<table>
<thead>
<tr>
<th>項目</th>
<th>内容</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>タイトル</td>
<td>$C^*$-dynamics and related problems (Recent Topics in Operator Algebras)</td>
</tr>
<tr>
<td>著者(著者数)</td>
<td>境 正一郎</td>
</tr>
<tr>
<td>引用</td>
<td>数理解析研究所講究録 1999年 1077号 62-78</td>
</tr>
<tr>
<td>発行日</td>
<td>1999年02月</td>
</tr>
<tr>
<td>URL</td>
<td><a href="http://hdl.handle.net/2433/62647">http://hdl.handle.net/2433/62647</a></td>
</tr>
<tr>
<td>タイプ</td>
<td>Departmental Bulletin Paper</td>
</tr>
<tr>
<td>テキストバージョン</td>
<td>publisher 京都大学</td>
</tr>
</tbody>
</table>

京都大学学術情報リポジトリ KURENAI Kyoto University Research Information Repository
C*-dynamics and related problems

境正一郎 (Shōichirō Sakai)

量子格子系と Fermi 場の凝自由力学系の理論を一般化した UHF C*代数における normal *-derivations の理論は、拙著 [5] の中で展開されている。しかし、まだ多くの重要な問題が未解決である。本講演では、これらの問題の中から若干の興味深い問題を選んで解説する。

\( \Omega \) を UHF C*代数とする。このとき、\( \Omega \) には有限次元全複素行列 *-代数の増加列 \( \{ a_n \} \) が存在して、\( \Omega \) の 1 の右側に \( a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \cdots \) が存在し、\( \Omega \) は \( * \)-稠密である。

\( \delta(\Omega) = \bigcup_{n=1}^{\infty} a_n + i \), \( \delta \) を \( \delta(\Omega) \) を定義域とする \( \Omega \) における *-derivation とする。このように *-derivation と normal *-derivation という。\( \delta \) は normal *-derivation とすると自己摂影型の列 \( \{ a_n \} \) が存在して

\[ \delta(a) = i [a_n, a] \quad (a \in a_n; n = 1, 2, \ldots) \]

cycl phishing.

したがって、\( \delta \) は well-behaved であり

\[ \| (1 + \delta)(a) \| \geq \| a \| \quad (a \in \delta(\Omega)) \]
が成立す。

もし、\((1 \pm \delta) \in \sigma(\delta)\) が "\(\sigma\)の稠密になる" なら "Hille-Yoshidaの定理" により

\(\delta\) の内部 \(\sigma\) は以下の強連続\(\ast\)-automorphisms の \(\Sigma\) によるメターグリフ \(t \rightarrow \exp t \delta \ (t \in \mathbb{R})\) の生成作用素と \(\ast\) は \(\sigma\) に、

\[\| \exp t \delta (a) - (\exp t \delta)(a) \| \to 0 \ (n \to \infty)\]

\((a \in \Sigma)\)

が成立する。 即ち、\(C^*\text{-dynamics} \downarrow \mathbb{O}\), \(\exp t \delta\) は approximately inner である。

一般に、\((1 \pm \delta) \in \sigma(\delta)\) の稠密性を具体的に model にして検証するのは容易である。 従って、normal \(\ast\)-derivation \(\delta\) が如何なる条件下で "生成作用素" である \(\ast\)-derivation\(\) に応大できるか？という問題は極めて重要である。

この拡大問題は古典格子系の一般化である commutative normal \(\ast\)-derivation についても検討の中心で、完全な解答が示されている（Cf. [5] §4.6）。

まず、この解答について述べる。

定義 1. \(\delta\) を normal \(\ast\)-derivation とする。 \(\delta\) が commutative であるとは自己随伴られる列 \(\{\delta^n\}_{n=1}^{\infty}\) が
互いに可換に選べることである。即ち，
\[ \delta(a) = i [ \phi_n, a ] \ (a \in \mathfrak{h}_n ; n = 1, 2, \ldots ) \]
\[ h_m \phi_n = \phi_n h_m \quad (m, n = 1, 2, \ldots ) \]
が成立することである。このとき，
次の定理が成立する。

定理 1. \( \delta \) を commutative normal \(*\)-derivation とする。
\[ \mathfrak{h}_n = \mathfrak{h}_1 h_1, \mathfrak{h}_2 h_2, \ldots \mathfrak{h}_n \] で生成する \( \mathfrak{h} \) の \( C^* \)-代数とする。このとき，
\[ \tilde{\delta}(b) = i [ \phi_n, b ] \ (b \in \mathfrak{h}_n ; n = 1, 2, \ldots ) \] とおくと，\( \tilde{\delta} \) は \( \mathfrak{h}_n \) 上で well-defined であるが，\( \delta \) の内包 \( \overline{\delta} \) は生成作用素である。
さらに，
\[ (\exp \tilde{\delta})(b) = (\exp \delta \phi_n)(b) \ (b \in \mathfrak{h}_n ; n = 1, 2, \ldots \) \]
とおくと，\( \overline{\delta} \) が生成作用素ならば \( \overline{\delta} = \overline{\delta} \) である。
が成立する。

従って，次の問題は重要である。

問題 1. \( \delta \) を normal \(*\)-derivation とする。\( \delta \) が \( \mathfrak{h} \) に於ける生成作用素である \( \theta \) \(*\)-derivation に拡大できるための必要十分条件を求めよ。

問題 2. \( \mathfrak{h} \) に於ける normal \(*\)-derivation が生成作用素である \( \theta \) \(*\)-derivation に拡大できる例があるか？
さらには、一般に normal x-derivation の議論を進めよう。

δ と normal x-derivation すなわち bounded x-derivation があるか否かに依存する。τ (δ) < δ の存在を (δ + δ) (δ τ (δ)) < δ τ (δ) と仮定する (c.f. [8] Prop. 4.5.5).

δ は unital simple C*-algebra であり bounded derivation はすべて inner (c.f. [8] Th. 2.5.7) である。

ついて、δ (δ) < δ の存在を (δ + δ) と仮定する。bounded perturbation は生成作用素という性質を不变に保つから δ と δ + δ で置き換えて議論できる。

ところが、δ (δ) < δ の仮定をする。

このとき、δn の作り方 (c.f. [8] p. 159) から判るように
δn (δn) (n = 1, 2, ...) と定められる。

δ (δ1) < δ (δ2), δ (δm) < δ (δm+1), ... δ (δm) < δ (δm+1)
と仮定して十分とする。ここで δn+1 が δn+1 (n = 1, 2, ...) を仮定する。

このとき、次の定理が成立する （c.f. [8] Prop. 4.5.6）.
定理 2.  δ = δ + δ と表すと、ここで
δ1 (δ2m) < δ2m, δ2 (δ2m+1) < δ2m+1 (n = 1, 2, ...).
と仮定すると、δ1, δ2 は commutative normal x-derivative.
ある。すなわち、\( \delta_1(a) = i \sum \delta_n(a) \quad (a \in \mathbb{C}_{2n}) \)
\( \delta_n \in \mathbb{C}_{2n} \quad (n=1, 2, \ldots) \)
\( \delta_2(a) = i \sum \delta_n(a) \quad (a \in \mathbb{C}_{2n+1}) \)
\( \delta_n \in \mathbb{C}_{2n-1} \quad (n=1, 2, \ldots) \)
このとき、\( \delta_n, \delta_n' \)は自己随伴に関して存在する。

次に、\( \delta(\mathbb{C}_n) \subset \mathbb{C}_{n+1} \quad (n=1, 2, \ldots) \)と\( \mathbb{C}_n \)に対し、
\[ \delta^{m+1}(a) = \delta^{m+1}(a) \]
である。もし
\[ \sum_{n=0}^{\infty} r_n^{a} < +\infty \]
と\( +3 \) positive number \( r_n \)が存在するとき \( a \)はanalytic vector である。

定理 3. 上記の \( \mathbb{C}^* \)-dynamicsに対し、\( \Omega \)の中には有限次元全複素行列 \( *- \)代数の増加列 \( \{ \Omega_1, \Omega_2, \ldots \} \)で存在して次の条件をみたす。

(i) \( 1 \in \Omega_1 \cap \Omega_2 \cap \cdots \cap \Omega_n \cap \cdots \)
(ii) \( \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_n \) は \( \mathcal{O} \) で“稠密である”

(iii) \( \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_n \subset A(\delta) \), ここで \( A(\delta) \) は \( \delta \) に関する
analytic な vector 体の集合である。(cf. [8] Th. 4.5.1)

この定理において適当な自己随伴元 \( \alpha \in \mathcal{O}_n \) の中に \( \alpha \)
と \( (\delta + \delta n) \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_n \) をする。

従って次の問題は興味深い。

問題 3. \( \mathcal{O}_n \) の中に次の条件をみたす自己随伴元 \( \alpha \) が
存在するだろうか？

(i) \( (\delta + \delta n) \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_n \)

(ii) \( \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_n \subset A(\delta + \delta n) \)

問題 3 は肯定的であるならば, "Powers - Sakai の予想
(\( c+ [8] 4.5.9 \) ) は肯定的である。

さて, \( \text{UHF C}^* \)-代数 \( \mathcal{O} \) をもった \( \text{C}^* \)-dynamics \( \{ \mathcal{O}, \alpha \} \)
を考えよう。このとき, 定理 3 により \( \alpha \mathcal{O}_n \) が存在する。

きわ \( (1 - \delta) \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_n \) が \( \mathcal{O} \) で“稠密ならば”,

\( \delta(\alpha) = \{ [\mathcal{O}_n, \alpha] (\mathcal{O}_n \in \mathcal{O}_n ; n = 1, 2, \ldots) \} \) とする \( \alpha \),

\( (1 - \delta n) - \Delta \rightarrow (1 - \delta) - \Delta (\text{strongly}) \) とする \( \alpha \) で,

Kato - Trotter の定理より

\[ \| \exp t \delta n \alpha - \exp t \delta \alpha \| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty) (\alpha \in \mathcal{O}) \]
即ち \( \tau Z, \alpha \) は approximately inner である。

\( \tau \in \mathfrak{U} \) と任意な tracial state とする。 \( \beta \in (-\infty, \infty) \) に対し

\[
\psi_{n, \beta}(\alpha) = \frac{\tau(e^{-\beta \alpha})}{\tau(e^{-\beta N})} \quad (\alpha \in \mathbb{C})
\]

とおくと \( \psi_{n, \beta} \) は \( \mathbb{C} \) の state である。

\( \psi_{\beta} \in \mathcal{P}_{n, \beta} \) の \( \mathbb{C} \) の state space に \( \mathfrak{U} \) から \( \mathfrak{U} \) (\( \mathfrak{U}^* \)) 位相に関連する基準点とするとき \( \psi_{\beta} \) は \( \mathfrak{U} \) dynamics に \( \mathfrak{U} \), exp \( \frac{\theta}{\beta} \) の inverse temperature \( \beta \) に依う KMS state である。

次の問題は重要である

問題 3. \( \psi_{\beta} \in \mathcal{P}_{\beta} \), exp \( \frac{\theta}{\beta} \) に依う KMS state とする。このとき、次の条件をみたすように随伴する元の列 \( \{ n \} \) が \( \mathfrak{U} \) の中に存在するかどうか？

(i) \( \delta(\alpha) = i [\ln, \alpha] \) （\( \alpha \in \mathbb{C} \); \( n = 1, 2, \ldots \)）

(ii) \( \phi_{n, \beta}(\alpha) = \frac{\tau(e^{-\beta \alpha})}{\tau(e^{-\beta N})} \) （\( \alpha \in \mathbb{C} \)）とおき

\( \phi_{\beta} \) は \( \mathbb{C} \) の state space に \( \mathfrak{U} \) から \( \mathfrak{U} \) (\( \mathfrak{U}^* \)) 位相に関連 \( \psi_{n, \beta} \) の基準点である。

\( \delta \) は commutative normal \( * \)-derivation ならば、この問題に対する解答は Yes である。すなわち、強力な定理が得られている（cf. [5] §4.6 ）。

ここでは、簡単のため \( \delta_{n} \circ \rho_{n} \) \( \rho_{n} \) の n を
定理 4. \( \delta \) を Commutative normal *- derivation とし、次の条件をみたすものとする。
(i) \( D(\delta) = \bigoplus_{n=1}^{\infty} A_n \)
(ii) \( \delta(D(\delta)) \subseteq D(\delta) \)
(iii) \( \delta(a) = i \{ \ln, a \} (a \in A_n), \ln \in A_{n+1} \)
かつ \( \ln \ln = \ln \ln \cdot (n,n = 1,2,\ldots) \).

このとき、\( A_n \) は \( \mathbb{C} \) と \( \ln \) で生成される \( A_n \) の *- 部分代数とする。まず、\( \gamma_\beta \) を \( \text{C}^* \text{ dynamics of} \ A_n, \exp t \delta_n \) の \( \beta \) に対する KMS state とするとき、\( A_n \) の中に次の条件をみたす自己随伴元の列 \( \{ \ln \} \) が存在する。

(a) \( \ln \in A_n \) (\( n = 1,2,\ldots \))
(b) \( \delta(b) = i \{ \ln, b \} (b \in A_n; n = 1,2,\ldots) \)
(c) \( (\exp t \delta_n)(b) = (\exp t \delta_n)(b) (b \in A_n; n = 1,2,\ldots) \)
(d) \( \gamma_\beta(b) = \frac{\tau(b \delta_n(b \ln))}{\tau(e^{-\beta \ln})} (b \in A_n; n = 1,2,\ldots) \).

問題 3 は次のようにとても十分に興味深い。

問題 4. \( \chi, \alpha, \delta \) を UHF \( C^* \) 代数 \( A_n \) と \( C^* \text{ dynamics of} \ A_n, \exp t \delta_n \) における approximately inner とする。このとき、\( \gamma_\beta \) は \( A_n, \delta \) の \( \beta \) に対する KMS state とするとき、次の条件をみたす自己随伴元の列 \( \{ \ln \} \) が
存在するだろうか？

(i) \( \| (\exp t \delta_1 \ln)(\alpha) - (\exp t \delta)(\alpha) \| \to 0 \quad (n \to \infty) \)

\( (\alpha \in \Omega) \quad (ここで\ t = \exp t \delta) \)

(ii) \( \gamma_n, \theta (\alpha) = \frac{\tau (\alpha e^{-\theta \ln})}{2 (\alpha e^{-\theta \ln})} \quad (\alpha \in \Omega) \quad \theta \geq 3 \)

\( \gamma_\theta = \{ \gamma_n, \theta \} \) の \( \delta (\Omega, \Omega) \) 極限である。

上にあげたぎり問題1, 3 は commutative normal *-derivations の場合は完全に解答がある。一方, 定理 2 と
commutative normal *-derivations と normal *-derivations の間を結ぶ重要な定理である。この定理を用いて commutative
normal *-derivations の結果を normal *-derivations に
拡張できるのでではないだろうか？

定理 3 をより強力な形にするには、次の問題を研究する
することが重要である

問題 5. \( \delta \in \text{normal *-derivation} \) ならば
何様の条件の下で \( \delta = \delta_1 + \delta_2 \) ここで \( \delta_1 \) は
commutative, \( \delta_2 \) は bounded とかけるだろうか？

問題 6. 上の問題が一旦無条件で成立したりとすると
\( \delta = \delta_1 + \delta_2 \) \( \delta_1 \) は commutative, \( \delta_2 \) は bounded とか
けるいない例をつくる。
一storie, は \( A, \exp t \delta \) と一般は \( C^* \) と dynamics でわかる。

\( \Phi : \exp t \delta \to \) inverse temperature \( \beta \) になす KMS state と \( \psi \), \( \Lambda, \phi \) と \( \Phi \) によって \( U_\delta \) が \( \Lambda, \exp t \delta \) の covariant representation と \( \psi \) である。 \( U_\delta U_\delta = U_\delta \) と Stone 表現が \( \psi \) である。 \( \psi = 1 \) \( U_\delta \psi U_\delta = U_\delta \) は \( \Lambda \) の two-sided ideal に対応する。簡略のため \( \psi = 0 \) と仮定する。このとき, \( \Lambda \psi = 1 \) \( \psi \) から \( \Lambda \psi \Lambda \) と \( \Lambda \) を同一視することができる。

したがって, \( \Lambda = \Lambda \psi \Lambda \subseteq \Lambda \psi \Lambda \) が \( \Lambda \psi \Lambda \) の弱位相に関する閉包である \( W^* \) 代数）。 \( A_2(\delta) \) を \( \delta \) に関
いて geometric な元全体とする。 \( \psi (= \Lambda^* ) \in A_2(\delta) \) に対応して

\[
f(z, \phi)(a) = (ae^{iz(H+\delta)} \phi, \phi) \quad (a \in \Lambda, z \in \mathbb{C})
\]

とおくと \( f(z, \phi) \in \Lambda^* \) である。このとき、

\[
f(0, \phi)(a) = (a 1_\phi, 1_\phi) = \phi(a).
\]

\[
f(i\pi, \phi)(a) = (ae^{-\delta(H+\delta)} \phi, \phi) = \gamma \phi(a) \quad \text{と} \quad \gamma 
\]

\( \lim_{\delta \to 0} \gamma \phi \) は \( \Lambda \), \( \exp t(\delta + i \pi H) \) と \( \beta \) に従って
3 KMS state である。ここで, \( e^{iz(H+\delta)} e^{-iz H} \phi = e^{iz(H+\delta)} 1_\phi \) であり, \( e^{iz(H+\delta)} e^{-iz H} \) の閉包は \( \Lambda \)
の元である. \( A_2(\delta) \) は \( \Lambda \) と一样位相で稠密であるので, 一般
の \( h (= \Lambda^* \phi) \in \Lambda \) に対して, \( \| h - h \phi \| \to 0 \) \( m \to 0 \) とする
自ら随伴は元の列 \( h_n \) と \( A_2(\delta) \) から選ぶこともできること。
さらに、若干の議論が必要であるが、\( \gamma^h \) は \( M \) の中で、ルールに関して Cauchy 式であることが示される。従ってすべての \( (\gamma^h) \in A \) に対して \( \gamma^h \) が定義される。更に、

\( \gamma^h \in A \), \( \text{expt}(\delta + \sigma h) \) の \( \beta \) に対して KMS state であることは容易に示される。著者の中での主要定理の一つは、次の compactness 定理である（ref. [JS] Th. 4.4.7）。

定理 5. \( A \) は unital C*-algebra, \( \{ \gamma^h \} \) \( \in C^* \) dynamics を与え、\( \Phi \) は \( A \), \( \text{expt}(\delta + \sigma h) \) の \( \beta \) に対して KMS state と \( \gamma^h \) を与え、\( \gamma^h \) に対して \( \gamma^h \) は relatively

の \( (A^*, A^{**}) \)-compact である（ここで \( A^* \) は \( A \) の双対空間）

\( A^{**} \) は \( A^* \) の双対空間）。

この定理の説明に於ける証明は複素関係論を用いるもので、

かつおよび複雑なものである。以下で著者の証明より若干単純化された証明の概要を述べる。より一層の単純化は興味深い問題がある。

\[ f(t, h) (a) = (a e^{it(H + H)} e^{-itH} 1_\Phi, 1_\Phi) \ (t \in \mathbb{R}) \]

\[ f(t + i\phi, h) (a) = (a e^{-\phi(H + H)} e^{it(H + H)} e^{-itH} 1_\Phi, 1_\Phi) \]

\[ = (e^{it(H + H)} e^{-itH} a e^{-\phi(H + H)} 1_\Phi, 1_\Phi) \]

\( (\gamma^h / \Phi) \) は KMS state for \( \{ A, \text{expt}(\delta + \sigma h) \} \) at \( \beta \)。
発展で，

\[ f(t, A)(a) = \phi \left( a e^{i(tH+R)} e^{-iH} \right) = f(0, A)(a e^{i(tH+R)} e^{-iH}) \quad (t \in \mathbb{R}; \ A \in A_{2}(\mathbb{R})) \]

\[ f(t+i\beta, R)(a) = f(i\beta, R)(e^{i(tH+R)} e^{-iH}) a \quad (t \in \mathbb{R}) \]

\[ \exists r \in \mathbb{R}, e^{i(tH+R)} e^{-iH} \in A. \]

\[ \varphi(\delta) = (e^{-\delta(H+R)} 1_{\phi}, 1_{\phi}) \quad (\delta \in [0, \beta]) \quad \text{かつ} \quad \exists \beta \]

\[ \varphi'(\delta) = - (e^{-\beta(H+R)} (H+R) 1_{\phi}, 1_{\phi}) \]

\[ \varphi''(\delta) = (\beta(H+R) e^{\beta(H+R)} (H+R) 1_{\phi}, 1_{\phi}) \geq 0 \]

\[ \varphi''(\delta) \quad \text{は单调増加である}.
\]

\[ \varphi'(\delta) = - (e^{-\beta(H+R)} (H+R) 1_{\phi}, 1_{\phi}) = - (e^{-\beta(H+R)} R 1_{\phi}, 1_{\phi}) \]

\[ = - (e^{-\beta(H+R)} 1_{\phi}, 1_{\phi}) = - \varphi'(\delta). \]

\[ \text{いずれも} \quad \varphi(0) \equiv 0 \quad \varphi'(0) \equiv 0. \quad \text{かつ} \quad \varphi'(\beta) \equiv 0 \]

\[ \varphi(0) = (1_{\phi}, 1_{\phi}) = \phi(1) = 1. \]

命題 1. \( (\beta(H+R) \in A_{2}(\mathbb{R}) \quad \text{かつ} \quad \exists \varphi \quad \text{に対し}
\]

\[ (e^{-\beta(H+R)} 1_{\phi}, 1_{\phi}) \leq e^{\beta(H+R)} 1_{\phi}, 1_{\phi} \]

\[ \varphi' \text{は} \quad (e^{-\beta(H+R)} 1_{\phi}, 1_{\phi}) = e^{-\beta(H+R)} 1_{\phi}, 1_{\phi} \]

\[ (e^{-\beta(H+R)} 1_{\phi}, 1_{\phi}) \leq 1. \quad \text{かつ} \quad (e^{-\beta(H+R)} 1_{\phi}, 1_{\phi}) \leq e^{-\beta(H+R)} 1_{\phi}, 1_{\phi} \]

\[ 1+i\beta, R)(a) = \phi(a e^{i(tH+R)} e^{-iH}) \leq \phi(a \mathbb{R}) \frac{1}{2} \phi(1) \leq \|a\| \|1\| \]
\[ f(t+i \varphi, \lambda)(a) = 1 \mathcal{R} \left( e^{i t (H+\lambda)} e^{-i t H} a \right) \]
\[ \leq \| \mathcal{R} \| \left\| e^{i t (H+\lambda)} e^{-i t H} \right\| \| a \| \]
\[ \leq \mathcal{R} \| e^{i t H} \| \| a \| \]

\( z \in \mathbb{C} \)
\[ f(z, \lambda)(a) = \mathcal{R} \left( z \mathcal{R} \left( e^{i z (H+\lambda)} e^{-i z H} a \right) \right) \]
\[ \| f(z, \lambda)(a) \| \leq e^{\mathcal{R} \| H \| \| a \|} \]

\( f(t, \lambda)(a) = \left( e^{i t (H+\lambda)} - e^{-i t H} \right) a \)
\[ \frac{d}{dt} f(t, \lambda)(a) = \left( e^{i t (H+\lambda)} - e^{-i t H} \right) a \]

\[ \frac{d}{dt} f(t+i \varphi, \lambda)(a) = i \left( e^{i t (H+\lambda)} - e^{-i t H} \right) a \]

\( (z \in \mathcal{R}^0) \)

\[ \left| \frac{d}{dz} f(z, \lambda)(a) \right| \leq e^{\mathcal{R} \| H \| \| a \|} \]

\[ \left| \frac{d}{d\varphi} f(t+i \varphi, \lambda)(a) \right| \leq e^{\mathcal{R} \| H \| \| a \|} \]
\[ g(x, h, a) = f_i(x, h) g_i(x, a) \quad x \in \mathbb{R} \]

Ascoli-Arzelaの定理により、\[ g(x, h, a) \]は\( H_{\infty} \)に於いて relatively compact である。\[ a \in M \]に対して \[ \Omega_a = \{ g(x, h, a) \mid \| g \| \leq 1 \} \]

とし、\( \Omega_a \)は\( C[0, \beta] \)に於ける \( \Omega \)の弱縮限とされる。\( \Omega = \bigcap_{a \in M} \Omega_a \)は weakly infinite product とするか \( \Omega \)は compact space である。\[ h \rightarrow g(x, h, a) \quad a \in M \]で \( A_2(\delta) \)の自己線型部分 \( A_2(\delta) \)から \( \Omega \)への写像とし、\[ P = \{ h \in A_2(\delta) \mid \| h \| \leq 1 \} \]とする。\( \Omega \)は compact である。\[ G \in \overline{\Omega(P)} \]に対して \[ G = \{ g(x, h, a) \mid a \in M \} \]

(\( G(a) \subseteq C[0, \beta] \))。このとき、有向集合 \( h(x, h, a) \)\( \Omega \)に於いて存在し、

\[ \lim_{a \in M} \sup_{a \in \Omega} | g(x, h, a) - G(a)(x) | = 0 \]（\( a \in M \)）

従って、\( G(a+b) = G(a)+G(b) \), \( G(\lambda a) = \lambda G(a) \)
(\( a, b \in M \), \( \lambda \in \mathbb{C} \))。\[ a \rightarrow G(a)(x) \]は\( C \)に於ける \( \Omega \)の weak ショルモ関数である。\[ a \in M \]に対し、部分列 \( a_n \)が存在して
限定 $n \to 1$ で $P_n(a) - G(a)(0) = 0$ で、「存在する」

他方、$f$ の部分列 $f_{h_n}$ の部分列 $f_{h_n}$ が存在するので、

$\{f(z)_{h_n}\}(a) \to I_0$ 上で「compact subset」上で一致する連続関数 $G(a)(z) = G(a)(z)$ は $I_0$ 上で「解析的である。従って、

$G(a)(z) = G(a)(z)$ ($z \in [0, \beta]$)

また、$I_0$ 上で「有界で連続、$I_0$ 上で解析的の関数 $G(a)(z) \to [0, \beta]$ 上で一致していれば $G(a)(z)$ と一致している。従って、各 $G(a)$ に対しで $G(a)$ は「一意に定まる。

さて、$f(z) = f(\beta, z) \|_{||_1}$ で、$f \in \mathcal{A}(\theta)^+$ ゆえ「Relatively $O(M, M)$-compact であることを示す。これにより、線形混関数 $\alpha \to G(a)(\beta) (a \in M)$ が $O(M, M^*)$-continuous であることを示す。}

$\phi$ は $M$ に関して「separating generating vector」であるから、$M$ の有限集合上の strong topology は norm で定義される strong topology は $\| a \|_1 \leq \| a \| + \| a^* \|_1$ によって定義された位相と一致する。

$\alpha \to G(a)(\beta)$ が $O(M, M^*)$-continuous で「はるかに」と言うと、点列 $\{f_n\} (a_n \in M)$ が存在して、

$\| a_n \| \leq 1$, $\| a_n \| + \| a^*_n \| \to 0 (n \to \infty)$ かつ $\| G(a_n)(\beta) \| - \| \leq \epsilon > 0 \ (n=1, 2, \ldots)$,
\[
1 \frac{1}{t} \left( \mathbb{R}^2 \right) (a) = I \left( a e^{(H + \Phi)} e^{-i t H} \phi, \phi \right)
\leq \phi \left( a a, \lambda \right)^{1/2} \phi \left( 1, \lambda \right)^{1/2}.
\]

したがって，
\[
1 \tilde{\Gamma} (a) (t) \leq \phi \left( a a, \lambda \right)^{1/2} \phi \left( 1, \lambda \right)^{1/2}.
\]

よって
\[
1 \tilde{\Gamma} (a) (\lambda t) \leq \phi \left( a a, \lambda \right)^{1/2} \phi \left( 1, \lambda \right)^{1/2} \rightarrow 0.
\]

\[\sim \quad \tilde{\Gamma} (a) (2) \leq e^{2 \Phi} \| a \| \leq e^{\Phi}
\]

従って，部分列 \( \tilde{\Gamma} (a_{n}) \) が存在し，\( \lambda > 0 \) 上のすべての compact subset 上でも一様に有限の有界解析関数 \( F \) に収束する。すなわち，
\[
\frac{1}{2} \tilde{\Gamma} (a_{n}) (z) \downarrow 0 \quad (z \in \Omega).
\]

従って，\( \tilde{\Gamma} (a_{n}) (z) \downarrow 0 \) の列も一様に \( 0 \) に収束するから，\( F (z) = 0 \) \( (z \in \Omega) \)。従って，\( \tilde{\Gamma} (a) \) は relatively compact であるから，部分列 \( \left\{ \tilde{\Gamma} (a_{n}) \right\} \)
が存在し，\( [0, \beta] \) 上で連続な関数 \( F \) に一様に収束する
\[
F (z) = F (\beta) \quad \text{あるとき} \quad F (\beta) = 0 \quad (a \in \Omega, \beta) \).
\]

一方，
\[
| \tilde{\Gamma} (a_{n y}) (y) | \leq \varepsilon > 0 \quad (y \geq 1)
\]

これは矛盾である。（証明終）
問題 7. 定理5の簡単な証明があるだろうか？

参考文献