

カオスのデータのふるまいの解析について

創価大学大学院工学研究科 秋本 慎一 (AKIMOTO Shinichi)

1 はじめに

カオスのデータを見るとき、無作為に解析を試みるよりも先に、既に運動が解析されている既知のデータとてらし合わせ、その類似点を探すことは時間的にも技術的にも有用なことだと思われる。既に分かっているデータとの類似性が認められれば、それに対する適当な解析法の適用も可能になる。

そこで本研究では、2つの一次のカオスの時系列データの関係について考察し、その性質を知るためのヒントとなる n 周期点の個数の変化について調べ、それを応用したモデルを提案する。

2 カオスとは

2.1 カオスの定義

カオスに関する定義は複数あるが、ここでは次の3つの条件を満たす写像をカオス的であると定義する。

- 初期値鋭敏性をもつ
- 推移的である
- 稠密な周期点をもつ

これより先、これを満たすものを扱うことにする。

2.2 カオスのデータの生成法

カオスのデータを作成する方法としてある写像の繰り返しによるものがある。たとえば、テント写像

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & (0 \leq x \leq \frac{1}{2}) \\ 2(1-x), & (\frac{1}{2} \leq x \leq 1) \end{cases}$$

を例にとると、これに初期値 x_0 を与えて

$$x_{n+1} = T(x_n) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

をくりかえし、データ $\{x_n\}$ を生成してゆく。たとえば、初期値として $x_0 = 0.62821$ を与えれば、

$$\{0.62821, 0.74358, 0.51284, 0.97432, 0.051536, \dots\}$$

というデータが得られる。

なお、本研究にて扱う写像は零点 $(0, 0)$ を通り、定義域・値域ともに $[0, 1]$ のものとする。これに準じない場合は、この条件を満たすようにデータを変換するものとする。

2.3 n 周期点

テント写像を例にとると、 $T(x)$ の n 回繰り返しを $T^{[n]}(x)$ で表すとすると、図形的に n 周期点は $y = x$ と $y = T^{[n]}(x)$ との交点の座標に相当する。すなわち、 n 周期点 x を求めるには

$$x = T^{[n]}(x)$$

を計算してやればよい。

3 解析

3.1 2次元平面上への投影

入力されるデータを先頭から $\{x_0, x_1, \dots, x_N\}$ と表す。この入力に対し、2次元 (xy 平面) 上に (x_i, x_j) (ただし $i = 1, \dots, N-1, j = i+1, \dots, N$) を $(j-i)$ の値によって色分けしてプロットしてゆく。ここで j の範囲が i に依存している理由はカオスという現象は不可逆であり、今いる地点から過去の状態を知ることはできないためである。カオス的データというのがある写像を元に生成されるものであるとすると、得られる2次元平面上の図形はそれ独自のものとなる。ゆえに、2つの時系列データを投影し、その類似性が見えるはずである。テント写像により得られた図形を図1に示す。

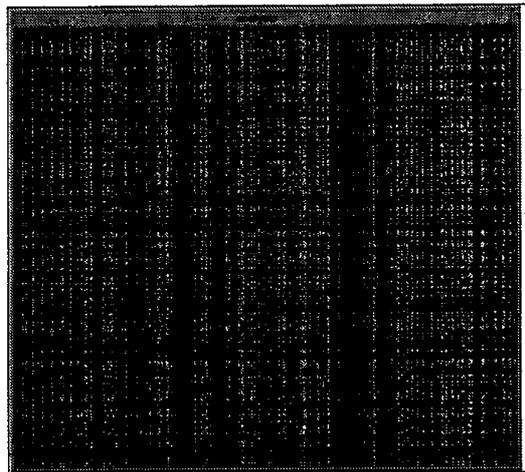


図1 テント写像の2次元平面への投影

このようにして生成される図形を2つ並べたとき、その類似性を確かめるのは容易ではない。見て分かる通り、この図から2つの時系列データの共通点を見い出すことは難しいと推測できる。ひとつの理由としては数量化されていないということがあげられよう。

3.2 n 周期点のふるまい

カオス的データには再帰性がないと言われつつも、リ・ヨークの定理の「周期 3 はカオスをもたらす」にあるように、 n サイクルでデータを行き来する n 周期点が存在することが分かっている。そこでこの n 周期点の個数に着目することにする。実際にテント写像 $T(x)$ や バイナリ写像 $B(x)$ などを使って、 n 周期における不動点の数を調べたところ、 n 周期点の個数を A_n と表せば、

$$A_n \geq A_1 + 2^{\alpha-1} \gamma_0 \sum_{k=1}^{n-1} \gamma^{k-1}, (n=2, 3, \dots)$$

となるようである。ここで γ はカオス的データを生成する写像を構成する線分の数であり、 α は γ のうちで傾きが正であるもの数を示している。また γ_0 はある定数である。 $\gamma = 2$ のときは $\gamma_0 = \gamma$ となるが、写像が複雑になると (γ が大きくなると) 必ずしもそうはならない。また、等式ではなく不等式で表されているのは、写像が複雑であるときに A_n の値そのものを計算することは難しいが、その下限は導くことができることを表している。

n 周期点の見つけ方について言及しておく。 N 個の入力データ $\{x_n\}$ に対して、まずはその順序関係を保ったままでデータをソートする。ソートされた後のとなり合うデータどうしとそれぞれの n 回写像により移された後の状態の点を用いて計算する。なお、本研究では n 周期点の正確な座標は要求されていないため、この 2 点を結んだ線分が $y = x$ と交わるかどうかを見ることで、 n 周期点の個数を数えた。つまり、与えられたデータを結んだものを写像の n 回くりかえしと見なすことにしている。実際に交わるかどうかの条件判定としては、内分の公式から導いた、 xy 平面上の 2 点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ が $y = x$ と交わる必要十分条件は

$$\frac{y_2 - x_2}{y_1 - x_1} < 0 \quad (\text{ただし, } x_1 \neq y_1)$$

であり、 $x = y$ のときはしらべるまでもない。

A_n の下限を示す式から n が大きくなるにつれて A_n が指数関数的に大きくなるというここであるから、 n の有効範囲を予め知っておかなければならない。 n 周期点を求めるのに、入力データが N 個あったとすると、実際は $(N - n)$ 個の点がそれを求めるのに有効となる。そこで、

$$A_n \leq N - n$$

という不等式が成り立つ。 A_n が上の式で最小値をとっていたと仮定して n の有効範囲を求めると、

$$n \leq \log_{\gamma} \left(\frac{(N - A_1)(\gamma - 1)}{2^{\alpha-1} \gamma_0} + 1 \right) + 1$$

この n の範囲において n 周期点の数が同じふるまいを示せばそれぞれのデータを生成する写像はほぼ同じようなものである可能性が高いと言えよう。テント写像とバイナリ写像を例に同じ写像から生成される場合とそうでない場合について n 周期点の比較を図 2(a)(b) に示す。ここでバイナリ写像は次式で与えられるものとした。

$$B(x) = \begin{cases} 2x, & (0 \leq x \leq \frac{1}{2}) \\ 2x - 1, & (\frac{1}{2} < x \leq 1) \end{cases}$$

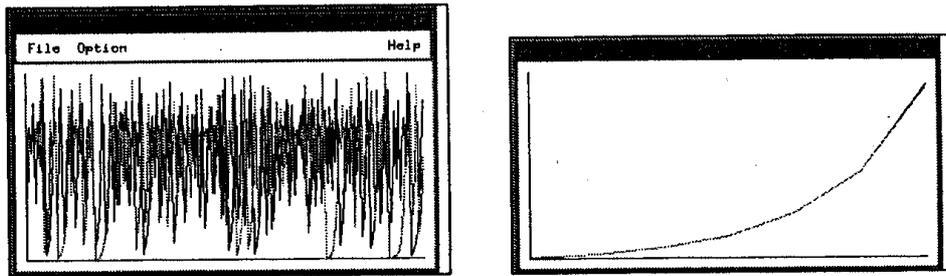
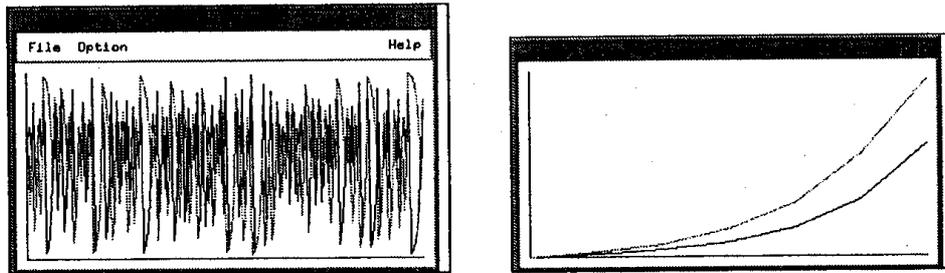
図 2(a) テント写像とテント写像の n 周期点の比較図 2(b) テント写像とバイナリ写像の n 周期点の比較

図 2(a)(b) それぞれにおいて、左図が比較する 2 つの時系列データ、右図が n 周期点の度合である。また図 2(b) の右図において上がバイナリ写像、下がテント写像であり、図 2(a) のと比較してこの 2 つの間に明確な差が出ていることが分かる。

この手法は写像の概観が同じようなものを抽出するのだが、そうではなく、全く同じ写像かどうかを判別するために、次の手法を提案する。

3.3 重ね絵

n 周期点の変化をみることによって、写像は必ずしも特定はできないものの、ある程度までしぼり込むことができることが分かった。

全く同じ写像から生成されたデータかどうかまでを特定するには、2 つのデータをそれぞれの順序関係を維持したままで連結し、そのデータの不動点のふるまいをもとのデータのひとつと比較してやればよい。ただし、連結するといってもその連結する部分には順序関係は成立しないことに注意が必要である。これまでの議論から、 n 周期点の変化が同じであれば同じような波形になるということが分かっている。ゆえに、この 2 つのデータを連結したデータの n 周期点の個数が元のデータのもと同じであれば、その 2 つのデータは全く同じ写像から生成されていると言える。また、同じ写像から生成されたデータかどうかはこの手法ではかなり顕著に現れる。

その結果を図 3(a)(b) に示す。

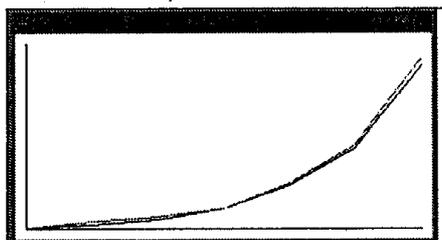


図 3(a) テント写像同士の比較

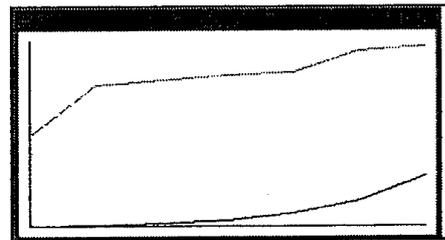


図 3(b) テント写像とバイナリ写像の比較

さらに、このときの xy 平面上へ投影した絵をそれぞれのデータのものと比較してみるのもおもしろい。同じ写像だったのであれば、より完成度の高いものになろうし、逆ならば、元の図形が大きく壊れてしまうかもしれない。また、まだ証明はしていないので憶測の域を脱しないが、カオスのデータを 2 次元平面上へ投影して出来る図形はフラクタル的なものだと予測される。

4 さいごに

以上の手法を用いることで、ある程度までは類似性を抽出することができよう。とは言えまだまだ問題点もあり、ある写像 $D(x)$ があつたときに、これらでは $D(x)$ と $D(x)^{[m]}$ の関係を導くことが難しいという側面もある。

しかし、このような手法により既知のデータから未知のデータの性質を知ることができれば、解析に時間のかかるカオス現象に対して、さらなるアプローチが生まれるのではないかと期待される。

5 参考文献

デニー・グーリック著、前田恵一・原山卓久訳：カオスとの遭遇 力学系への数学的アプローチ，産業図書株式会社 (1995)。

長島弘幸・馬場良和共著：カオス入門 現象の解析と数理，倍風館 (1992)。