数理解析研究所講究録
1077 巻 1999 年 22-29

Smooth structure of noncommutative tori

都立大学大学院理学研究科 D1　樋口 仁巳

1 Intoruduction

θ を無理数として、U, V を交換関係 $UV = e^{2\pi i\theta}VU$ を満たす unitary としたとき、U と V が生成する C^*-algebra$C^*(U, V)$ を無理数回転環 $\mathcal{A}_\theta$ と呼ぶ。$\mathcal{A}_\theta$ は次のような性質を持つ canonical な derivation δ_1, δ_2 を持っている：

$$\begin{array}{ll} \delta_1(U) = 2\pi iU & \delta_1(V) = 0 \\ \delta_2(U) = 0 & \delta_2(V) = 2\pi iV \end{array}$$

(canonical の意味については [T] を参照。) この二つの derivation の smooth part $\mathcal{A}_\theta^\infty$ を $\mathcal{A}_\theta^\infty = \cap_{p,q=0}^\infty \mathrm{Dom}(\delta_1^p \circ \delta_2^q)$ と定義すると、これは Fréchet *-algebra になっている。

$\mathcal{A}_\theta$ は $C(\mathbf{T}^2)$ を非可換環に deform したものとみなせるので「非可換トーラス」と呼ばれるが、同様に $\mathcal{A}_\theta^\infty$ は $C^\infty(\mathbf{T}^2)$ を deform したものとみなせるため、$\mathcal{A}_\theta^\infty$ を $\mathcal{A}_\theta$ の「C^∞-part」と考えることができる。このため A.Connes により創始された Noncommutative Geometry においても重要な example となっている。($\mathcal{A}_\theta$ についての詳細は [WO],[D] 等を参照。)

さて、1993 年に G.Elliott と D.Evans によって、$\mathcal{A}_\theta$ が circle algebra の帰納極限になっていることが次の形で証明された。

Theorem ([EE])

$(M_{q_n} \oplus M_{q'_n}) \otimes C(\mathbf{T})$ に同型な $\mathcal{A}_\theta$ の C^*-subalgebra $\mathcal{A}_n$ と、embedding $\iota_{n,n+1} : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}_{n+1}$ が存在し、$\mathcal{A}_\theta$ は $(\mathcal{A}_n, \iota_{n,n+1})$ の C^*-inductive limit になっている。

ただし、$\{q_n\}, \{q'_n\}$ は θ の連分数展開に付随する自然数列である。([EE] の中では、U, V を近似する $\mathcal{A}_n$ の元 $U_{(n)}, V_{(n)}$ も与えられている。)

後でもコメントするように、$\mathcal{A}_n$ の generator $(e_{i,j}^n), (f_{k,l}^n), U_n, V_n$ は全て $\mathcal{A}_\theta^\infty$ の元として選ぶことができる。そこで、$\mathcal{A}_n$ 上の unbounded derivation $\delta_{(n)}$ を定義して、これにより $\mathcal{A}_n$ の smooth part として $\mathcal{A}_n^\infty = \cap_{p=0}^\infty \mathrm{Dom}(\delta_{(n)}^p)$ を定義すれば、これは Fréchet *-algebra になっている。本報告では、$\mathcal{A}_\theta^\infty$ は $\mathcal{A}_n^\infty$ の Fréchet *-inductive limit になることを示す。

2 Construction of $\mathcal{A}_n$

θ の連分数展開によって、次の整数列 $\{p_n\},\{p'_n\}$、自然数列 $\{q_n\},\{q'_n\}$、実数列 $\{\beta_n\},\{\beta'_n\}$ を得る。実際、

$$\theta = \lim_{n\to 0}[\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_n] = \lim_{n\to 0}\alpha_0 + \cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{\ddots + \frac{1}{\alpha_n}}}$$

であり、 α_0 は整数、 α_n $(n\geq 1)$ は自然数となる。そこで、

$$\begin{aligned}\tfrac{p_n}{q_n} &= [\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_{2n}]\\ \tfrac{p'_n}{q'_n} &= [\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_{2n+1}]\end{aligned}$$

とする。このとき、

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} & q_{n+1} \\ p'_{n+1} & q'_{n+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha_{2(n+1)+1} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha_{2(n+1)} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_n & q_n \\ p'_n & q'_n\end{pmatrix}$$

$$\text{さらに、}\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} < \frac{p_n}{q_n} < \theta < \frac{p'_n}{q'_n} < \frac{p'_{n-1}}{q'_{n-1}}$$

を満たす。 β_n,β'_n は $\beta_n = q'_n(\frac{p'_n}{q'_n}-\theta)$, $\beta'_n = q_n(\theta - \frac{p_n}{q_n})$ と定義する。

すると、 $\beta_n \in \mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}\theta$ であるので、 $[0,\frac{1}{q_n}]$ を support にもつ連続関数 $f_1, g_1 \in C([0,1]/\sim) \cong C(\mathbf{T})$ を用いて trace 値が β_n である Rieffel projection e_{β_n} を作ることができる。

これと $\mathcal{A}_\theta$ の canonical automorphism $\alpha_{z,1}$ を用いて、matrix unit の対角成分 $e^n_{i,i} = \alpha^{i-1}_{z,1}(e_{\beta_n})$ $(1\leq i\leq q_n)$ を得る。ただし、 $z = e^{2\pi i\frac{p_n}{q_n}}$ であり、 $\alpha_{z,1}(U) = zU$, $\alpha_{z,1}(V) = V$ を満たす。この時、 $\alpha_{z,1}(f_1(U)) = f_1(zU)$ であるが、 f_1 は、

$$f_1(ze^{2\pi it}) = f_1(e^{2\pi i(t+\frac{p_n}{q_n})}) = f_1(t+\frac{p_n}{q_n})$$

（ただし t は実数。）というように定義されているため、 $\alpha_{z,1}$ は f_1 の support$[0,\frac{1}{q_n}]$ を $[-\frac{p_n}{q_n}, -\frac{p_n}{q_n}+\frac{1}{q_n}]$ (mod1) へ平行移動させる map とみなせる。

唐突に $e^n_{i,i}$ が出てきたのは、 unitary U の spectral resolution $U = \int_{\mathbf{T}} z dE(z)$ の spectral projection $E([0,\frac{1}{q_n}])$ を e_{β_n} で近似することにある。この時、 $E([-\frac{p_n}{q_n}, -\frac{p_n}{q_n}+\frac{1}{q_n}])$ (mod1) は $\alpha_{z,1}(e_{\beta_n}) = e^n_{2,2}$ に対応し、「近似式」 $U \approx \sum_{i=1}^{q_n} \bar{z}^{i-1}e^n_{i,i}$ が

期待される。これを行列の形で書くとつぎのようになる。

$$U \approx \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \bar{z} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \bar{z}^{q_n-1} \end{pmatrix}$$

次に $e^n_{2,1}$ を $e^n_{2,2}Ve^n_{1,1}$ の polar decomposition の partial isometry として定義する。つまり、$e^n_{2,2}Ve^n_{1,1} = e^n_{2,1}|e^n_{2,2}Ve^n_{1,1}|$。さらに、$e^n_{i+1,i} = \alpha^{i-1}_{z,1}(e^n_{2,1})$ $(1 \leq i \leq q_n - 1)$ とする。これらより matrix unit $(e^n_{i,j})_{1\leq i,j\leq q_n}$ と、これらに可換な unitary U_n を得て、

$$C^*((e^n_{i,j})) \otimes C^*(U_n) \cong M_{q_n} \otimes C(\mathbf{T})$$

となっている。

同様の議論から、matrix unit $(f^n_{k,l})_{1\leq k,l\leq q'_n}$ と center の unitary generator V_n を得て、

$$C^*((f^n_{k,l})) \otimes C^*(V_n) \cong M_{q'_n} \otimes C(\mathbf{T})$$

となる。

そこで、C^*-subalgebra $\mathcal{A}_n$ を

$$\mathcal{A}_n = \Big(C^*((e^n_{i,j})) \otimes C^*(U_n)\Big) \oplus \Big(C^*((f^n_{k,l})) \otimes C^*(V_n)\Big)$$

と定義し、ここでも $V \approx \sum_{k=1}^{q'_n} w^{k-1} f^n_{k,k}$ という「近似式」が期待できる。ただし、$w = e^{2\pi i \frac{p'_n}{q'_n}}$ としている。

実際は U, V が可換ではないため、

$$U_{(n)} = \sum_{i=1}^{q_n} \bar{z}^{i-1} e^n_{i,i} + \sum_{k=1}^{q'_n} \alpha^{k-1}_{1,\bar{w}}(f^n_{2,1})$$

$$V_{(n)} = \sum_{i=1}^{q_n} \alpha^{i-1}_{1,z}(e^n_{2,1}) + \sum_{k=1}^{q'_n} w^{k-1} f^n_{k,k}$$

という $\mathcal{A}_n$ の元で近似されている。これを行列の形で書くと

$$U_{(n)} = \left(\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \bar{z} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \bar{z}^{q_n-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & & & t \\ 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \end{pmatrix}\right)$$

$$V_{(n)} = \left(\begin{pmatrix} & & & t \\ 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & w & & \\ & & \ddots & \\ & & & w^{q'_n - 1} \end{pmatrix} \right)$$

と書かれる。ただし、t は $C(\mathbf{T})$ の unitary generator である。

次に embedding $\iota_{n,n+1} : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}_{n+1}$ について説明する。

$\mathcal{A}_n$ の行列の部分の次元を表す自然数列 $\{q_n\}, \{q'_n\}$ は

$$\begin{pmatrix} q_{n+1} \\ q'_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_n \\ q'_n \end{pmatrix} \text{ ただし } \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbf{Z})$$

であり、a_n, b_n, c_n, d_n は自然数となる。$\iota_{n,n+1}$ は行列の形で書くと、次のような形で書ける。まず直和の第 1 成分については、$x \in M_{q_n}, f \in C(\mathbf{T})$ として、

$$\begin{aligned} &\iota_{n,n+1}(x \otimes f, 0) \\ &= \left(\begin{pmatrix} x & & & \\ & \ddots & & \mathbf{0} \\ & & x & \\ & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \end{pmatrix} \otimes f, \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & & \\ & x & & \\ \mathbf{0} & & \ddots & \\ & & & x \end{pmatrix} \otimes f \right) \end{aligned}$$

というように x をそれぞれ a_n 個と c_n 個対角線上に並べた形をしていて、それ以外の成分は 0 としている。直和の第 2 成分については、$y \in M_{q'_n}, g \in C(\mathbf{T})$ として、

$$\begin{aligned} &\iota_{n,n+1}(0, y \otimes g) \\ &= \left(\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & & \\ & y & & \\ \mathbf{0} & & \ddots & \\ & & & y \end{pmatrix} \otimes g, \begin{pmatrix} y & & & \\ & \ddots & & \mathbf{0} \\ & & y & \\ & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \end{pmatrix} \otimes g \right) \end{aligned}$$

というように y をそれぞれ b_n 個と d_n 個対角線上に並べた形をしていて、それ以外の成分を 0 としている。これらを generator $e^n_{i,j}, f^n_{k,l}, U_n, V_n$ を用いて示すと

$$\iota_{n,n+1}(e^n_{i,j}) = \sum_{k=0}^{a_n - 1} e^{n+1}_{i+kq_n, j+kq_n} + \sum_{l=0}^{c_n - 1} f^{n+1}_{d_n q'_n + i + lq_n, d_n q'_n + j + lq'_n}$$

$$\iota_{n,n+1}(f^n_{k,l}) = \sum_{i=0}^{b_n - 1} e^{n+1}_{a_n q_n + k + iq'_n, a_n q_n + l + iq'_n} + \sum_{j=0}^{d_n - 1} f^{n+1}_{k+jq'_n, l+jq'_n}$$

$$\iota_{n,n+1}(U_n) = \sum_{i=1}^{a_n q_n} u_i^{n+1} + \sum_{k=1}^{c_n q'_n} v_{d_n q'_n + k}^{n+1}$$
$$\iota_{n,n+1}(V_n) = \sum_{i=1}^{b_n q'_n} u_{a_n q_n + i}^{n+1} + \sum_{k=1}^{d_n q'_n} v_k^{n+1}$$

となる。

3 Main theorem

一般に $M_n \otimes C(\mathbf{T})$ 上の closable derivation δ は

$$\delta = AdW^* \circ (Id_n \otimes f\frac{d}{dt} + adx \otimes Id) \circ AdW$$

と書ける。但し、W は $M_n \otimes C^\infty(\mathbf{T})$ の unitary、$f \in C^\infty(\mathbf{T})$、$x \in M_n$、$Id_n, Id$ は $M_n, C(\mathbf{T})$ の identity operator とする。

実は、derivation δ の graph norm $\|\cdot\|_{\delta^p}$ は W と x によらずに全て同値になっていて、さらに f が invertible のときは f にもよらない。つまり、これらの graph norm 系による completion をとって得た Fréchet space は同型になる。だから、δ による smooth part $\cap_{p=0}^\infty \mathrm{Dom}(\delta^p)$ を考えるときは、$W = \mathbf{1}, x = 0, f = \mathbf{1}$ とした $\delta = Id \otimes \frac{d}{dt}$ という derivation を考えることで十分であることがわかる。

そこで、先程の $\mathcal{A}_n$ の unbounded derivation $\delta_{(n)}$ を

$$\delta_{(n)} = Id_n^1 \otimes \frac{d}{dt_1} \otimes Id_n^2 \otimes \frac{d}{dt_2}$$

として定義する。但し、Id_n^1, Id_n^2 は $C^*((e_{i,j}^n)), C^*((f_{k,l}^n))$ の Identity operator であり、$\frac{d}{dt_1}, \frac{d}{dt_2}$ は、$C^*(U_n), C^*(V_n)$ を $C(\mathbf{T})$ と同一視したときの通常の意味での derivation とする。また、この意味での $C^*(U_n), C^*(V_n)$ の smooth part をそれぞれ $C^*(U_n)^\infty$,$C^*(V_n)^\infty$ と書くことにする。

これにより、$\mathcal{A}_n$ に smooth part $\mathcal{A}_n^\infty$ を

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_n^\infty &= \bigcap_{p=0}^\infty \mathrm{Dom}(\delta_{(n)}^p) \\ &= \Big(C^*((e_{i,j}^n)) \otimes C^*(U_n)^\infty\Big) \oplus \Big(C^*((f_{k,l}^n)) \otimes C^*(V_n)^\infty\Big)\end{aligned}$$

と定義することができて、

$$\mathcal{A}_n^\infty \cong (M_{q_n} \otimes C^\infty(\mathbf{T})) \oplus \Big(M_{q'_n} \otimes C^\infty(\mathbf{T})\Big)$$

である。もちろん $\mathcal{A}_n^\infty$ は Fréchet *-algebra となっている。

さて、$\delta_{(n)}$ は embbedding $\iota_{n,n+1}$ と可換であるので（さらに derivation に unitary W や x, f が付いたとしても可換になることに注意。）、$\mathcal{A}_n^\infty$ の algebraic inductive limit $\mathcal{A}_\infty$ 上での $\{\delta_{(n)}\}$ の inductive limit derivation $\tilde{\delta}$ を得る。

また、$e_{1,1}^n$ などの Rieffel projection を構成する連続関数 f_1, g_1 を C^∞ 関数から選ぶことによって、$\mathcal{A}_n^\infty$ の generator $(e_{i,j}^n), (f_{k,l}^n), U_n, V_n$ は全て $\mathcal{A}_\theta^\infty$ の元としてとれる。このため、$\mathcal{A}_n^\infty \subset \mathcal{A}_\theta^\infty$ であり、$\iota_{n,n+1}(\mathcal{A}_n^\infty) \subset \mathcal{A}_{n+1}^\infty$ になっていることに注意する。

このとき次の Lemma が言える。

Lemma 1

任意の p, q に対し、ある自然数 N があって、$n \geq N$ に対して $\|\cdot\|_{(\frac{d}{dt_1})^{p+q}}$ と $\|\cdot\|_{\delta_1^p \circ \delta_2^q}$ は $C^*(U_n)^\infty$ 上同値であり、$\|\cdot\|_{(\frac{d}{dt_2})^{p+q}}$ と $\|\cdot\|_{\delta_1^p \circ \delta_2^q}$ は $C^*(V_n)^\infty$ 上同値である。

$\delta_1(V) = \delta_2(U) = 0$ であるため、奇妙に見えるかもしれない。これらは、embedding $\iota_{n,n+1}$ が、Cantor set を作るときのように、U や V の spectral projection を近似する $\mathcal{A}_n^\infty$ の projection $e_{i,i}^n, f_{k,k}^n$ を $\mathcal{A}_{n+1}^\infty$ の対角成分の中に「均等」にちらばしていくということにあると思われる。

この Lemma 1 から、

Lemma 2

$\|\cdot\|_{\tilde{\delta}^{p+q}}$ と $\|\cdot\|_{\delta_1^p \circ \delta_2^q}$ は $\mathcal{A}_\infty$ 上同値である。

という Lemma が導かれ、graph norm 系 $\{\|\cdot\|_{\tilde{\delta}^{p+q}}\}$ による completion をとることによって次の結論を得る。

Theorem 1

$\mathcal{A}_\theta^\infty$ は $\mathcal{A}_n^\infty$ の Fréchet *-inductive limit である。

4 Applications

この定理を Lemma にして $\mathcal{A}_\theta^\infty$ に関するデータ、例えば cyclic cohomology $H_\lambda^*(\mathcal{A}_\theta^\infty)$ や、$\mathcal{A}_\theta^\infty$ の diffeomorphism group $\mathrm{Diff}(\mathcal{A}_\theta^\infty)$ を極限の形で書

いていくことが考えられる。但し、$\varphi \in \mathrm{Diff}(\mathcal{A}_\theta^\infty)$ とは $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathcal{A}_\theta)$ であって、$\varphi(\mathcal{A}_\theta^\infty) = \mathcal{A}_\theta^\infty$ を満たす、という意味である。

cyclic cohomogy の S-map による剰余を考えて periodic cyclic cohomology を得るが、これは de Rham cohomology の非可換版とみなせる。（cyclic cohomogy についての詳細は [C1][C2] を参照。）

まず、$\mathcal{A}_n^\infty$ を $(M_{q_n} \otimes C^\infty(\mathbf{T})) \oplus \left(M_{q'_n} \otimes C^\infty(\mathbf{T})\right)$ と同一視する。$M_{q_n}, M_{q'_n}$ 上の tracial state を τ_n^1, τ_n^2 とし、$H_{PR}(C^\infty(\mathbf{T}))$ の generator σ_0, σ_1 を

$$H_{PR}^{even}(C^\infty(\mathbf{T})) = \mathbf{C}[\sigma_0] \qquad H_{PR}^{odd}(C^\infty(\mathbf{T})) = \mathbf{C}[\sigma_1]$$

とする。これらは

$$\sigma_0(f_1) = \int_{\mathbf{T}} f_1 dt \qquad \sigma_1(f_1, f_2) = \int_{\mathbf{T}} f_1 df_2$$

$(f_1, f_2 \in C^\infty(\mathbf{T}))$ であって、ただし $\sigma_0(\mathbf{1}) = 1$ を満たすように適当に Lebesgue measure を normarize しておくとする。

このとき，$\mathcal{A}_n^\infty$ の periodic cyclic cohomology $H_{PR}(\mathcal{A}_n^\infty)$ は

$$\begin{aligned} H_{PR}^{even}(\mathcal{A}_n^\infty) &= \mathbf{C}[\tau_n^1 \sharp \sigma_0] \oplus \mathbf{C}[\tau_n^2 \sharp \sigma_0] \\ H_{PR}^{odd}(\mathcal{A}_n^\infty) &= \mathbf{C}[\tau_n^1 \sharp \sigma_1] \oplus \mathbf{C}[\tau_n^2 \sharp \sigma_1] \end{aligned}$$

となる。

この時、$\iota_{n,n+1}$ が induce する $\mathbf{C}$-linear map

$$\iota_{n,n+1}^* : H_{PR}(\mathcal{A}_{n+1}^\infty) \to H_{PR}(\mathcal{A}_n^\infty)$$

は $M_2(\mathbf{C})$ の元として、

$$\iota_{n,n+1}^* = \begin{pmatrix} a_n \frac{q_n}{q_{n+1}} & b_n \frac{q'_n}{q_{n+1}} \\ c_n \frac{q_n}{q'_{n+1}} & d_n \frac{q'_n}{q'_{n+1}} \end{pmatrix}$$

と書かれる。特に $\iota_{n,n+1}^*$ は isomorphism である。そこで次の定理を得る。

Theorem 2

$\mathcal{A}_\theta^\infty$ の periodic cyclic cohomology $H_{PR}(\mathcal{A}_\theta^\infty)$ は、$(H_{PR}(\mathcal{A}_n^\infty), \iota_{n,n+1}^*)$ の projective limit になっている。

現在、特に $\mathrm{Diff}(\mathcal{A}_\theta^\infty)$ について考察中である。

参考文献

[C1] A.Connes. Noncommutative Geometry. Academic Press.

[C2] ______. Non-commutative differential geometry. I.H.E.S.No. 62,pp.41–144 (1985).

[D] K.R.Davidson. C^*-algebra by example. Fields Institute Monograph 6 A.M.S.

[EE] G.A.Elliott.,D.E.Evans. The structure of the irrational rotation C^*-algebras. Annals of Math.No. 138,pp.477–510 (1993).

[H] H.Higuchi. The smooth structure of noncommutative tori and its applications.

[L] R.Longo. Automatic relative boundedness of derivations in C^*-algebras. J.F.A.No. 34,pp.21–28 (1979).

[T] H.Takai. On a plobrem of Sakai in unbounded derivation. J.F.A.No. 43,pp.202–208 (1981).

[WO] N.E.Wegge-Olsen. K-theory and C^*-algebra. Oxford Univ.Press (1993).