数理解析研究所講究録
1079 巻 1999 年 224-232

区間効率値による DEA モデル

大阪府立大学 円谷　友英 Tomoe Entani
大阪府立大学 前田　豊 Yutaka Maeda
大阪府立大学 田中　英夫 Hideo Tanaka
〒 599-8531　大阪府堺市学園町 1-1
Phone 0722-54-9354
Fax 0722-54-9915
e-mail {maeda,entani,tanaka}@ie.osakafu-u.ac.jp

和文概要　本論文では，区間効率値による DEA モデルを提案する．従来の DEA は，当該事業体に対して，仮想出力の仮想入力に対する比の相対的な最大値を効率値として評価する方法であり，各事業体にとって最も有利な重み付け評価を行う手法である．この方法に対して，当該事業体にとって最も不利な評価を行うという立場で，Inverted DEA が提案されている．このモデル内で求められる非効率値は，従来の DEA における効率値とは本質的に無関係である．そこで，本研究では，当該事業体にとって最も不利な評価を行うという立場から従来の DEA における最大効率値に対しての最小効率値を求める最適化問題を定式化し，真の効率値がこの上下界値で形成される区間内に存在すると仮定して，DEA をモデル化する．さらに，データが区間となる場合の区間効率値による DEA を定式化し，ファジィデータを取り扱えるように拡張する．

1　はじめに

包絡分析法 (Data Envelopment Analysis: DEA) [1,2] は，多入力多出力システムにおける効率性の評価手法であり，各事業体に対してウェイト変数による仮想出力値の仮想入力値に対する比の相対的な最大値として効率値を定式化している．しかし，従来の DEA では効率的であると判断される事業体の中には優秀というよりもむしろ特異的であるものが存在する．また，入出力の次元数に対して，効率的であると判断される事業体の数が組合わせ数的に増加する傾向がある．この方法に対して，事業体を最も不利に評価するという立場で IDEA(Inverted Data Envelopment Analysis)[3,4] が提案されている．しかし，IDEA と DEA との定式化の方法が異なるために，非効率値と効率値との関係が不明確である．むしろ，本質的には無関係である．このことは，(非) 効率値を求めるための計画問題の目的関数や制約条件が異なることから生じる．そこで，本研究では，DEA 効率値の本質的な部分を分析し，目的関数と制約条件をともに DEA と同じ形式にし，最小化問題を定式化することにより，効率値の下界値を求め，効率値を区間値として解析する手法を提案する．さらにデータの変動を考慮して，データ自体が区間値となる場合を定式化する．そして，分解定理を用いてファジィデータを取り扱えるように拡張する．

2　DEA と IDEA

DEA は入力に対する出力の比を効率値として，分析対象である事業体 DMU(Decision Making Unit) にもっとも有利な立場からウェイト付けし，その効率性を他のすべての DMU の入出力データから相対的に評価する手法である．多入力多出力を取り扱うため，ウェイト付けされた入力の和を仮想入力，ウェイト付けされた出力の和を仮想出力とみなし，ウェイトベクトルを変数とし，分析対象である DMU の (仮想出力)/(仮想入力) を他の DMU についての同様の比が 1 以下となるという制約のもとで最大化する．DMU の数を n と仮定する．m 次元入力データ $X \in \Re^{m\times n}$ と k 次元出力データ $Y \in \Re^{k\times n}$ をもとに $DMU_o\,(o \in \{1,\ldots,n\})$ の効率性を測定する CCR モデルは DEA の基本モデルであり，次のように定式化される．

$< FP_o >$

$$\left.\begin{array}{rll} \max\limits_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}} & \dfrac{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_o}{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_o} & \\ \text{subject to} & \dfrac{\boldsymbol{u}^tY}{\boldsymbol{v}^tX} & \le 1 \\ & \boldsymbol{u} & \ge 0 \\ & \boldsymbol{v} & \ge 0 \end{array}\right\} \qquad (1)$$

ここで，$\boldsymbol{v} \in \Re^m$，$\boldsymbol{u} \in \Re^k$ は，入出力ベクトルに対する入出力ウェイトベクトルを表している．この分数計画問題は目的関数の分母を 1 に制限することにより，次の線形計画問題に変形できる．

< CCR_o >

$$\left.\begin{array}{lrl} \max\limits_{\boldsymbol{u}} & \boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_o & \\ \text{subject to} & \boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_o & =1 \\ & -\boldsymbol{v}^tX+\boldsymbol{u}^tY & \leq 0 \\ & \boldsymbol{u} & \geq 0 \\ & \boldsymbol{v} & \geq 0 \end{array}\right\} \quad (2)$$

上の線型計画問題の最適目的関数値が1のとき，そのDMUは効率的であるといい，それ以外のとき効率的でないという．また，(1)式と(2)式は同じ最適解を導くが，(1)式では最適解を導くウェイト変数$\boldsymbol{u}^*,\boldsymbol{v}^*$は，$(\boldsymbol{u}^*,\boldsymbol{v}^*)=k(\boldsymbol{u}',\boldsymbol{v}')$という形式で得られる．ここで，$k$は0でない実数値である．つまり，このようなウェイト変数は無限に存在するが，(2)式では，$\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_o=1$という条件があるために，基本的には1つのウェイト変数に定まる．このモデルでは次の生産可能集合が仮定されている．

$$P=\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|\boldsymbol{x}\geq X\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{y}\leq Y\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\lambda}\geq 0\} \quad (3)$$

これは，データ空間上で，入力がより大きくて出力がより小さいDMUは生産可能となることを表わしている．

DEAがDMU_oに対して最も有利にウェイト付け評価を行うのと対照的に，IDEAは最も不利にウェイト付け評価を行うように定式化された計画問題である．DEAが（仮想出力/仮想入力）を最大化するのに対して，山田ら[3]は（仮想入力/仮想出力）を最大化するようにIDEAの目的関数を設定し，次のように定式化した．

< $I-FP_o$ >

$$\left.\begin{array}{lll} \max\limits_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}} & \dfrac{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_o}{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_o} & \\ \text{subject to} & \dfrac{\boldsymbol{v}^tX}{\boldsymbol{u}^tY} & \leq 1 \\ & \boldsymbol{u} & \geq 0 \\ & \boldsymbol{v} & \geq 0 \end{array}\right\} \quad (4)$$

この分数計画問題もCCRモデルと同様に目的関数の分母を1とし制約に加えることで，線形計画問題に変形され，最適値が求められる．

< $I-CCR_o$ >

$$\left.\begin{array}{lrl} \max\limits_{\boldsymbol{v}} & \boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_o & \\ \text{subject to} & \boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_o & =1 \\ & \boldsymbol{v}^tX-\boldsymbol{u}^tY & \leq 0 \\ & \boldsymbol{u} & \geq 0 \\ & \boldsymbol{v} & \geq 0 \end{array}\right\} \quad (5)$$

この最適目的関数値が1となるDMUを非効率的と呼び，それ以外のDMUは非効率的でないといわれる．このモデルで，(3)式の生産可能集合を定義すると，出力が0のDMUが存在することになり，そのようなDMUと比較すると，すべてのDMUの目的関数値が1より小さくなる．従って，このモデルの生産可能集合は(3)式とは別の形式となり次式で定義される．

$$P_I=\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|\boldsymbol{x}\leq X\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{y}\geq Y\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\lambda}\geq 0\} \quad (6)$$

ここで，1入力2出力のデータを用いて，DEAとIDEAについて説明する．データは表1のように与えられているとする．視覚的に比較しやすいようにすべてのDMUの入力は1に基準化されている．表2にDEAによる効率値とIDEAによる非効率値を示す．図1に横軸に出力1/入力を，縦軸に出力2/入力をとり，表1のデータを示し，DEAの効率フロンティアとIDEAの非効率フロンティアを示す．実線の下側がDEAの生産可能集合であり，破線の上側がIDEAの生産可能集合となる．

表1: データ

DMU	input $\boldsymbol{x}$	output1 $\boldsymbol{y}_1$	output2 $\boldsymbol{y}_2$
A	1	1	8
B	1	2	3
C	1	2	6
D	1	3	3
E	1	3	7
F	1	4	2
G	1	4	5
H	1	5	2
I	1	6	2
J	1	7	1

この数値例では，DEAより，A,E,Jが効率的で，それ以外は効率的でないと判断される．IDEAにより，A,B,F,Jが非効率的であると判断され，それ以外は非効率的でないと判断される．A,E,J,F,Bは入出力空間でDMUの凸包を形成している．A,Jは効率的であり非効率的であると評価される特異的なDMUである．DEAでは，図1に示されるように，評価関数となる線形関数のウェイトを変数として無限点位置から，O点へとその線形関数を移動させて，最初に交わるDMUを効率的と判断する手法である．この方法では，すべてのDMUの凸包の上側の部分が効率的フロンティアとして抽出されることになる．これに対してIDEAでは，同じように評価関数となる線形関数のウェイトを変数として，O点から無限点へその線形関数を移動させて，最初に

表 2: 効率値と非効率値

DMU	efficiency	inefficiency
A	1.000	1.000
B	0.522	1.000
C	0.824	0.813
D	0.652	0.889
E	1.000	0.591
F	0.696	1.000
G	0.957	0.571
H	0.826	0.909
I	0.957	0.833
J	1.000	1.000

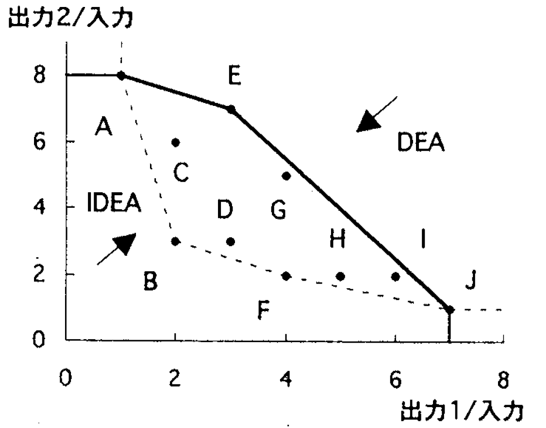

図 1: DEA と IDEA による効率値と非効率値

交わる DMU を非効率的と判断しようとする方法である．この方法ではすべての DMU の凸包の下側の部分が抽出されることになる．つまり，DEA と IDEA では違う方向から評価関数を近づけることにより，DMU の凸包の一部を 1 という値によって抽出する方法である．この効率値と非効率値とは本質的に関係がない．

3 区間効率値モデル

IDEA では，有利な立場で評価する DEA とは異なる方向から評価関数を近づけることにより，DMU にとって不利な立場の評価を行なっている．そこで，同じ方向から評価関数を近づけることにより，有利な立場と不利な立場からの評価を行うことを考える．評価関数を DEA の場合と同じ向き（例えば図 1 では，無限点位置から O 点に向かって）に近づけ，その傾きの変化し得るすべての範囲で効率値を求めると，それが効率値のとり得る範囲となる．CCR モデル (1) 式では，与えられたデータを基にして効率値を求めることは，入出力ウェイトを変数として（仮想出力/仮想入力）の値を最大化することであった．これに対し同じ立場で最も不利な観点から (1) 式の目的関数の最小値を直接求めると，出力ウェイトベクトル $\boldsymbol{u}$ が 0 ベクトルで入力ウェイトベクトル $\boldsymbol{v}$ が 0 ベクトル以外の任意のベクトルであるときに（仮想出力/仮想入力）の最小値が 0 となってしまう．従って目的関数, 制約式をまったく変更しないで最小効率値を求めることはできない．そこで，DEA が相対的な効率値評価方法という意味から，すべての DMU に対する（仮想出力/仮想入力）の最大値を基準にして，DMU_o の（仮想出力/仮想入力）を測り，DMU_o にとって最も有利な評価という観点からその比を最大化するというように DEA を解釈する．これが，CCR モデルの本来の効率値の意味であると考えることができるので，(1) 式の原問題を以下のように考える．

$$
\left.\begin{array}{lll}
\max\limits_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}} & \theta_o^{E*} & = \dfrac{\frac{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_o}{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_o}}{\max\limits_j \frac{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_j}{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_j}} \\
\text{subject to} & \boldsymbol{u} & \geq 0 \\
 & \boldsymbol{v} & \geq 0
\end{array}\right\} \quad (7)
$$

目的関数の分母を 1 とし，制約条件に加えると，(7) 式は以下のように書き換えられる．

$$
\left.\begin{array}{lll}
\max\limits_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}} & \theta_o^{E*} & = \frac{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_o}{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_o} \\
\text{subject to} & \max\limits_j \dfrac{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_j}{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_j} & = 1 \\
 & \boldsymbol{u} & \geq 0 \\
 & \boldsymbol{v} & \geq 0
\end{array}\right\} \quad (8)
$$

(8) 式を (1) 式と比べると，明らかに (8) 式の制約条件のほうが (1) 式より強いものとなっている．しかし，ここで (8) 式を解くために次の定理を用いる．

定理 1　(1) 式の計画問題と (8) 式の計画問題は同値である．

証明　(1) 式の解を θ_1，(8) 式の解を θ_2 とする．(1) 式の制約式により限定されるウェイト空間の境界部分が (8) 式の制約式によるウェイト空間であるので，(8) 式の制約条件が満たされると (1) 式 の制約条件が満たされる．よって，$\theta_1 \geq \theta_2$ が成り立つ．ここで，$\theta_1 > \theta_2$ とすると，$\theta_1 \neq \theta_2$ となる θ_1 を導くウェイト u，v に対して，すべての j について $\dfrac{\boldsymbol{u}_1{}^t\boldsymbol{y}_j}{\boldsymbol{v}_1{}^t\boldsymbol{x}_j} < 1$ となる．つまり，$\max\limits_j \dfrac{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_j}{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_j} = \dfrac{\boldsymbol{u}_1{}^t\boldsymbol{y}^*}{\boldsymbol{v}_1{}^t\boldsymbol{x}^*} = 1 - \varepsilon$ （ただし，$\varepsilon > 0$）となる ε が存在する．しかし，この $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*)$ に対して

$u_1{}' = \frac{u_1}{1-\epsilon}$ となるようなウェイトベクトル $(u_1{}', v_1)$ に対する効率値を θ' とすると，$\theta' = \max_j \frac{u'_1{}^t y_j}{v_1{}^t x_j} = 1$ となり，DMU_o の効率値 θ' は，$\theta_1 < \theta'$ となる．これは，θ_1 の最適性に矛盾する．従って，$\theta_1 > \theta_2$ とはならないので，$\theta_1 = \theta_2$ となる．

定理1より，(1) 式と (8) 式は同じ解を持つので，効率値の上界は，(2) 式を解くことで得られる．ここで，(1) 式と (7) 式の相違点について考察する．(1) 式と (7) 式は等しい目的関数値 θ^* をもつが，得られる入出力ウェイト u, v は異なる．(1) 式からは，最適解に対しての入出力ウェイト u, v に関しての比 $(u_1 : \cdots : u_k : v_1 : \cdots : v_m)$ が得られるが，(7) 式では出力ウェイト u に関しての比 $(u_1 : \cdots : u_k)$ と入力ウェイト v に関しての比 $(v_1 : \cdots : v_m)$ が別々に得られるのである．従って，(1) 式で限定されるウェイト空間は (7) 式より小さくなっているといえる．(7) 式に $\frac{u^t y_j}{v^t x_j} = 1$ という制約を加え (8) 式に変形すると，最適解に対しての入出力ウェイト u, v に関しての比 $(u_1 : \cdots : u_k : v_1 : \cdots : v_m)$ が得られる．結局，最適解を導くウェイト変数を u^*, v^* と表わすと，

(2) 式のu^*, v^* $\subseteq$ (1) 式と (8) 式のu^*, v^* $\subseteq$ (7) 式のu^*, v^*

となる．

次に，効率値の下界は，(7) 式の最小化を考えることで以下のように定式化される．

$$\left.\begin{array}{lll} \min\limits_{u,v} & \theta^E_{o\,*} & = \dfrac{\frac{u^t y_o}{v^t x_o}}{\max\limits_j \frac{u^t y_j}{v^t x_j}} \\ \text{subject to} & u & \geq 0 \\ & v & \geq 0 \end{array}\right\} \qquad (9)$$

目的関数の分母を1とすると，(9) 式は以下のようになる．

$$\left.\begin{array}{lll} \min\limits_{u,v} & \theta^E_{o\,*} & = \frac{u^t y_o}{v^t x_o} \\ \text{subject to} & \max\limits_j \frac{u^t y_j}{v^t x_j} & = 1 \\ & u & \geq 0 \\ & v & \geq 0 \end{array}\right\} \qquad (10)$$

(10) 式は，線型計画問題に変形することができないので，最小化問題を解くために，すべての j について，

$$u^t y_j / v^t x_j = 1$$

とみなして，以下の n 個の問題を考える．

$$\left.\begin{array}{lll} \min\limits_{u,v} & \theta_{oj} & = \frac{u^t y_o}{v^t x_o} \\ \text{subject to} & \frac{u^t y_j}{v^t x_j} & = 1 \\ & u & \geq 0 \\ & v & \geq 0 \end{array}\right\} \quad (j = 1, ..., n) \qquad (11)$$

これに $v^t x_o = 1$ という制約を加えて線型計画問題化すると，すべての j について次の問題を作ることができる．

$$\left.\begin{array}{lll} \min\limits_{u} & \theta_o j^E & = u^t y_o \\ \text{subject to} & v^t x_o & = 1 \\ & u^t y_j - v^t x_j & = 0 \\ & u & \geq 0 \\ & v & \geq 0 \end{array}\right\} \quad (j = 1, ..., n) \qquad (12)$$

これらの n 個の問題を解き，その最小値が効率値の下界となる．$j = o$ のとき，$u^t y_o$ の値は1となるので，数学的には次のように書くことができる．

$$\theta^E_{o\,*} \;=\; 1 \wedge \min_{j \neq o} \; \theta_o j^E \qquad (13)$$

一般的に (2) 式の線型計画問題はデータの数に伴って，制約式の数が増えるので, 通常はその双対問題を解くことになる．一方，(12) 式の線型計画問題は，制約式の数が決まっているので，容易に解くことができるが，n-1 個の問題を解かないとその最小値は求められない. 以上の議論から，DMU_o の効率値は，$\theta^E_{o\,*}$ から $\theta^{E^*}_o$ の間の値をとることになる．(2) 式と (13) 式より，DMU_o について，効率値の上界と下界を求めることが可能となり，その入出力ベクトルによる区間効率値は以下のように与えられる．

$$\theta^E_o \in \left[\theta^E_{o\,*}, \theta^{E^*}_o\right] \qquad (14)$$

ここで，これら区間効率値の上下界を求める線型計画問題では，共に (3) 式の生産可能集合が仮定されている．

区間効率値を用いて評価する場合，上界，下界の両方が他の DMU に劣っていない DMU を効率的であるといい，それ以外を効率的ではないという．区間効率値の下界は用いられている入出力データのうち各々が最良となる点を仮定したときその点との類似度を表わしている．よって特異な DMU は上界が1となるが，下界が小さくなるので効率値の区間が大きくなる傾向がある．

同様の観点で，IDEA の非効率値も区間値として定式化できる．つまり，(4) 式の原問題を次のように考え

る．非効率値をすべての DMU に対する（仮想入力/仮想出力）の最大値を基準にして，DMU_o の（仮想入力/仮想出力）を測り，DMU_o にとって最も不利な評価という観点からその比を最大化するというように IDEA を解釈する．

$$\left.\begin{array}{llll} \max\limits_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}} & \theta_o^{IE*} & = & \dfrac{\frac{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_o}{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_o}}{\max\limits_j \dfrac{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_j}{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_j}} \\ \text{subject to} & \boldsymbol{u} & \geq 0 \\ & \boldsymbol{v} & \geq 0 \end{array}\right\} \quad (15)$$

目的関数の分母を 1 とし，制約条件に加えると，(15) 式は以下のように書き換えられる．

$$\left.\begin{array}{lll} \max\limits_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}} & \theta_o^{IE*} & = \frac{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_o}{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_o} \\ \text{subject to} & \max\limits_j \frac{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_j}{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_j} & = 1 \\ & \boldsymbol{u} & \geq 0 \\ & \boldsymbol{v} & \geq 0 \end{array}\right\} \quad (16)$$

ここで，定理 2 を得る．

定理 2　(4) 式の計画問題と (16) 式の計画問題は同値である．

証明は定理 1 の証明と同様である．従って，区間非効率値の上界は (5) 式を解くことによって得られる．

区間非効率値の下界値 $\theta_{o\ *}^{IE}$ も同様に，(15) 式の最小化により定式化される．

$$\left.\begin{array}{llll} \min\limits_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}} & \theta_{o\ *}^{IE} & = & \dfrac{\frac{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_o}{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_o}}{\max\limits_j \dfrac{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_j}{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_j}} \\ \text{subject to} & \boldsymbol{u} & \geq 0 \\ & \boldsymbol{v} & \geq 0 \end{array}\right\} \quad (17)$$

目的関数の分母を 1 とし，制約条件に加えると，(17) 式は以下のように書き換えられる．

$$\left.\begin{array}{lll} \min\limits_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}} & \theta_{o\ *}^{IE} & = \frac{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_o}{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_o} \\ \text{subject to} & \max\limits_j \frac{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_j}{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_j} & = 1 \\ & \boldsymbol{u} & \geq 0 \\ & \boldsymbol{v} & \geq 0 \end{array}\right\} \quad (18)$$

(18) 式は線型計画問題に変形できないので，すべての $j \neq o$ について $\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_j/\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_j = 1$ とみなして，$\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_o = 1$ とおいて，以下の n-1 個の線型計画問題を考える．

$$\left.\begin{array}{lll} \min\limits_{\boldsymbol{v}} & \theta_{oj}^{IE} & = \boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_o \\ \text{subject to} & \boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_o & = 1 \\ & \boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_j & = 0 \\ & \boldsymbol{u} & \geq 0 \\ & \boldsymbol{v} & \geq 0 \end{array}\right\} (j \neq o) \quad (19)$$

ここで，区間非効率値の下界は，以下のように得られる．

$$\theta_{o\ *}^{IE} \ = \ 1 \wedge \min_{j \neq o} \ \theta_{oj}^{IE} \quad (20)$$

よって，非効率値についても上界と下界を求めることができ，区間非効率値は次のようになる．

$$\theta_o^{IE} \in \left[\theta_{o\ *}^{IE}, \theta_o^{IE*}\right] \quad (21)$$

表 1 に示すデータを用いて，区間効率値と区間非効率値を求め表 3 と図 2,3 に示し，考察を行う．この数値例の場合，区間効率値の下界は出力 1 と出力 2 の各々が最大値である $(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2) = (7,8)$ という仮想 DMU と，区間非効率値の下界は出力 1 と出力 2 の各々が最小値である $(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2) = (1,1)$ という仮想 DMU との類似度となっている．特異な DMU である A,J は区間効率値と区間非効率値の両方の上界がともに最大の 1.000 となり，効率値，非効率値の区間が大きくなっている．図 1 より，A は出力 1 の，J は出力 2 のパフォーマンスが良くないことがわかる．区間効率値の下界の最大値の 0.571 をとる DMU は G で，区間効率値から評価すると，G は効率的な DMU であるといえる．また区間非効率値の下界の最大値の 0.333 をとる DMU は D で，区間非効率値から評価すると，D は非効率的な DMU であるといえる．このように効率値と非効率値の下界を評価指標に取り入れることにより，新たな評価が可能となる．

表 3: クリスプデータによる区間効率値と区間非効率値

DMU	efficiency	inefficiency
A	[0.143,1.000]	[0.125,1.000]
B	[0.286,0.522]	[0.333,1.000]
C	[0.286,0.824]	[0.167,0.813]
D	[0.375,0.652]	[0.333,0.889]
E	[0.491,1.000]	[0.143,0.591]
F	[0.250,0.696]	[0.250,1.000]
G	[0.571,0.957]	[0.200,0.571]
H	[0.250,0.826]	[0.200,0.909]
I	[0.250,0.957]	[0.167,0.833]
J	[0.125,1.000]	[0.143,1.000]

4　区間データによる区間効率値

一般に，需要の変動や景気の変動，季節変動などにより，データは変動しているので，これを区間データ

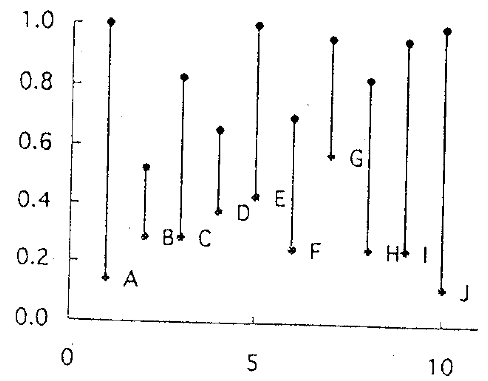

図 2: クリスプデータによる区間効率値

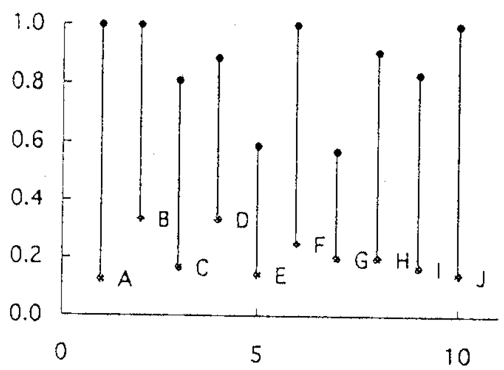

図 3: クリスプデータによる区間非効率値

として取り扱う．本章では，得られるデータのすべてを覆う区間という概念を導入し，データが区間となる場合の区間効率値による DEA モデルを定式化する．ここで，区間データは以下のように与えられる．

$$x_{ij} \in [x_{ij*}, x_{ij}{}^*], \quad y_{rj} \in [y_{rj*}, y_{rj}{}^*]$$

DMU_o の区間効率値の上界 $\theta_o{}^*$ は，クリスプデータ (通常のデータ) の場合と同様の考え方に基づいて，有利な立場からの評価であるから，区間データ $\boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{y}_j$ $(j = 1, ..., n)$ の区間内ですべての DMU に対する DMU_o の相対的効率値の最大化を行うことで，次のように定義できる．

$$\left.\begin{array}{llll} \max\limits_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}} & \max\limits_{\boldsymbol{x}_j,\boldsymbol{y}_j} \theta_{o^E}{}^* & = & \dfrac{\frac{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_o}{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_o}}{\max\limits_j \frac{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_j}{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_j}} \\ \text{subject to} & \boldsymbol{u} & \geq & 0 \\ & \boldsymbol{v} & \geq & 0 \end{array}\right\} \quad (22)$$

区間データによる (22) 式は，目的関数の分母を 1 として，区間データの端点を用いて以下のように書き換えられる．

$$\left.\begin{array}{llll} \max\limits_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}} & \theta_o^{E*} & = & \dfrac{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_o{}^*}{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_{o*}} \\ \text{subject to} & \max\left(\max\limits_{j\neq o}\dfrac{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_{j*}}{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_j{}^*}, \dfrac{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_o{}^*}{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_{o*}}\right) & = & 1 \\ & \boldsymbol{u} & \geq & 0 \\ & \boldsymbol{v} & \geq & 0 \end{array}\right\} \quad (23)$$

(22) 式が (23) 式に変換できることを以下に示す．まず，$a, b \geq 0$ について一般に次のことが成り立つ．

$$f(a,b) = \frac{a}{max(a,b)} = 1 \wedge \frac{a}{b}$$

関数 $f(a,b)$ は，a が最大で b が最小のとき最大値をとり，a が最小で b が最大のとき最小値をとる．(22) 式の目的関数の一部は，

$$\max_{\boldsymbol{x}_j,\boldsymbol{y}_j} \theta_o^{E*} = \frac{\frac{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_o}{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_o}}{\frac{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_o}{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_o} \vee \max\limits_j \frac{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_j}{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_j}}$$

と書き表せるので，$\boldsymbol{x}_o, \boldsymbol{y}_o$ については $\frac{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_o}{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_o}$ の最大値を導くデータの組み合わせ，すなわち，DMU_o については，入力の下限と出力の上限 $\left(\frac{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_o{}^*}{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_{o*}}\right)$ が用いられており，それ以外の $\boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{y}_j$ については $\frac{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_j}{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_j}$ の最小値を導くデータの組み合わせ，すなわち，DMU_o 以外の DMU については入力の上限と出力の下限 $\left(\frac{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_{j*}}{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_j{}^*}\right)$ が用いられている．これは，DMU_o にとって楽観的な観点からのデータであり，その他の DMU にとっては悲観的な観点からのデータであるといえる．このデータの組み合わせは，DMU_o についてその最大の効率値 (仮想出力/仮想入力) を与える．よって，(23) 式の効率値は DMU_o にとって楽観的な観点からのデータを用いた，DMU_o にとって有利な立場からの評価による効率値であるといえる．(23) 式はクリスプデータの場合と同様の手順により，次の線型計画問題に変形することができる．

$$\left.\begin{array}{llll} \max\limits_{\boldsymbol{u}} & \theta_o^{E*} & = & \boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_o{}^* \\ \text{subject to} & \boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_{o*} & = & 1 \\ & \boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_{j*} - \boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_j{}^* & \leq & 0 \quad (j \neq o) \\ & \boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_o{}^* - \boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_{o*} & \leq & 0 \\ & \boldsymbol{u} & \geq & 0 \\ & \boldsymbol{v} & \geq & 0 \end{array}\right\} \quad (24)$$

DMU_o の区間効率値の下界 θ_{o*}^E は，クリスプデータの場合と同様に (22) 式の最小化問題を考え，下界は不利な立場からの評価であるから $\boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{y}_j$ について区間内ですべての DMU に対する DMU_o の相対的効率値の最

小化を行うことで，以下のように定式化できる．

$$\left.\begin{array}{llll}\min\limits_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}} & \min\limits_{\boldsymbol{x}_j,\boldsymbol{y}_j} & \theta^E_{o*} & = \dfrac{\frac{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_o}{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_o}}{\max\limits_j \dfrac{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_j}{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_j}} \\ \text{subject to} & & \boldsymbol{u} & \geq 0 \\ & & \boldsymbol{v} & \geq 0 \end{array}\right\} \tag{25}$$

目的関数の分母を1とし，区間データの端点を用いて，最小値を導くデータの組み合わせを考慮すると(25)式は以下のように書き換えられる．

$$\left.\begin{array}{lll}\min\limits_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}} & \theta^E_{o*} & = \frac{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_{o*}}{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_o{}^*} \\ \text{subject to} & \max\left(\max\limits_{j\neq o}\frac{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_j{}^*}{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_{j*}}, \frac{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_{o*}}{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_o{}^*}\right) & = 1 \\ & \boldsymbol{u} & \geq 0 \\ & \boldsymbol{v} & \geq 0 \end{array}\right\} \tag{26}$$

(25)式では，DMU_o については，入力の上限と出力の下限が用いられており，それ以外のDMUについては入力の下限と出力の上限が用いられている．これは，DMU_o にとって悲観的な観点からのデータであり，その他のDMUにとっては楽観的な観点からのデータであるといえる．このデータの組み合わせは，DMU_o についてその最小の効率値 (仮想出力/仮想入力) を与える．よって，(26)式の効率値は，DMU_o にとって悲観的な観点からのデータを用いた，DMU_o にとって不利な立場からの評価による効率値であるといえる．(26)式はクリスプデータの場合と同様の手順により，次のn-1個の線型計画問題を作り，得られる最適目的関数値の最小値をとることで(26)式の効率値を得ることができる．

$$\left.\begin{array}{lll}\min\limits_{\boldsymbol{u}} & \theta^E_{oj} & = \boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_{o*} \\ \text{subject to} & \boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_o{}^* & = 1 \\ & \boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_j{}^* - \boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_{j*} & = 0 \\ & \boldsymbol{u} & \geq 0 \\ & \boldsymbol{v} & \geq 0 \end{array}\right\} \quad (j \neq o) \tag{27}$$

$$\theta^E_{o*} \;=\; 1 \wedge \min_{j\neq o}\ \theta^E_{oj} \tag{28}$$

以上のように，区間データに対する区間効率値は(24)式から求まる上界 θ^{E*}_o と(28)式から求まる下界 θ^E_{o*} で以下のように与えられる．

$$\theta^E_o \in \left[\theta^E_{o*}, \theta^{E*}_o\right] \tag{29}$$

区間データを取り扱うIDEAについても同様の考え方に基づき，区間非効率値を求めるモデルを定式化する．区間非効率値の上界は不利な立場からの評価となっているので，区間データ $\boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{y}_j \quad (j = 1,...,n)$ の区間内ですべてのDMUに対する DMU_o の相対的非効率値の最大化を行うことで，次のように定式化できる．

$$\left.\begin{array}{llll}\max\limits_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}} & \max\limits_{\boldsymbol{x}_j,\boldsymbol{y}_j} & \theta^{IE*}_o & = \dfrac{\frac{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_o}{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_o}}{\max\limits_j \dfrac{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_j}{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_j}} \\ \text{subject to} & & \boldsymbol{u} & \geq 0 \\ & & \boldsymbol{v} & \geq 0 \end{array}\right\} \tag{30}$$

区間効率値の上界は，DMU_o について入力の上限と出力の下限が，その他のDMUについては入力の下限と出力の上限が用いられ，このデータの組み合わせは DMU_o に最大非効率値を与える．2章での定理を用いることで，(30)の最適目的関数値は以下の問題と等しいことを示すことができる．

$$\left.\begin{array}{lll}\max\limits_{\boldsymbol{v}} & \theta^{IE*}_o & = \boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_o{}^* \\ \text{subject to} & \boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_{o*} & = 1 \\ & \boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_{j*} - \boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_j{}^* & \leq 0 \quad (j \neq o) \\ & \boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_o{}^* - \boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_{o*} & \leq 0 \\ & \boldsymbol{u} & \geq 0 \\ & \boldsymbol{v} & \geq 0 \end{array}\right\} \tag{31}$$

区間非効率値の下界は不利な立場からの評価となっているので相対的非効率値の最小化を行うことで，次のように定式化できる．

$$\left.\begin{array}{llll}\min\limits_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}} & \min\limits_{\boldsymbol{x}_j,\boldsymbol{y}_j} & \theta^{IE}_{o*} & = \dfrac{\frac{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_o}{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_o}}{\max\limits_j \dfrac{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_j}{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_j}} \\ \text{subject to} & & \boldsymbol{u} & \geq 0 \\ & & \boldsymbol{v} & \geq 0 \end{array}\right\} \tag{32}$$

区間非効率値の下界は DMU_o について入力の上限と出力の下限が，その他のDMUについては入力の下限と出力の上限が用いられ，このデータの組み合わせは DMU_o に最小非効率値を与える．(32)は制約式を分割することにより以下のLP問題を作ることができ，その最小値が区間非効率値の下界となる．

$$\left.\begin{array}{lll}\min\limits_{\boldsymbol{v}} & \theta^{IE}_{oj*} & = \boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_{o*} \\ \text{subject to} & \boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_o{}^* & = 1 \\ & \boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_j{}^* - \boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_{j*} & = 0 \\ & \boldsymbol{u} & \geq 0 \\ & \boldsymbol{v} & \geq 0 \end{array}\right\} \quad (j \neq o) \tag{33}$$

$$\theta^{IE}_{o*} \;=\; 1 \wedge \min_{j\neq o}\ \theta^{IE}_{oj} \tag{34}$$

表1に示されているデータを表4に示すように区間データに変換し，区間効率値，区間非効率値を求める．それを表5，図4,5に示す．図4,5において実線が区間

データによる区間（非）効率値，点線がクリスプデータによる区間（非）効率値である．

区間データをもとのクリスプデータを覆うように設定しているので，区間データによる区間効率値，区間非効率値の区間の方がクリスプデータによるものより大きくなっている．

表 4: 区間データ

DMU	input x	output1 y_1	output2 y_2
A	1	[0.8,1.2]	[7.5,8.5]
B	1	[1.8,2.2]	[2.4,3.6]
C	1	[1.7,2.3]	[5.7,6.3]
D	1	[2.5,3.5]	[2.7,3.3]
E	1	[2.8,3.2]	[6.7,7.3]
F	1	[3.8,4.2]	[1.8,2.2]
G	1	[3.4,4.6]	[4.6,5.4]
H	1	[4.7,5.3]	[1.5,2.5]
I	1	[5.6,6.4]	[6.7,7.3]
J	1	[1.7,2.3]	[0.8,1.2]

表 5: 区間データによる区間効率値と区間非効率値

DMU	efficiency	inefficiency
A	[0.110,1.000]	[0.094,1.000]
B	[0.247,0.634]	[0.222,1.000]
C	[0.233,0.923]	[0.127,1.000]
D	[0.318,0.786]	[0.229,1.000]
E	[0.384,1.000]	[0.110,0.704]
F	[0.212,0.782]	[0.190,1.000]
G	[0.466,1.000]	[0.148,0.736]
H	[0.176,0.962]	[0.151,1.000]
I	[0.200,1.000]	[0.125,1.000]
J	[0.094,1.000]	[0.110,1.000]

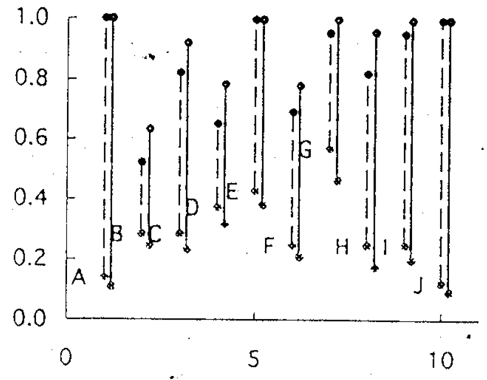

図 4: 区間データによる区間効率値

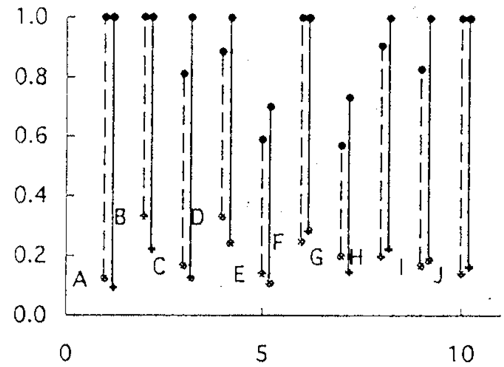

図 5: 区間データによる区間非効率値

5　ファジィデータ

入出力データはいくらかファジィ的な概念を含んでいることがあるので，この章では分解定理を用いて，ファジィデータを取り扱えるように拡張する．ファジィデータから得られる（非）効率値はファジィ数である．分解定理は次のように定義されている．

$$A = \cup_\alpha \alpha A_\alpha, \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \tag{35}$$

ここで，A はファジィ集合で，α は実数値，A_α は A の α-レベル集合である．A_α はクリスプ集合であり，言い換えると区間値である．このように分解定理により，区間データと区間効率値はファジィデータとファジィ効率値に拡張される．

表 1 に示されているデータを表 6 に示すようにファジィデータに拡張する．(a,c) は中心が a で幅が c の三角型対称ファジィ数である．

図 7,8 において縦軸に α を，横軸に効率値と非効率値をとる．B,E,G,J に対する効率値と A,B,D,E に対する非効率値を求めた．ファジィ効率値を用いて評価すると，J が特異的，E と G が効率的，B は効率的ではないと評価される．また，ファジィ非効率値を用いると，A が特異的，B と D が非効率的，E は非効率的でないと評価される．

表 6: ファジィデータ

DMU	input	output1	output2
A	1	(1.0,0.2)	(8.0,0.5)
B	1	(2.0,0.2)	(3.0,0.6)
C	1	(2.0,0.3)	(6.0,0.3)
D	1	(3.0,0.5)	(3.0,0.3)
E	1	(3.0,0.2)	(7.0,0.3)
F	1	(4.0,0.2)	(2.0,0.2)
G	1	(4.0,0.6)	(5.0,0.4)
H	1	(5.0,0.3)	(2.0,0.5)
I	1	(6.0,0.3)	(2.0,0.3)
J	1	(7.0,0.3)	(1.0,0.2)

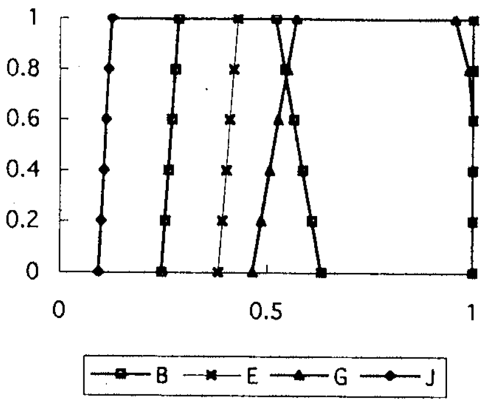

図 6: ファジィ効率値

6 おわりに

相対的な評価である効率値の求め方として，従来のDEA での有利な立場からの評価に加え，不利な立場からの評価を考えた．その方法の 1 つとして，IDEA からの非効率値を用いることがすでに提案されているが，DEA 効率値と IDEA 非効率値の間には関係がない．それに対して，本論文では，楽観的観点と悲観的観点から同じ問題を最大化および最小化することにより効率値の端点を求め，区間効率値による DEA モデルを提案した．DMU_o の区間効率値は入出力ベクトルをウェイト変数として評価関数となる線形関数をある方向から移動させ，最大どれほどの効率値をとり得るか，最低どれほどの効率値が保証されているかを表わしている．区間（非）効率値による評価は，上界，下界の両方が他の DMU に劣っていない DMU を（非）効率的であるといい，それ以外のとき（非）効率的ではないという．これを用いることで，DEA による効率値が 1

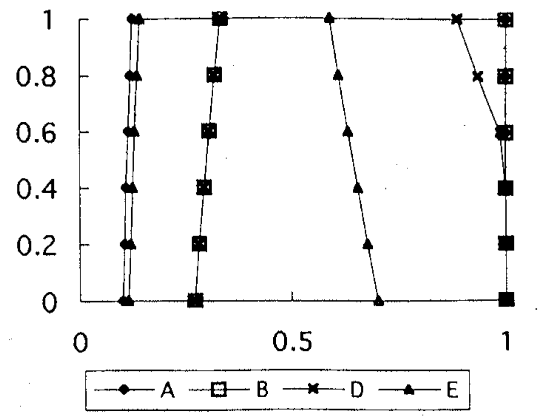

図 7: ファジィ非効率値

となる DMU をそれらの下界を比較することで評価することができるようになり，特異な DMU は区間が大きくなる傾向がある．つまり，効率値を区間として表わすことにより，意思決定者により多くの情報を与えることができる．さらに，現実に取り扱うデータは変動していることが多いので，区間データを取り扱うことができる DEA の定式化を行った．そして，ファジィデータを取り扱えるように拡張した．

参考文献

[1] A.Charnes, W. W.Cooper, and E.Rhodes : Measuring the Efficiency of Decision Making Units, *Europian Journaal of Operational Research*, **2** (1978), 429-444

[2] 刀根薫：経営効率性の測定と改善-包絡分析法 DEA による-, 日科技連, 1993.

[3] 山田善靖, 松井知己, 杉山学 : DEA モデルに基づく新たな経営効率性分析法の提案, *Journal of the Ooerations Research Society of Japan*, **37** (1994), 158-168

[4] 山田善靖, 末吉俊幸, 杉山学, 牧野智謙 : 日本的経営の為の DEA 法-日本経済に果たす公共事業投資の役割-, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **38** (1995), 381-397