことが起きないことを示せば $T=\infty$ までの滑らかさを示したことになる.

そこで, 任意の $\varepsilon > 0$, $t_i \to \infty$, $x \in M$ に対して,

$$\int_{B_r(x)} |F_D(t_i)|^2\,dV \leq \varepsilon \tag{4.10}$$

が成り立つことを示そう. エネルギー不等式より,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_M |F_D^+|^2\,dV = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_M |F_D^-|^2\,dV \tag{4.11}$$

が成り立つ. ここで, $t_i \to \infty$ となる点列 $\{t_i\}$ をとり, (4.11) を $[t_m, t_n]$ 上で積分すると,

$$E_+(D(t_n)) - E_+(D(t_m)) = E_-(D(t_n)) - E_-(D(t_m)) \tag{4.12}$$

が成り立つ. 一方, $E_-(D(t))$ は Cauchy 列であることがわかっているので, (4.12) の右辺は 0 に収束する. したがって, $E_+(D(t))$ もまた Cauchy 列である. すなわち, $F_D^+(t)$ は $L^2(M)$ で強収束する. よって, $F_D(t)$ もまた $L^2(M)$ で強収束し, (4.10) が成り立つことがわかる.

また, Uhlenbeck の結果 [7] より, $\{D(t_i)\}$ が (4.10) を満たせば, 滑らかなゲージ変換 $g_{\alpha\beta}(t_i)$ が存在して, $g^*(t_i)D(t_i)$ は滑らかな接続に収束する.

以上により, Theorem 1.5 が証明された.

5 Final Remarks

5.1 $t \to \infty$ での収束

Theorem 1.5 の仮定よりも強く,

$$\begin{aligned} &K_- > 0, \quad E(0) < \min\{\frac{3S^2}{4}, \frac{3K_-^2V_0}{4}\} \quad \text{if } p_1(P) > 0, \\ &K_+ > 0, \quad E(0) < \min\{\frac{3S^2}{4}, \frac{3K_+^2V_0}{4}\} \quad \text{if } p_1(P) < 0 \end{aligned} \tag{5.1}$$

を仮定すると, より強い結果を示すことができる.

Theorem 5.1 (Maeda-Naito [3]). M, P, D_0 は (5.1) をみたすと仮定する. この時, (1.3) の初期条件 D_0 の解 $D(t)$ は, $t=\infty$ まで滑らかとなり, $t\to\infty$ の時, 自己双対接続に滑らかに収束する.

これは, 次の Lemma の帰結である.

Lemma 5.2. 任意の $0<T<\infty$ に対して,

$$\int_M |F_D^-|^2\,dV \le E_-(0)e^{-C_1 T}$$

が成り立つ. ここで, 定数 C_1 は $E_-(0)$, K_-, V_0 のみに依存する.

Lemma 5.2 を利用すると $\|A(t)\|_{L^p(U)}$ の $t\to\infty$ までの一様有界性が証明でき, その結果, $D(t)$ が滑らかに収束することを示すことができる.

Theorem 1.5 では $t\to\infty$ において, 解 $D(t)$ が接続のモジュライ空間（ゲージ変換で移り合うものを同一視した空間）における収束を示したことに相当し, Theorem 5.1 では, より強く, 解 $D(t)$ が接続の空間で収束することを示している.

5.2 定数の計算

最後に, Theorem 1.5, Theorem 5.1 であらわれた定数を計算しておこう.

Sobolev 定数 S は Talenti [6] によって計算されていて, $S=\frac{8\pi}{\sqrt{6}}$ である. したがって, Theorem 1.5 の定数の値は$\varepsilon_1 = 3S^2/4 = 8\pi^2$ となる. この値は, $|p_1(P)|=1$ を満たす主束 P 上の（反）自己双対接続のエネルギーの 2 倍に等しい.

また, M を標準的な計量を持つ $S^4(1)$ とする時, S^4 は共形平坦であるので, $W_\pm=0$. スカラー曲率は, $\kappa\equiv 12$ となり, $K_\pm=2$ である. したがって, Theorem 5.1 の条件をみたし, $V_0=|S^4(1)|=\frac{8}{3}\pi^2$ であることにより, $3K_-^2V_0/4=8\pi^2$ となる.

References

[1] H. Kozono, Y. Maeda, and H. Naito, *Global solution for the Yang-Mills gradient flow on 4-manifolds*, Nagoya Math. J. **139** (1995), 93–128.

[2] P. Li, *On the Sobolev constant and the p-spectrum of a compact Riemannian manifold*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **13** (1980), no. 4, 451–468.

[3] Y. Maeda and H. Naito, *Yang-Mills heat flow over 4-manifolds*, preprint, 1998, Nagoya University.

[4] A. Schlatter, *Global existence of the Yang-Mills flow in four dimensions*, J. Reine Angew. Math. **479** (1996), 133–148.

[5] M. Struwe, *The Yang-Mills flow in four dimensions*, Calc. Var. Partial Differential Equations **2** (1994), no. 2, 123–150.

[6] G. Talenti, *Best constant in Sobolev inequality*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **110** (1976), 353–372.

[7] K. K. Uhlenbeck, *Connections with L^p bounds on curvature*, Comm. Math. Phys. **83** (1982), no. 1, 31–42.