数理解析研究所講究録
1078 巻 1999 年 167-173

Normalized tautological divisors of semi-stable vector bundles

中山 昇
京都大学数理解析研究所
E-mail: nakayama@kurims.kyoto-u.ac.jp

1. Normalized tautological divisor

非特異射影的複素代数多様体 X の上の有限階数 r の局所自由層（以下ベクトル束と同一視する）$\mathcal{E}$ に付随する $\mathbb{P}^{r-1}$ 束 $\pi\colon P=\mathbb{P}(\mathcal{E})\to X$ において,

$$\pi_*\mathcal{O}_P(H)\simeq\mathcal{E}$$

となる P の因子 (divisor) H を $\mathcal{E}$ に付随する自明因子 (tautological divisor) という. Normalized tautological divisor Λ は

$$\Lambda:=H-\frac{1}{r}\pi^*\det\mathcal{E}$$

で定義される $\mathbb{Q}$ 因子であり, また $r\Lambda$ は反相対的標準因子 (relative anti-canonical divisor) $-K_{P/X}$ と線型同値である. 次の結果が知られている ([NS], [M2, 3.1]).

定理 1. X が曲線のとき, 以下の三条件は同値.

(1) Λ は nef, すなわち任意の P 内の既約曲線 C に対して交点数 $\Lambda\cdot C$ が非負.

(2) P のすべての正因子 (effective divisor) は nef.

(3) $\mathcal{E}$ は半安定 (semi-stable).

X が曲線のときは, $\mathcal{E}$ が 半安定でなくても, Λ は擬正 (pseudo-effective) である. ところが X の次元が上がると様子が変わる.

例. X として射影平面 $\mathbb{P}^2$, $\mathcal{E}$ として接束を考える. P は二つの, $\mathbb{P}^2$ 上の $\mathbb{P}^1$ 束構造を持つが, 直線の引き戻しをそれぞれ L_1, L_2 と書くことにすると, 自明因子 H は L_1+L_2 に線型同値であり, Λ はたとえば, $L_2-(1/2)L_1$ に $\mathbb{Q}$ 線型同値. 交点数 $\Lambda\cdot L_2^2=-1/2$ ゆえ Λ は擬正ではない.

また Λ が nef のときは, $\mathcal{E}$ はかなり限定される.

定理 2. 以下の三条件は同値.

(1) Λ は nef.

(2) ある豊富因子 (ample divisor) A について, $\mathcal{E}$ は A 半安定であり, Chern 類の等式

$$(c_2(\mathcal{E}) - \frac{r-1}{2r}c_1^2(\mathcal{E})) \cdot A^{d-2} = 0$$

が成り立つ. ただし $d = \dim X$.

(3) 部分ベクトル束による包含列

$$0 = \mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{E}_l = \mathcal{E}$$

であって, 各商ベクトル束 $\mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i-1}$ は射影的に平坦な Hermite 計量を持ち, さらに平均化された Chern 類

$$\frac{1}{\operatorname{rank} \mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i-1}} c_1(\mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i-1})$$

は $1 \leq i \leq l$ によらずにすべて数値的に同値, となるものが存在する.

この定理は安定ベクトル束の Hermitian-Einstein 計量の存在定理から導かれる ([NS], [MR1], [MR2], [D], [UY1], [UY2], [BS]).

では Λ が擬正のときには $\mathcal{E}$ はどの程度限定されるだろうか?

定理 3. 豊富因子 A について, $\mathcal{E}$ が階数 2 の A 半安定ベクトル束であり, Λ が擬正と仮定する. このとき以下の三つの場合を除いて Λ は nef である.

(A) $M_1 \cdot A^{d-1} = M_2 \cdot A^{d-1}$ かつ

$$\mathcal{E} \simeq \mathcal{O}_X(M_1) \oplus \mathcal{O}_X(M_2)$$

となる因子 M_1, M_2 が存在する.

(B) 不分岐二重被覆 $\tau\colon Y \to X$ と,

$$\mathcal{E} \simeq \tau_* \mathcal{O}_Y(M)$$

となる Y の因子 M が存在する.

(C) 層の完全系列

$$0 \to \mathcal{O}_X(L_1) \to \mathcal{E} \to I\mathcal{O}_X(L_2) \to 0,$$

であって, L_1, L_2 は互いに数値的に同値な因子であり, イデアル層 I は余次元 2 の subscheme を定義するもの, が存在する.

この三つの場合にも Λ は擬正である．この証明のあらすじを次の章で述べる．

系 4. 代数的 $K3$ 曲面の接束に付随する自明因子は擬正でない．

なぜなら，擬正とすると，$H^3 = -c_2 = -24 < 0$ より $H = \Lambda$ は nef ではないので，定理 **3** の三つの場合のどれかになる．しかしこのベクトル束は任意の豊富因子に対して安定 ([Y]) なので (B) の場合しか残らないが，この場合でも単連結なことと矛盾する．なお，小林 [K, Theorem C] では $\kappa(H) = -\infty$ が証明されている．またこのベクトル束は極小曲面の余接束でもあるので，宮岡 [M1] の意味で generically semi-positive である．

系 5. 非特異代数曲面上の階数 2 のベクトル束はその normalized tautological divisor が擬正でなければ，ある豊富因子について半安定である．

証明．ベクトル束 $\mathcal{E}$ に対して主張が成り立たないと仮定する．すると完全系列

$$0 \to \mathcal{L} \to \mathcal{E} \to I_Z\mathcal{M} \to 0$$

で，$\mathcal{L}, \mathcal{M}$ は直線束，I_Z は 0 次元以下の subscheme Z のイデアル層で，任意の豊富因子 A について交点数 $(\mathcal{L} - \mathcal{M}) \cdot A > 0$ が成り立つ，ものが存在する．とくに，$\mathcal{L} - \mathcal{M}$ は擬正である．すると

$$\Lambda = H - \frac{1}{2}\pi^*(\mathcal{L} + \mathcal{M}) = H - \pi^*\mathcal{L} + \frac{1}{2}\pi^*(\mathcal{L} - \mathcal{M}),$$

より Λ は擬正となり，矛盾． □

このように Λ が擬正でない方が半安定に近い性質なのかもしれない．

2. 定理 3 の証明のあらすじ

定理 **2** より，この三つの場合でなければ Chern 類の等式

$$(c_2(\mathcal{E}) - \frac{r-1}{2r}c_1^2(\mathcal{E})) \cdot A^{d-2} = 0$$

が成り立つことを示せばよい．ここで擬正因子 Λ の σ 分解 ([N1]) $\Lambda = P + N$ を考える．すると

$$N \sim_{\mathrm{num}} b\Lambda + \pi^*D, \quad P \sim_{\mathrm{num}} (1-b)\Lambda - \pi^*D,$$

となる X 上の $\mathbb{R}$ 因子 D と実数 $0 \le b \le 1$ がある. ただし $\sim_{\mathrm{num}}$ は数値的同値関係を表わす. 十分大きな自然数 m と線型系 $|mA|$ の中の $d-1$ 個の一般の元 $A_1, A_2, \ldots, A_{d-1}$ を取り, 非特異曲線

$$C = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{d-1}$$

を考える. Mehta と Ramanathan の結果 [MR1] により, 制限 $\mathcal{E}_{|C}$ は半安定である. 特に, もし, X のある $\mathbb{R}$ 因子 E に対して

$$(\Lambda + \pi^* E)_{|\pi^{-1}(C)}$$

が擬正ならば, $E \cdot A^{d-1} \ge 0$ である. ところで, $N_{|\pi^{-1}(C)}$ と $P_{|\pi^{-1}(C)}$ は擬正だから, $b > 0$ ならば $D \cdot A^{d-1} \ge 0$ であり, $b < 1$ ならば $D \cdot A^{d-1} \le 0$ である.

まず $b < 1$ の場合を考える. いま P は movable (cf. [N1]) なので P^2 は余次元 2 の擬正な輪体 (pseudo-effective cycle) である. つまり $N^2(P)$ の元として, 正の代数的輪体の表わす類の極限になっている. したがって,

$$\pi_*(P^2) = -2(1-b)D$$

は X の擬正 $\mathbb{R}$ 因子である. もしもさらに $b > 0$ ならば $D \cdot A^{d-1} = 0$ なので D は数値的に自明. すると $N \sim_{\mathrm{num}} b\Lambda$ と $P \sim_{\mathrm{num}} (1-b)\Lambda$ が成り立ち, 矛盾. ゆえに $b = 0$ である. したがって, $-N \sim_{\mathrm{num}} -\pi^* D$ が擬正なので, $N = 0$ を得る. 一方,

$$\Lambda^2 = P^2 = -\pi^*(c_2(\mathcal{E}) - \frac{r-1}{2r} c_1^2(\mathcal{E}))$$

は擬正なので, 先ほどの Chern 類の等式が成り立つ.

残った $b = 1$ の場合を扱う. 今度は $P \sim_{\mathrm{num}} -\pi^* D$ が movable ということと, $b > 0$ から $D \cdot A^{d-1} \ge 0$ が従うので, D と P は数値的に自明となる. 既約分解

$$N = \sum \sigma_i \Gamma_i$$

を考える. 各 i に対して

$$\Gamma_i \sim_{\mathbb{Q}} b_i \Lambda + \pi^* D_i$$

となる非負整数 b_i と $\mathbb{Q}$ 因子 D_i がある. ただし $\sim_{\mathbb{Q}}$ は $\mathbb{Q}$ 線型同値を表わす. 因子 $\Lambda - \sigma_i \pi^* D_i$ は擬正であり, $\mathcal{E}_{|C}$ は半安定であり, また

$$D \sim_{\mathbb{Q}} \sum \sigma_i D_i$$

なので, 各 i に対して $D_i \cdot A^{d-1} = 0$ および $b_i > 0$ を得る. 次の三つの場合が考えられる.

(I) $b_i \geq 2$ となる i がある.

(II) N は少なくとも二つの既約成分を持ち, 各 i について $b_i = 1$.

(III) N はただ一つの既約成分 Γ_1 しか持たず, $b_1 = 1$.

(I) の場合. $b_1 \geq 2$ と仮定してよい. $Y = \Gamma_1$ とおくと, $\pi\colon Y \to X$ は次数 b_1 の generically finite な射である. 随伴公式より,

$$K_Y \sim \pi^* K_X + ((b_1 - 2)\Lambda + \pi^* D_1)_{|Y}$$

を得る. ゆえに分岐因子 $R_{Y/X}$ は $((b_1 - 2)\Lambda + \pi^* D_1)_{|Y}$ と線型同値. $R_{Y/X}$ は正因子なので,

$$\pi_*(((b_1 - 2)\Lambda + \pi^* D_1)_{|Y}) = \pi_*(((b_1 - 2)\Lambda + \pi^* D_1) \cdot (b_1 \Lambda + \pi^* D_1)) = 2(b_1 - 1)D_1$$

は X の正因子である. いま $D_1 \cdot A^{d-1} = 0$ だったので $D_1 \sim_{\mathbb{Q}} 0$. ゆえに $Y = \Gamma_1 \sim_{\mathbb{Q}} b_1 \Lambda$. σ 分解の定義から

$$\sigma_i = \sigma_{\Gamma_i}(\Lambda) = \frac{1}{b_1} \sigma_{\Gamma_i}(Y)$$

なので, N はただ一つの既約成分 $Y = \Gamma_1$ しか持たず, $N = (1/b_1)Y$. さて, 正因子 $R_{Y/X}$ と $(b_1 - 2)\Lambda_{|Y}$ は $\mathbb{Q}$ 線型同値である. 因子 $H + m\pi^* A$ が豊富となる自然数 m を選ぶ. すると,

$$(*) \quad \pi_*((H + m\pi^* A) \cdot ((b_1 - 2)\Lambda) \cdot Y) = b_1(b_1 - 2)\pi_*(H \cdot \Lambda^2) = -b_1(b_1 - 2)\Delta_2(\mathcal{E})$$

は擬正輪体である. ただしここで

$$\Delta_2(\mathcal{E}) := c_2(\mathcal{E}) - \frac{r-1}{2r} c_1^2(\mathcal{E})$$

とおいた. もし $b_1 \geq 3$ ならば, Bogomolov の不等式より, $\Delta_2(\mathcal{E}) = 0$ なので定理 **2** から Λ が nef となってしまい, 矛盾. したがって $b_1 = 2$. 射 $\pi\colon Y \to X$ の正の次元を持つ fiber は $\mathbb{P}^1$ しかないので, 式 $(*)$ より分岐因子 $R_{Y/X} = 0$. このことから $Y \to X$ が不分岐二重被覆であることがわかる. 完全系列

$$0 \to \mathcal{O}_P(H - Y) \to \mathcal{O}_P(H) \to \mathcal{O}_Y(H) \to 0$$

から同型 $\mathcal{E} \simeq \pi_* \mathcal{O}_Y(H)$ が導かれ, $\mathcal{E}$ が (B) の場合になっていることがわかる.

さらに調べていくと, (II), (III) はそれぞれ (A), (C) の場合に対応することがわかる.

3. 問題

(1) 定理 **3** を階数の高い場合にも調べてみること．証明の σ 分解だけではアイデアが足りないように思われる．

(2) X の $\mathbb{R}$ 因子 D で $H+\pi^*D$ が nef になるもの，または擬正になるものの全体を $N^1(X)$ の部分集合として記述する．最初の例では $\deg D \geq -1$ と $H+\pi^*D$ が nef（または擬正）が同値な条件である．

(3) X が曲面で $\mathcal{E}$ が階数 2 のとき，任意の，非特異代数曲面からの全射 $f\colon Y \to X$ と Y の任意の豊富因子 A に対して，$f^*\mathcal{E}$ が A 半安定ならば，Λ は nef か?

(4) 特に，$K3$ 曲面の接束の場合 P に無数の既約因子 Γ があって制限 $H_{|\Gamma}$ が擬正でない，といえるか?

References

[BS] S. Bando and Y.-T. Siu, Stable sheaves and Einstein-Hermitian metrics, in *Geometry and Analysis on Complex Manifold, Festschrift for Prof. S. Kobayashi's 60th Birthday* (T. Mabuchi, J. Noguchi and T. Ochiai, eds.), 1994, World Scientific, 39–50.

[D] S. Donaldson, Anti-self-dual Yang-Mills connections over complex algebraic surfaces and stable vector bundles, Proc. London Math. Soc. **50** (1985), 1–26.

[K] S. Kobayashi, First Chern class and holomorphic tensor fields, Nagoya Math. J., **77** (1980), 5–11.

[MR1] V. B. Mehta and A. Ramanathan, Semi-stable sheaves on projective varieties and their restriction to curves, Math. Ann., **258** (1982), 213–224.

[MR2] ———, Restriction of stable sheaves and representations of the fundamental group, Invent. Math. **77** (1984), 163–172.

[M1] Y. Miyaoka, Deformation of a morphism along a foliation, in *Algebraic Geometry Bowdoin 1985*, Proc. Symp. Pure Math. vol. **46** (1987), 245–268.

[M2] ———The Chern classes and Kodaira dimension of a minimal variety, in *Algebraic Geometry Sendai 1985*, Adv. Studies in Pure Math., **10** (1987) Kinokuniya and North-Holland, 449–476.

[N1] N. Nakayama, Zariski-decomposition and abundance, preprint RIMS-1142, 1997.

[N2] ———, Normalized tautological divisors of semi-stable vector bundles, preprint RIMS-1214, 1998.

[NS] M. S. Narasimhan and C. S. Seshadri, Stable and unitary vector bundles on a compact Riemann surface, Ann. of Math., **82** (1965), 540–567.

[O] T. Oomae, 修士論文, 京都大学 1998.

[UY1] K. Uhlenbeck and S. T. Yau, On the existence of Hermitian-Yang-Mills connections in stable vector bundles, Comm. Pure and Appl. Math., **39** (1986), S257–S293.

[UY2] ———, A note of our previous paper: [UY1], Comm. Pure and Appl. Math., **42** (1989), S703–S707.

[Y] S. T. Yau, On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge–Ampère equations, I, Comm. Pure and Appl. Math., **31** (1978), 339–411.