数理解析研究所講究録
1079 巻 1999 年 164-173

ある順序和の最適化について

九州大学大学院 津留崎 和義 (Kazuyoshi TSURUSAKI)

1 はじめに

多段逐次決定過程では確定的な状況であれ, 不確実な状況であれ, いくつかの評価基準が考えられている. このような中で, 通常は加法型評価系のもとで最適解の構造やその求め方が研究されている ([6]). また, 加法型評価系以外では, 信頼性の問題などでは乗法型評価系 ([2]), ファジィ理論では最小型評価系 ([1],[4],[5]) が考えられ, その最適値と最適政策が求められている. これらは通常, 単一評価系として考えられる. 他方, 複合評価系としては, 分散型, 比型, 範囲型などがシステムの安定性の基準として考えられる.

本報告では, 確定的な状況の中で, 与えられた n 個の評価値の中からその最大値および最小値を除外した総和, すなわちそれら n 個の評価値を昇順に並び換え, その2番目から $(n-1)$ 番目までの和をシステム全体の評価基準としたときの最適化を考える. この考え方は, 主観や偏見, 先入観などからくる異常な値が評価値の中に最大値や最小値として現れたとき, これらを排除し, 中間値に近いところのデータを用いてシステム全体を評価しようとするものである.

一般に確定的な状況では, 単一評価系に対しては自然な形で単調 (非減少) 性が内在しているので, 新しく補助変数を導入することなく自然な埋め込みで再帰式が導かれている.

他方, 本報告における順序和を評価基準としたときは, 自然な埋め込みでは再帰式が成立しないので, 本報告では新しく補助変数を導入することによる不変埋没によって最適化を行う.

2 決定過程

まず, 本報告を通して用いる記号・用語をまとめておく.

(i) N は段の総数を表す正整数

(ii) $X = \{s_1, s_2, \ldots, s_k\}$ は有限状態空間

(iii) $U = \{a_1, a_2, \ldots, a_l\}$ は有限決定空間

(iv) $r_n : X \times U \to \mathbf{R}^1$ は第 n 利得関数 $(1 \le n \le N)$;
　　$r_n(x,u)$ は第 n 段に状態 x で決定 u をとったとき, システムが得られる利得を表す.

　$r_{N+1} : X \to \mathbf{R}^1$ は終端利得関数;
　　$r_{N+1}(x_{N+1})$ は最終 N 段になったとき, システムが得られる利得を表す.

(v) $f : X \times U \to X$ は確定的運動法則; (1)
　　$f(x,u)$ は状態 x で決定 u をとったときの次の状態を表す.
　　すなわち, 次の状態を y とすると, この状態変換は $f(x,u) = y$ で表される.

(vi) $\sigma_n : X \times X \times \cdots \times X \to U$ は第 n 一般決定関数

　$\sigma_1 : X \to U,\ \sigma_2 : X \times X \to U,\ \ldots,\ \ \sigma_N : X \times \cdots \times X \to U;$
　　第 n 段までに状態列 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ を経てきたとき, 意思決定者は
　　決定 $\sigma_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in U$ を採ることを表している.

　$\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_N\}$ は一般政策.

一般に, 加法型評価系をもつ N 段決定過程は

$$
\begin{array}{ll}
\text{Maximize} & \displaystyle\sum_{n=1}^{N} r_n(x_n, u_n) + r_{N+1}(x_{N+1}) \\
\text{subject to} & \text{(i)}\ \ f(x_n, u_n) = x_{n+1} \\
& \text{(ii)}\ \ u_n \in U \qquad 1 \le n \le N
\end{array}
\tag{2}
$$

で表される. この問題に対してマルコフ政策のクラスで最適値関数列を定義すると, 再帰式

$$
\begin{aligned}
v_n(x_n) &= \operatorname*{Max}_{u_n \in U}[r_n(x_n, u_n) + v_{n+1}(f(x_n, u_n))] \qquad x_n \in X \quad n = 1, 2, \ldots, N \\
v_{N+1}(x_{N+1}) &= r_{N+1}(x_{N+1}) \qquad x_{N+1} \in X
\end{aligned}
\tag{3}
$$

が成立する.

本報告では, 利得の総和からそれらの最大値, および最小値を引いたものを評価とする N 段決定過程を考えると, 次のように表わされる.

$$
\begin{array}{ll}
\text{Maximize} & [r_1(x_1, u_1) + r_2(x_2, u_2) + \cdots + r_N(x_N, u_N) + r_{N+1}(x_{N+1}) \\
& \quad - r_1(x_1, u_1) \vee r_2(x_2, u_2) \vee \cdots \vee r_N(x_N, u_N) \vee r_{N+1}(x_{N+1}) \\
& \qquad - r_1(x_1, u_1) \wedge r_2(x_2, u_2) \wedge \cdots \wedge r_N(x_N, u_N) \wedge r_{N+1}(x_{N+1})] \\
\text{subject to} & \text{(i)}\ \ f(x_n, u_n) = x_{n+1} \\
& \text{(ii)}\ \ u_n \in U \qquad 1 \le n \le N.
\end{array}
\tag{4}
$$

さて, 任意の履歴 (状態と決定の交互列) $h = (x_1, u_1, x_2, u_2, \ldots, x_N, u_N, x_{N+1})$ に対する $N+1$ 個の実数値

$$
r_1(x_1, u_1),\ r_2(x_2, u_2),\ \ldots,\ r_N(x_N, u_N),\ r_{N+1}(x_{N+1})
$$

の n 番目 $(n = 1, 2, \ldots, N+1)$ に小さい評価値の段の番号を $n(h)$ で表すと,

$$
\begin{aligned}
& r_{1(h)}(x_{1(h)}, u_{1(h)}) \le r_{2(h)}(x_{2(h)}, u_{2(h)}) \le \cdots \\
& \qquad \cdots \le r_{N(h)}(x_{N(h)}, u_{N(h)}) \le r_{N+1(h)}(x_{N+1(h)}, u_{N+1(h)})
\end{aligned}
\tag{5}
$$

となる. ただし, ここでは $n(h) = N+1$ のとき,

$$
r_{n(h)}(x_{n(h)}, u_{n(h)}) = r_{N+1}(x_{N+1}) \qquad (n(h) = N+1)
$$

と解釈する. このとき, 履歴 h の依存性を省いて, 式 (5) を簡単に順序記号を用いて

$$
r_{(1)} \le r_{(2)} \le \cdots \le r_{(N)} \le r_{(N+1)}
\tag{6}
$$

で表す. この順序記号を用いると, 与えられた利得の最大値および最小値は

$$
\begin{aligned}
r_{(N+1)} &= r_1(x_1, u_1) \vee r_2(x_2, u_2) \vee \cdots \vee r_N(x_N, u_N) \vee r_{N+1}(x_{N+1}) \\
r_{(1)} &= r_1(x_1, u_1) \wedge r_2(x_2, u_2) \wedge \cdots \wedge r_N(x_N, u_N) \wedge r_{N+1}(x_{N+1})
\end{aligned}
$$

と表せる. また, 利得の総和は順序により不変だから,

$$
\sum_{n=1}^{N+1} r_{(n)} = \sum_{n=1}^{N} r_n(x_n, u_n) + r_{N+1}(x_{N+1})
$$

である．よって，最大化問題 (4) の目的関数は

$$\begin{aligned}
r_1(x_1,u_1)+r_2(x_2,u_2)+\cdots+r_N(x_N,u_N)+r_{N+1}(x_{N+1})& \\
-r_1(x_1,u_1)\vee r_2(x_2,u_2)\vee\cdots\vee r_N(x_N,u_N)\vee r_{N+1}(x_{N+1})& \\
-r_1(x_1,u_1)\wedge r_2(x_2,u_2)\wedge\cdots\wedge r_N(x_N,u_N)\wedge r_{N+1}(x_{N+1})& \\
=\sum_{n=1}^{N+1} r_{(n)}-r_{(N+1)}-r_{(1)}& \\
=\sum_{n=2}^{N} r_{(n)}&
\end{aligned}$$

になる．

したがって，原問題 (4) は

$$\begin{array}{ll}
\text{Maximize} & \displaystyle\sum_{n=2}^{N} r_{(n)} \\
\text{subject to} & \text{(i)}\ \ f(x_n,u_n)=x_{n+1} \\
 & \text{(ii)}\ \ u_n\in U \qquad 1\le n\le N
\end{array} \tag{7}$$

で表される．この目的関数においては，

$$r_{(n)}=r_{n(h)}(x_{n(h)},u_{n(h)}) \qquad n=1,2,\ldots,N+1$$

であることに注意する．

問題 (4) に対しては，自然な埋め込みよって，加法型過程の (3) に相当する再帰式を導出することは困難である．したがって，新しく補助変数を導入した埋め込みを考える必要がある．

3　不変埋没

一般に不変埋没原理 (Principle of Invariant Imbedding) による方法は，ある与えられた問題を解こうとするときにそれ自身では解き難いなどの困難な点があるときに用いられる．このような問題に対して，これを含むより広い問題群に埋め込んで，相隣る問題間の関係式を再帰式などで導き，これを解くことによって本来の問題の最適解を求めようとするものである．そのとき本来の問題と個々の問題の構造は不変であるが，その大きさは変化しているのが通常である．さらに解くことに視点を移せば，どのような一群に埋め込めばよいかという問題が生じてくる．

さて，原問題 (4) の解を導くために，不変埋没原理を用いよう．まず，原問題自身に対して，新しく 2 つの実数パラメータ (λ_1,μ_1) を含む問題

$$\begin{array}{ll}
\text{Maximize} & [r_1(x_1,u_1)+r_2(x_2,u_2)+\cdots+r_{N+1}(x_{N+1}) \\
 & \quad -\lambda_1\vee r_1(x_1,u_1)\vee r_2(x_2,u_2)\vee\cdots\vee r_{N+1}(x_{N+1}) \\
 & \quad\quad -\mu_1\wedge r_1(x_1,u_1)\wedge r_2(x_2,u_2)\wedge\cdots\wedge r_{N+1}(x_{N+1})] \\
\text{subject to} & \text{(i)}\ \ f(x_n,u_n)=x_{n+1} \\
 & \text{(ii)}\ \ u_n\in U \qquad 1\le n\le N
\end{array} \tag{8}$$

を考える．このとき，λ_1 が特に

$$r_1(x_1,u_1)\vee r_2(x_2,u_2)\vee\cdots\vee r_N(x_N,u_N)\vee r_{N+1}(x_{N+1})$$

よりも小さい定数 $\tilde{\lambda}_1$, かつ μ_1 が

$$r_1(x_1, u_1) \wedge r_2(x_2, u_2) \wedge \cdots \wedge r_N(x_N, u_N) \wedge r_{N+1}(x_{N+1})$$

よりも大きい数 $\tilde{\mu}_1$ であるときに, この問題 (8) は本来の (λ_1, μ_1 なしの) 問題 (4) と等価になることに注意する.

次に問題 (8) を実数パラメータ (λ_n, μ_n) を含む次の部分問題群に埋め込む.

$$\begin{aligned}\text{Maximize}\quad & [r_n(x_n, u_n) + r_{n+1}(x_{n+1}, u_{n+1}) + \cdots + r_{N+1}(x_{N+1}) \\ & \quad - \lambda_n \vee r_n(x_n, u_n) \vee r_{n+1}(x_{n+1}, u_{n+1}) \vee \cdots \vee r_{N+1}(x_{N+1}) \\ & \quad\quad - \mu_n \wedge r_n(x_n, u_n) \wedge r_{n+1}(x_{n+1}, u_{n+1}) \wedge \cdots \wedge r_{N+1}(x_{N+1})] \\ \text{subject to}\quad & \text{(i)}\ \ f(x_m, u_m) = x_{m+1} \\ & \text{(ii)}\ \ u_m \in U,\ \lambda_m \in L_m,\ \mu_m \in M_m \qquad n \le m \le N.\end{aligned} \tag{9}$$

ここに, λ_n は

$$\tilde{\lambda}_1 \vee r_1(x_1, u_1) \vee r_2(x_2, u_2) \vee \cdots \vee r_{n-1}(x_{n-1}, u_{n-1})$$

のとり得る値全体から成る集合 L_n を, また μ_n は

$$\tilde{\mu}_1 \wedge r_1(x_1, u_1) \wedge r_2(x_2, u_2) \wedge \cdots \wedge r_{n-1}(x_{n-1}, u_{n-1})$$

のとり得る値全体から成る集合 M_n を動く. ただし, $L_1 = \{\tilde{\lambda}_1\}$, $M_1 = \{\tilde{\mu}_1\}$ である.

このとき, 問題 (9) の最大値を $w_n(x_n : \lambda_n, \mu_n)$ とすると, 次の再帰式が成り立つ.

定理 3.1

$$\begin{aligned} w_n(x_n : \lambda_n, \mu_n) &= \operatorname*{Max}_{u_n \in U}[r_n(x_n, u_n) + w_{n+1}(f(x_n, u_n) : \lambda_n \vee r_n(x_n, u_n), \mu_n \wedge r_n(x_n, u_n))] \\ & \qquad x_n \in X,\ \lambda_n \in L_n,\ \mu_n \in M_n \qquad n = 1, 2, \ldots, N \\ w_{N+1}(x_{N+1} : \lambda_{N+1}, \mu_{N+1}) &= r_{N+1}(x_{N+1}) - \lambda_{N+1} \vee r_{N+1}(x_{N+1}) - \mu_{N+1} \wedge r_{N+1}(x_{N+1}) \\ & \qquad x_{N+1} \in X,\ \lambda_{N+1} \in L_{N+1},\ \mu_{N+1} \in M_{N+1}. \end{aligned} \tag{10}$$

再帰式 (10) における状態変数は, 本来の状態変数 x_n と追加補助変数 λ_n, μ_n から成る 3 変数 (x_n, λ_n, μ_n) である. 時刻 n でこの状態のとき, 決定 $u_n \in U$ によって第 1 成分 x_n は $f(x_n, u_n)$ に移り, 第 2 成分 λ_n は $\lambda_n \vee r_n(x_n, u_n)$ に, 第 3 成分 μ_n は $\mu_n \wedge r_n(x_n, u_n)$ に変化する. この第 2, 第 3 成分がそれぞれ λ_{n+1}, μ_{n+1} になることに注意する.

$$\lambda_n \vee r_n(x_n, u_n) = \lambda_{n+1} \qquad 1 \le n \le N \quad (\lambda_1 = \tilde{\lambda}_1), \tag{11}$$

$$\mu_n \wedge r_n(x_n, u_n) = \mu_{n+1} \qquad 1 \le n \le N \quad (\mu_1 = \tilde{\mu}_1). \tag{12}$$

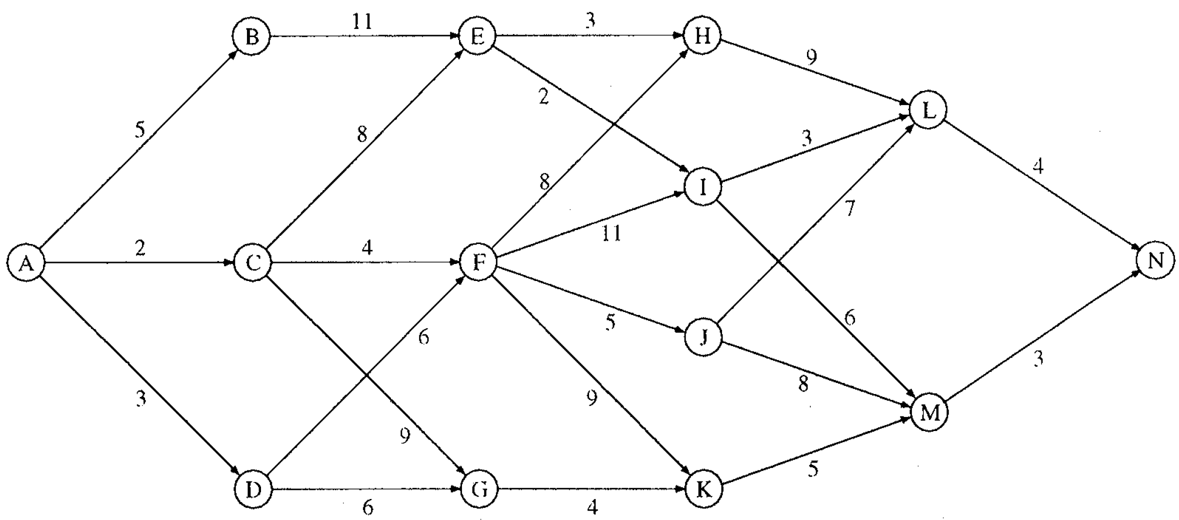
問題 (4) の最大値は, 再帰式 (10) を後ろ向きに解いた最後の利得関数に, 前述の $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\mu}_1$ を代入した値 $w_1(x_1 : \tilde{\lambda}_1, \tilde{\mu}_1)$ で与えられる.

他方, 最適値を与える最適行動 (状態と決定の交互列) は次のように求められる. まず, 再帰式 (10) の最大値を与える $u_n \in U$ を $\pi_n(x_n : \lambda_n, \mu_n)$ とすることによって最適決定関数 $\pi_n : X \times L_n \times M_n \to U$ が得られる. この決定関数を連ねて, 拡大状態空間 $X \times R \times R$ 上のマルコフ政策 $\pi = \{\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_N\}$ が得られる. 次に, このマルコフ政策から, 本来の状態空間 X 上の一般政策 $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_N\}$ が次のように得られる.

$$
\begin{aligned}
&\sigma_1(x_1) := \pi_1(x_1 : \tilde{\lambda}_1, \tilde{\mu}_1)\\
&\sigma_2(x_1, x_2) := \pi_2(x_2 : \lambda_2, \mu_2)\\
&\qquad \text{ただし } \lambda_2 = \tilde{\lambda}_1 \vee r_1(x_1, u_1),\ \mu_2 = \tilde{\mu}_1 \wedge r_1(x_1, u_1),\ u_1 = \pi_1(x_1 : \tilde{\lambda}_1, \tilde{\mu}_1)\\
&\sigma_3(x_1, x_2, x_3) := \pi_3(x_3 : \lambda_3, \mu_3)\\
&\qquad \text{ただし } \lambda_3 = \lambda_2 \vee r_2(x_2, u_2),\ \mu_3 = \mu_2 \wedge r_2(x_2, u_2),\ u_2 = \pi_2(x_2 : \lambda_2, \mu_2),\\
&\qquad\qquad \lambda_2 = \tilde{\lambda}_1 \vee r_1(x_1, u_1),\ \mu_2 = \tilde{\mu}_1 \wedge r_1(x_1, u_1),\ u_1 = \pi_1(x_1 : \tilde{\lambda}_1, \tilde{\mu}_1)\\
&\qquad\qquad \vdots\\
&\sigma_N(x_1, x_2, \ldots, x_N) := \pi_N(x_N : \lambda_N, \mu_N)\\
&\qquad \text{ただし } \lambda_N = \lambda_{N-1} \vee r_{N-1}(x_{N-1}, u_{N-1}),\ \mu_N = \mu_{N-1} \wedge r_{N-1}(x_{N-1}, u_{N-1}),\\
&\qquad\qquad\qquad u_{N-1} = \pi_{N-1}(x_{N-1} : \lambda_{N-1}, \mu_{N-1}),\\
&\qquad\qquad \lambda_{N-1} = \lambda_{N-2} \vee r_{N-2}(x_{N-2}, u_{N-2}),\ \mu_{N-1} = \mu_{N-2} \wedge r_{N-2}(x_{N-2}, u_{N-2}),\\
&\qquad\qquad\qquad u_{N-2} = \pi_{N-2}(x_{N-2} : \lambda_{N-2}, \mu_{N-2}),\\
&\qquad\qquad\qquad \vdots\\
&\qquad\qquad \lambda_2 = \tilde{\lambda}_1 \vee r_1(x_1, u_1),\ \mu_2 = \tilde{\mu}_1 \wedge r_1(x_1, u_1),\\
&\qquad\qquad\qquad u_1 = \pi_1(x_1 : \tilde{\lambda}_1, \tilde{\mu}_1).
\end{aligned}
\tag{13}
$$

4 ある経路問題

いわゆる最短経路問題では，ルートの評価をアーク上の値の総和で評価しているが，本節では，下図のネットワークにおいて，地点 A から N へのルート上の最大値および最小値を除いた総和を最大にする問題を考える．



地点 $A, B, C, \ldots, N$ を状態

$$\begin{array}{ll} x_1 = A & x_2 = B, C, D \\ x_3 = E, F, G & x_4 = H, I, J, K \\ x_5 = L, M & x_6 = N \end{array} \tag{14}$$

とみなし, 地点 x_n から x_{n+1} へのアーク上の値を $g_n(x_n, x_{n+1})$ とすると

$$\begin{array}{ll} \text{Maximize} & [g_1(A, x_2) + g_2(x_2, x_3) + \cdots + g_5(x_5, N) \\ & \quad - g_1(A, x_2) \vee g_2(x_2, x_3) \vee \cdots \vee g_5(x_5, N) \\ & \qquad - g_1(A, x_2) \wedge g_2(x_2, x_3) \wedge \cdots \wedge g_5(x_5, N)] \\ \text{subject to} & \text{(i)} \ \ x_{n+1} \in A(x_n) \qquad 1 \leq n \leq 5. \end{array} \tag{15}$$

が問題となる. ただし, $A(x_n)$ は状態 x_n から（1 ステップで）いくことができる次の状態全体の集合である.

まず, 状態集合 $S = \{A, B, \ldots, N\}$ を次の 6 つの集合に分割する.

$$\begin{array}{l} S_1 = \{A\}, \quad S_2 = \{B, C, D\}, \quad S_3 = \{E, F, G\}, \\ S_4 = \{H, I, J, K\}, \quad S_5 = \{L, M\}, \quad S_6 = \{N\}. \end{array} \tag{16}$$

次に, ある n に対して, S_n の要素を X で表し, 問題 (15) を次の部分問題群に埋め込む.

$$\begin{array}{ll} \text{Maximize} & [g_n(X, x_{n+1}) + g_{n+1}(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + g_5(x_5, N) \\ & \quad - \lambda \vee g_n(X, x_{n+1}) \vee g_{n+1}(x_{n+1}, x_{n+2}) \vee \cdots \vee g_5(x_5, N) \\ & \qquad - \mu \wedge g_n(X, x_{n+1}) \wedge g_{n+1}(x_{n+1}, x_{n+2}) \wedge \cdots \wedge g_5(x_5, N)] \\ \text{subject to} & \text{(i)} \ \ x_{m+1} \in A(x_m) \ \ n \leq m \leq 5 \\ & \text{(ii)} \ \ x_n = X. \end{array} \tag{17}$$

ただし, ここでの λ, μ は, 次の $\Omega(X)$ の要素であることに注意する.

$$\Omega(X) = \left\{ (\lambda, \mu) \;\middle|\; \begin{array}{l} \lambda = g_1(A, x_2) \vee g_2(x_2, x_3) \vee \cdots \vee g_{n-1}(x_{n-1}, X), \\ \mu = g_1(A, x_2) \wedge g_2(x_2, x_3) \wedge \cdots \wedge g_{n-1}(x_{n-1}, X), \\ x_{m+1} \in A_m(x_m) \ \ 1 \leq m \leq n-2, \ \ x_1 = A \end{array} \right\} \tag{18}$$

この埋め込まれた問題 (17) に対し, 定理 3.1 を適用すると, 次の再帰式が成り立つ.

定理 4.1

$$w(N : \lambda, \mu) = 0 - \lambda \vee (-\infty) - \mu \wedge \infty \qquad (\lambda, \mu) \in \Omega(N) \tag{19}$$

$$w(X : \lambda, \mu) = \operatorname*{Max}_{Y \in A_n(X)} [g_n(X, Y) + w(Y : \lambda \vee g_n(X, Y), \mu \wedge g_n(X, Y))] \qquad (\lambda, \mu) \in \Omega(X), \quad X \in S_n, \quad 1 \leq n \leq 5. \tag{20}$$

式 (20) の最大値を与える Y を $\pi^*(X : \lambda, \mu)$ で表し, 以下再帰式 (19), (20) を解いていく.

$$♣ \ w(N : \lambda, \mu) = 0 - \lambda \vee (-\infty) - \mu \wedge \infty \qquad (\lambda, \mu) \in \Omega(N) \tag{21}$$

$$\begin{aligned} ♣ \ w(L : \lambda, \mu) &= 4 + w(N : \lambda \vee 4, \mu \wedge 4) \\ &= 4 + 0 - \lambda \vee 4 \vee (-\infty) - \mu \wedge 4 \wedge \infty \\ &= 4 - \lambda \vee 4 - \mu \wedge 4 \end{aligned} \tag{22}$$

$$
\begin{aligned}
\pi^*(L:\lambda,\mu) &= N \qquad (\lambda,\mu)\in\Omega(L) && (23)\\
w(M:\lambda,\mu) &= 3+w(N:\lambda\vee 3,\mu\wedge 3)\\
&= 3+0-\lambda\vee 3\vee(-\infty)-\mu\wedge 3\wedge\infty\\
&= 3-\lambda\vee 3-\mu\wedge 3 && (24)\\
\pi^*(M:\lambda,\mu) &= N \qquad (\lambda,\mu)\in\Omega(M) && (25)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\clubsuit\ w(H:\lambda,\mu) &= 9+w(L:\lambda\vee 9,\mu\wedge 9)\\
&= 9+4-\lambda\vee 9\vee 4-\mu\wedge 9\wedge 4\\
&= 13-\lambda\vee 9-\mu\wedge 4 && (26)\\
\pi^*(H:\lambda,\mu) &= L \qquad (\lambda,\mu)\in\Omega(H) && (27)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
w(I:\lambda,\mu) &= [3+w(L:\lambda\vee 3,\mu\wedge 3)]\vee[6+w(M:\lambda\vee 6,\mu\wedge 6)]\\
&= [3+4-\lambda\vee 3\vee 4-\mu\wedge 3\wedge 4]\vee[6+3-\lambda\vee 6\vee 3-\mu\wedge 6\wedge 3]\\
&= [7-\lambda\vee 4-\mu\wedge 3]\vee[9-\lambda\vee 6-\mu\wedge 3] && (28)\\
\pi^*(I:\lambda,\mu) &= \text{? (will be decided later on)} \qquad (\lambda,\mu)\in\Omega(I) && (29)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
w(J:\lambda,\mu) &= [7+w(L:\lambda\vee 7,\mu\wedge 7)]\vee[8+w(M:\lambda\vee 8,\mu\wedge 8)]\\
&= [7+4-\lambda\vee 7\vee 4-\mu\wedge 7\wedge 4]\vee[8+3-\lambda\vee 8\vee 3-\mu\wedge 8\wedge 3]\\
&= [11-\lambda\vee 7-\mu\wedge 4]\vee[11-\lambda\vee 8-\mu\wedge 3] && (30)\\
\pi^*(J:\lambda,\mu) &= \text{? (will be decided later on)} \qquad (\lambda,\mu)\in\Omega(J) && (31)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
w(K:\lambda,\mu) &= 5+w(M:\lambda\vee 5,\mu\wedge 5)\\
&= 5+3-\lambda\vee 5\vee 3-\mu\wedge 5\wedge 3\\
&= 8-\lambda\vee 5-\mu\wedge 3 && (32)\\
\pi^*(K:\lambda,\mu) &= M \qquad (\lambda,\mu)\in\Omega(K) && (33)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\clubsuit\ w(E:\lambda,\mu) &= [3+w(H:\lambda\vee 3,\mu\wedge 3)]\vee[2+w(I:\lambda\vee 2,\mu\wedge 2)]\\
&= [3+13-\lambda\vee 3\vee 9-\mu\wedge 3\wedge 4]\vee[2+w(I:\lambda\vee 2,\mu\wedge 2)]\\
&= [16-\lambda\vee 9-\mu\wedge 3]\vee[2+w(I:\lambda\vee 2,\mu\wedge 2)] && (34)\\
\pi^*(E:\lambda,\mu) &= \text{? (will be decided later on)} \qquad (\lambda,\mu)\in\Omega(E) && (35)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
w(F:\lambda,\mu) &= [8+w(H:\lambda\vee 8,\mu\wedge 8)]\vee[11+w(I:\lambda\vee 11,\mu\wedge 11)]\\
&\qquad \vee[5+w(J:\lambda\vee 5,\mu\wedge 5)]\vee[9+w(K:\lambda\vee 9,\mu\wedge 9)]\\
&= [8+13-\lambda\vee 8\vee 9-\mu\wedge 8\wedge 4]\vee[11+w(I:\lambda\vee 11,\mu\wedge 11)]\\
&\qquad \vee[5+w(J:\lambda\vee 5,\mu\wedge 5)]\vee[9+w(K:\lambda\vee 9,\mu\wedge 9)]\\
&= [21-\lambda\vee 9-\mu\wedge 4]\vee[11+w(I:\lambda\vee 11,\mu\wedge 11)]\\
&\qquad \vee[5+w(J:\lambda\vee 5,\mu\wedge 5)]\vee[9+w(K:\lambda\vee 9,\mu\wedge 9)] && (36)\\
\pi^*(F:\lambda,\mu) &= \text{? (will be decided later on)} \qquad (\lambda,\mu)\in\Omega(F) && (37)
\end{aligned}
$$

$$
w(G:\lambda,\mu) = 4+w(K:\lambda\vee 4,\mu\wedge 4)
$$

$$
\begin{aligned}
&= 4+8-\lambda\vee 4\vee 5-\mu\wedge 4\wedge 3 \\
&= 12-\lambda\vee 5-\mu\wedge 3 && (38)\\
\pi^*(G:\lambda,\mu) &= K \qquad (\lambda,\mu)\in\Omega(K) && (39)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\clubsuit\ w(B:\lambda,\mu) &= 11+w(E:\lambda\vee 11,\mu\wedge 11) && (40)\\
\pi^*(B:\lambda,\mu) &= E \qquad (\lambda,\mu)\in\Omega(B) && (41)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
w(C:\lambda,\mu) &= [8+w(E:\lambda\vee 8,\mu\wedge 8)]\vee[4+w(F:\lambda\vee 4,\mu\wedge 4)]\\
&\qquad \vee[9+w(G:\lambda\vee 9,\mu\wedge 9)] && (42)\\
\pi^*(C:\lambda,\mu) &= \text{? (will be decided later on)} \qquad (\lambda,\mu)\in\Omega(C) && (43)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
w(D:\lambda,\mu) &= [5+w(F:\lambda\vee 6,\mu\wedge 6)]\vee[6+w(G:\lambda\vee 6,\mu\wedge 6)] && (44)\\
\pi^*(D:\lambda,\mu) &= \text{? (will be decided later on)} \qquad (\lambda,\mu)\in\Omega(D) && (45)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\clubsuit\ w(A:\lambda,\mu) &= [5+w(B:\lambda\vee 5,\mu\wedge 5)]\vee[2+w(C:\lambda\vee 2,\mu\wedge 2)]\\
&\qquad \vee[3+w(D:\lambda\vee 3,\mu\wedge 3)] && (46)\\
\pi^*(A:\lambda,\mu) &= \text{? (will be decided later on)} \qquad (\lambda,\mu)\in\Omega(A) && (47)
\end{aligned}
$$

さて, $\Omega(X)$ は (18) より

$$
\Omega(Y)=\left\{(\lambda',\mu')\ \middle|\ \begin{array}{l}\lambda'=\lambda\vee g_{n-1}(X,Y),\\ \mu'=\mu\wedge g_{n-1}(X,Y)\end{array}\ (\lambda,\mu)\in\Omega(X)\text{ for feasible arc }(X,Y)\right\}. \qquad (48)
$$

を満たしているので, 以下, 具体的に $\Omega(X)$ のとり得る値を求める.

$$
\begin{aligned}
\diamondsuit\ \Omega(A) &= \{(2,11)\}\\[1ex]
\diamondsuit\ \Omega(B) &= \{(5,5)\}\\
\Omega(C) &= \{(2,2)\}\\
\Omega(D) &= \{(3,3)\}\\[1ex]
\diamondsuit\ \Omega(E) &= \{(11,5),(8,2)\}\\
\Omega(F) &= \{(6,3),(4,2)\}\\
\Omega(G) &= \{(9,2),(6,3)\}\\[1ex]
\diamondsuit\ \Omega(H) &= \{(11,3),(8,3),(8,2)\} && (49)\\
\Omega(I) &= \{(11,3),(11,2),(8,2)\}\\
\Omega(J) &= \{(6,3),(5,2)\}\\
\Omega(K) &= \{(9,3),(9,2),(6,3)\}\\[1ex]
\diamondsuit\ \Omega(L) &= \{(11,3),(11,3),(9,3),(9,2),(8,2),(7,3),(7,2)\}\\
\Omega(M) &= \{(11,3),(11,2),(9,3),(9,2),(8,3),(8,2),(6,3)\}\\[1ex]
\diamondsuit\ \Omega(N) &= \{(11,3),(11,2),(9,3),(9,2),(8,3),(8,2),(7,3),(7,2),(6,3)\}.
\end{aligned}
$$

すなわち, 先の再帰式の計算過程においては, (λ,μ) は (49) の組合せのみを考慮すればよい.

実際に, これらの組み合わせで (21)~(47) 計算すると

$$\heartsuit\ w(N:\lambda,\mu) = 0-\lambda\vee(-\infty)-\mu\wedge\infty \qquad (\lambda,\mu)\in\Omega(N) \tag{50}$$

$$\heartsuit\ w(L:\lambda,\mu) = 4-\lambda\vee 4-\mu\wedge 4, \quad \pi^*(L:\lambda,\mu)=N \qquad (\lambda,\mu)\in\Omega(L) \tag{51}$$

$$w(M:\lambda,\mu) = 3-\lambda\vee 3-\mu\wedge 3, \quad \pi^*(M:\lambda,\mu)=N \qquad (\lambda,\mu)\in\Omega(M) \tag{52}$$

$$\heartsuit\ w(H:\lambda,\mu) = 13-\lambda\vee 9-\mu\wedge 4, \quad \pi^*(H:\lambda,\mu)=L \qquad (\lambda,\mu)\in\Omega(H) \tag{53}$$

$$w(I:\lambda,\mu) = 9-\lambda\vee 6-\mu\wedge 3, \quad \pi^*(I:\lambda,\mu)=M \qquad (\lambda,\mu)\in\Omega(I) \tag{54}$$

$$w(J:\lambda,\mu) = 11-\lambda\vee 7-\mu\wedge 4, \quad \pi^*(J:\lambda,\mu)=L \qquad (\lambda,\mu)\in\Omega(J) \tag{55}$$

$$w(K:\lambda,\mu) = 8-\lambda\vee 5-\mu\wedge 3, \quad \pi^*(K:\lambda,\mu)=M \qquad (\lambda,\mu)\in\Omega(K) \tag{56}$$

$$\heartsuit\ w(E:\lambda,\mu) = 16-\lambda\vee 9-\mu\wedge 3, \quad \pi^*(E:\lambda,\mu)=H \qquad (\lambda,\mu)\in\Omega(E) \tag{57}$$

$$w(F:\lambda,\mu) = 21-\lambda\vee 9-\mu\wedge 4, \quad \pi^*(F:\lambda,\mu)=H \qquad (\lambda,\mu)\in\Omega(F) \tag{58}$$

$$w(G:\lambda,\mu) = 12-\lambda\vee 5-\mu\wedge 3, \quad \pi^*(G:\lambda,\mu)=K \qquad (\lambda,\mu)\in\Omega(K) \tag{59}$$

$$\begin{aligned}\heartsuit\ w(B:5,5) &= 11+w(E:5\vee 11,5\wedge 11)\\ &= 11+w(E:11,5)\\ &= 11+2\\ &= 13, \quad \pi^*(B:5,5)=E \end{aligned} \tag{60}$$

$$\begin{aligned} w(C:2,2) &= [8+w(E:2\vee 8,2\wedge 8)]\vee[4+w(F:2\vee 4,2\wedge 4)]\\ &\qquad \vee[9+w(G:2\vee 9,2\wedge 9)]\\ &= [8+w(E:8,2)]\vee[4+w(F:4,2)]\vee[9+w(G:9,2)]\\ &= [8+5]\vee[4+10]\vee[9+1]\\ &= 14, \quad \pi^*(C:\lambda,\mu)=F \end{aligned} \tag{61}$$

$$\begin{aligned} w(D:3,3) &= [6+w(F:3\vee 6,3\wedge 6)]\vee[6+w(G:3\vee 6,3\wedge 6)]\\ &= [6+w(F:6,3)]\vee[6+w(G:6,3)]\\ &= [6+9]\vee[6+3]\\ &= 15, \quad \pi^*(D:3,3)=F \end{aligned} \tag{62}$$

$$\begin{aligned}\heartsuit\ w(A:2,11) &= [5+w(B:2\vee 5,11\wedge 5)]\vee[2+w(C:2\vee 2,11\wedge 2)]\\ &\qquad \vee[3+w(D:2\vee 3,11\wedge 3)]\\ &= [5+w(B:5,5)]\vee[2+w(C:2,2)]\vee[3+w(D:3,3)]\\ &= [5+13]\vee[2+14]\vee[3+15]\\ &= 18, \quad \pi^*(A:2,11)=B,\ D \end{aligned} \tag{63}$$

となる.

したがって, 初期状態 $s_1=(A:2,11)$ からの最適政策 $\pi^*=\{\pi^*(X:\lambda,\mu)|(\lambda,\mu)\in\Omega(X),\ X\in\mathcal{S}\}$ は以

下のようになる.

$$
\begin{aligned}
s_1 = (A:2,11) \Rightarrow \pi^*(A:2,11) = B \rightarrow s_2^* = (B:5,5) \Rightarrow \pi^*(B:5,5) = E \\
\rightarrow s_3^* = (E:11,5) \Rightarrow \pi^*(E:11,5) = H \rightarrow s_4^* = (H:11,5) \Rightarrow \pi^*(H:11,5) = L \\
\rightarrow s_5^* = (L:11,4) \Rightarrow \pi^*(L:11,4) = N \rightarrow s_6^* = (N:11,4)
\end{aligned} \tag{64}
$$

から, 最大値を与えるルートは

$$A \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow H \rightarrow L \rightarrow N \tag{65}$$

であり, そのときの最大値は

$$5+11+3+9+4-5\vee 11\vee 3\vee 9\vee 4-5\wedge 11\wedge 3\wedge 9\wedge 4=18 \tag{66}$$

である.

また, この問題に対しては, (65) の他にもう 1 つ最適政策が存在し,

$$
\begin{aligned}
s_1 = (A:2,11) \Rightarrow \pi^*(A:2,11) = D \rightarrow s_2^* = (D:3,3) \Rightarrow \pi^*(D:3,3) = F \\
\rightarrow s_3^* = (F:6,3) \Rightarrow \pi^*(F:6,3) = H \rightarrow s_4^* = (H:8,3) \Rightarrow \pi^*(H:8,3) = L \\
\rightarrow s_5^* = (L:9,3) \Rightarrow \pi^*(L:9,3) = N \rightarrow s_6^* = (N:9,3)
\end{aligned} \tag{67}
$$

より

$$A \rightarrow D \rightarrow F \rightarrow H \rightarrow L \rightarrow N \tag{68}$$

も最適政策であり, そのときの最大値は

$$3+6+8+9+4-3\vee 6\vee 8\vee 9\vee 4-3\wedge 6\wedge 8\wedge 9\wedge 4=18 \tag{69}$$

である.

参考文献

[1] R.E. Bellman and L.A. Zadeh, Decision-making in a fuzzy environment, *Management Science*, Vol.17, B141-B164, 1970.

[2] T. Fujita and K. Tsurusaki, Stochastic optimization of multiplicative functions with negative value, *J. Operations Res. Soc. Japan* **41**, 351-373, 1998.

[3] 岩本 誠一, 『動的計画論』, 九州大学出版会, 1987.

[4] 岩本 誠一, 『マルチメディア環境と経済学』, 第 9 章 多段決定過程：最小型評価系, 九州大学出版会, 205-236, 1996.

[5] S. Iwamoto and T. Fujita, Stochastic decision-making in a fuzzy environment, *J. Operations Res. Soc. Japan* **38**, 467-482, 1995.

[6] 岩本 誠一, 津留崎 和義 , 『マルチメディア環境と経済学』, 第 8 章 多段決定過程：加法型評価系, 九州大学出版会, 181-204, 1996.