数理解析研究所講究録
1079 巻 1999 年 104-109



# A first-passage problem with multiple costs

長岡工業高等専門学校　涌田和芳 (WAKUTA Kazuyoshi)

## 1. はじめに

Sancho(1985)は、完全エルゴード性の条件の下で、first-passage 問題の政策反復アルゴリズムを示した. Bertsekas & Tsitsiklis(1991) は，この問題を確率的最短経路問題と呼び，確率 1 で目的地に到達しない政策が存在する場合を扱った．そして，最短経路問題のいわゆる“コストは正”という仮定を弛めて，“improper な政策の期待コストは無限大”という仮定に置き換えた．一方，実際上の問題のために，多目的最短経路問題が研究されている(Sancho(1986), Sniedovich(1988))．そこで，本論では多目的 first-passage 問題を考える．確率 1 で目的地に到達しない政策の存在を認める．また，多目的コストを扱うために，コストは非負であるという仮定をおく．そして，最適な確定的定常政策を特徴付け，それを求める政策反復アルゴリズムを示す.

## 2. 多目的 first-passage 問題(FPPMC)

$S=\{1,2,\ldots,N\}$ : 状態空間. $A(i)=$ 有限集合 : 行動空間.

$p(j|i,a),\ i,j\in S, a\in A(i)$ : 推移確率. $c(i,a)=(c^1(i,a),\ldots,c^m(i,a))$ : コスト関数.

$N$ : 目標状態（目的地）. 任意の $a\in A(N)$ に対して, $p(N|N,a)=1, c(N,a)=0$.

[仮定 1] 任意の $i\in S, a\in A(i)$ に対して, $c(i,a)\geq 0$（ベクトルに対する不等号 $\geqq, \geq, >$ は, 通常の意味で用いる）.

$f:i_1-\text{proper}\Leftrightarrow P_f\{X_t=N \text{ for some } t\geqq 1|X_1=i_1\}=1$.

$f$:proper $\Leftrightarrow f$:任意の $i_1\in S'$ に対して, $i_1-$proper. ただし, $S'=S\setminus N$.

[仮定 2] 少なくとも 1 つの properな確定的定常政策が存在する.

$\Pi$ : すべての政策の集合, $\Pi_D$ : すべての確定的定常政策の集合

$$I_\pi^k(i_1)=E_\pi\left[\sum_{t=1}^{\infty}c^k(X_t,Y_t)|X_1=i_1\right]$$

$I_\pi(i_1)=(I_\pi^1(i_1),\ldots,I_\pi^m(i_1))$ : $\pi$ のコスト

$V(i_1)=\bigcup_{\pi\in\Pi}\{I_\pi(i_1)\}$, $V_D(i_1)=\bigcup_{f^\infty\in\Pi_D}\{I_{f^\infty}(i_1)\}, i_1\in S$, とおく.

$\overline{R}=R\cup\{\infty\}$. $U\subset\overline{R}^m$ に対して, $e(U)=\{x\in U|\ y\leqq x$ ならば $y=x\}$.

$\pi$ : $i_1-$最適 $\Leftrightarrow I_\pi(i_1)\in e(V(i_1))$. $\pi$ : 最適 $\Leftrightarrow \pi$ : 任意の $i_1\in S'$ に対して $i_1-$最適.

$S(f,i_1)=\{j\in S | P_f(X_t=j|X_1=i_1\}>0 \text{ for some } t\geqq 1\}, f\in\Pi_D, i_1\in S'$

$S(i_1)=\bigcup_{f\in\Pi_D} S(f,i_1), f\in\Pi_D$, とおく.

**[補題 1]** $f\in\Pi_D$ が $i_1$ −properならば, $I_f^k(i_1)<\infty, k=1,\ldots,m$. さもなければ, ある $k$ に対して, $I_f^k(i_1)=\infty$.

**[証明]**

・$f$ は $i_1$ −proper とする. このとき, 状態空間が $S(f,i_1)$ の吸収マルコフ連鎖ができる.

$m_f(i_1)$ : $i_1$ から $N$ への平均 first passage 時間, とする. このとき

$$I_f^k(i_1)=E_f\left[\sum_{t=1}^{\infty}c^k(X_t,Y_t)\middle|X_1=i_1\right]$$
$$\leqq\left(\max_{j,a}c^k(j,a)\right)m_f(i_1)<\infty,\ k=1,2,\ldots,m.$$

・$f$ は $i_1$ −proper ではないとする. このとき, $N$ を含まない再帰クラスがある.

$\sum_{t=1}^{\infty}P_f\{X_t=j|X_1=i_1\}=\infty$ なる $j\in S'$ が存在する. $c(j,f(j))\geq 0$ なので, ある $k$ に対して, $I_f^k(i_1)=\infty$.

$\widetilde{\Pi}(i_1)=\{\pi\in\Pi | I_\pi^k(i_1)<\infty, k=1,\ldots,m\}$, $\widetilde{\Pi}_D(i_1)=\{f\in\Pi_D | I_f^k(i_1)<\infty, k=1,\ldots,m\}$

$\widetilde{V}(i_1)=\bigcup_{\pi\in\widetilde{\Pi}(i_1)}\{I_\pi(i_1)\}$, $\widetilde{V}_D(i_1)=\bigcup_{f^\infty\in\widetilde{\Pi}_D(i_1)}\{I_{f^\infty}(i_1)\}, i_1\in S'$, とおく.

**[補題 2]** $e(co\widetilde{V}_D(i_1))=e(co\widetilde{V}_D(i_1)+R_+^m)=e(\widetilde{V}(i_1))=e(V(i_1)), i_1\in S'$.

## 3. 最適政策

$B^m(S)$ : $S$ から $R^m$ へのすべての関数の集合.

$\lambda\in B^m(S)$, $\lambda>0$ に対して, $c^\lambda(i_1,i_t,a_t)=<\lambda(i_1),c(i_t,a_t)>$ をコスト関数にもつ非定常動的計画 NDP($\lambda$)を考える. 補題2より, 各 $i_1\in S'$ に対して, 政策は $\widetilde{\Pi}(i_1)$ に制限してよい.

$$J_\pi^\lambda(i_1)=E_\pi\left[\sum_{t=1}^{\infty}c^\lambda(X_1,X_t,Y_t)\middle|X_1=i_1\right],\ i_1\in S'.$$

$\pi^*$ : NDP($\lambda$)で最適 $\Leftrightarrow$ 任意の $i_1\in S'$ と $\pi\in\widetilde{\Pi}(i_1)$ に対して $J_{\pi^*}^\lambda(i_1)\geqq J_\pi^\lambda(i_1)$.

**[命題 1]** $\pi$ が FPPMC で最適であるための必要十分条件は, $\pi$ が NDP($\lambda$), $\lambda>0$, で最適であることである.

**[命題 2]** FPPMCに, 最適な proper 確定的定常政策が存在する.

$T_a u(i) = c(i,a) + \sum_{j \in S} p(j|i,a)u(j),\ u \in B^m(S)$

$T_f u(i) = T_{f(i)} u(i)$， $L_f(i,a) = T_a I_f(i)$

$H_c = \{x \in R^m | < c, x > \leqq 0\}$， $c \in R^m$， とおく．

次の定理は，Wakuta & Togawa(1998)と同様に証明できる．

**[定理 1]** $f^*$ が最適ならば，$f^*$ は proper, かつ各 $i_1 \in S'$ に対して

$$L_{f^*}(i_t, a_t) - I_{f^*}(i_t) \in H_{\lambda(i_1)},\quad i_t \in S(f^*, i_1),\ a_t \in A(i_t)$$

なる $\lambda \in B^m(S'), \lambda > 0$，が存在する．

**[定理 2]** $f^*$ が proper, かつ各 $i_1 \in S'$ に対して

$$L_{f^*}(i_t, a_t) - I_{f^*}(i_t) \in H_{\lambda(i_1)},\quad i_t \in S(i_1),\ a_t \in A(i_t)$$

なる $\lambda \in B^m(S'), \lambda > 0$，が存在すれば，$f^*$ は最適である．

**[系]** $f^* \in \Pi_D$ は proper，かつ

$$L_{f^*}(i,a) - I_{f^*}(i) \in H_\lambda,\ i \in S, a \in A(i)$$

なる $\lambda > 0$ が存在すれば，$f^*$ は最適である．

$B$：最適でないことがわかっている確定的定常政策の集合

$\Pi'_D = \Pi_D \setminus B$

$V'_D(i_1) = \bigcup_{f \in \Pi'_D} \{I_f(i_1)\}$， $i_1 \in S'$， とおく．

**[定理 3]** $f^* \in \Pi_D$ が最適であるための必要十分条件は，$f^*$ は proper，かつ各 $i_1 \in S'$ に対して

$$I_f(i_1) - I_{f^*}(i_1) \in H_{\lambda(i_1)},\ f \in \Pi'_D$$

なる $\lambda \in B^m(S')$，$\lambda > 0$，が存在することである．

$q_f(i,a) = L_f(i,a) - I_f(i),\ (i,a) \in GrA$

$Q_f$: $q_f(i,a), i \in S', a \in A(i)$ を行にもつ行列

$\overline{Q}_f(i_1), i_1 \in S'$: $q_f(i_t, a_t), i_t \in S(f, i_1) \setminus \{N\}, a_t \in A(i_t)$ を行にもつ行列

$\overline{\overline{Q}}_f(i_1), i_1 \in S'$: $q_f(i_t, a_t), i_t \in S(i_1) \setminus \{N\}, a_t \in A(i_t)$ を行にもつ行列，とおく．

**[定理 4]** $f^* \in \Pi_D$ が最適ならば，$f^*$ は proper，かつ次の各線形不等式系が解をもつ．

$$(S_1): \begin{cases} x > 0 \\ \overline{Q}_{f^*}(1)x \geqq 0 \end{cases}, \ldots, (S_{N-1}): \begin{cases} x > 0 \\ \overline{Q}_{f^*}(N-1)x \geqq 0 \end{cases}$$

[定理 5]　$f^* \in \Pi_D$ が proper，かつ次の各線形不等式系が解をもてば，$f^*$ は最適である．

$$(T_1):\begin{cases} x>0 \\ \overline{\overline{Q}}_{f^*}(1)x \geqq 0 \end{cases},\ldots\ldots,(T_{N-1}):\begin{cases} x>0 \\ \overline{\overline{Q}}_{f^*}(N-1)x \geqq 0 \end{cases}$$

[系]　$f^* \in \Pi_D$ が proper，かつ次の線形不等式系が解をもてば，$f^*$ は最適である．

$$(S_0):\begin{cases} x>0 \\ Q_{f^*}x \geqq 0 \end{cases}$$

$d_f^g(i_1) = I_g(i_1) - I_f(i_1),\ g \in \Pi'_D,\ i_1 \in S'$

$D_f(i_1), i_1 \in S'$: $d_f^g(i_1), g \in \Pi'_D$ を行にもつ行列，とおく．

[定理 6]　$f^* \in \Pi_D$ が最適であるための必要十分条件は，$f^*$ が proper，かつ次の各線形不等式系が解をもつことである．

$$(U_1):\begin{cases} x>0 \\ D_f(1)x \geqq 0 \end{cases},\ldots\ldots,(U_{N-1}):\begin{cases} x>0 \\ D_f(N-1)x \geqq 0 \end{cases}$$

以上の線形不等式系の問題は，次のようなＬＰ問題として定式化できる．

$$P(S):\ \text{Maximize } y \quad \text{subject to} \quad \begin{cases} x_1 \geqq y,\ldots\ldots,x_m \geqq y \\ Bx \geqq 0 \\ x_1 \geqq 0,\ldots\ldots,x_m \geqq 0, y \geqq 0, \end{cases}$$

## 4. 政策反復アルゴリズム

$f, g \in \Pi_D$ に対して，$I_f^g(i) = T_g I_f(i), i \in S$ とおく．

[補題 3]　$f$ は proper とする．このとき，

(i)　$I_f^g - I_f^f \leq 0$ ならば，$g$ も proper で，$I_g \leq I_f$．

(ii)　$I_f^g - I_f^f = 0$ ならば，$I_g = I_f$．

(iii)　$I_f^g - I_f^f \geq 0$ かつ $g$ が proper ならば，$I_g \geq I_f$．

Policy iteration algorithm

$E_n$：政策反復で支配されない政策の集合

$F_n$：政策反復で支配される政策の集合，とおく．

PhaseⅠ

1. $E_0=F_0=\phi$ とおき，任意の $f_1\in\Pi_D$ を選ぶ．
2. $f_n, n\geqq 1$ に対して，$I_{f_n}(i), i\in S'$ を求 proper かどうか判定する．
3. $f_n$ が proper でなければ，$E_n=E_{n-1}$，$F_n=F_{n-1}\cup\{f_n\}$ とおく．
   そして，$f_{n+1}\in(\Pi_D\setminus(E_n\cup F_n))$ を選び，2 へ行く．
4. $f_n$ が proper ならば，
   $A_{f_n}=\{g\in(\Pi_D\setminus(E_{n-1}\cup F_{n-1}))\mid\ I^g_{f_n}-I^{f_n}_{f_n}\leq 0\}$
   $B_{f_n}=\{g\in(\Pi_D\setminus(E_{n-1}\cup F_{n-1}))\mid\ I^g_{f_n}-I^{f_n}_{f_n}\geq 0\}$
   $C_{f_n}=\{g\in(\Pi_D\setminus(E_{n-1}\cup F_{n-1}))\mid\ I^g_{f_n}-I^{f_n}_{f_n}=0\}$，とおく．
   (i) $A_{f_n}\neq\phi$ ならば，$E_n=E_{n-1}$，$F_n=F_{n-1}\cup B_{f_n}\cup C_{f_n}$ とおく．そして，2 へ行く．
   (ii) $A_{f_n}=\phi$ ならば，
   $E_n=E_{n-1}\cup C_{f_n}$，$F_n=F_{n-1}\cup B_{f_n}$ とおく．そして，2 へ行く．
5. $E_n\cup F_n=\Pi_D$ となったら止める．

PhaseⅡ

$E^*=E_n$，$F^*=F_n$，$E$：最適なすべての政策，$F$：最適でないすべての政策，とおく．

1. 各 $f\in E^*$ に対して，ＬＰ問題 $P(S_0)$ を解いて，$E'\subset E$ を求める．

PhaseⅢ

1. 各 $f\in(E^*\setminus E')$ に対して，ＬＰ問題 $P(U_1),...,P(U_N)$ を解いて，最適かどうか判定する．$E$ と $F$ が求まる．

## 5. 数値例

$S=\{1,2,3,4\}$，ここで，4 が目標状態

$A(1)=\{1,2,3\}, A(2)=\{1\}, A(3)=\{1,2,3\}, A(4)=\{1\}$

$p(2|1,1)=p(3|1,2)=p(4|1,3)=1,\ p(3|2,1)=1$

$p(1|3,1)=p(4|3,2)=1, p(1|3,3)=p(4|3,3)=\frac{1}{2}, p(4|4,1)=1$

$c(1,1)=(0,2), c(1,2)=(2,1), c(1,3)=(6,6),\ c(2,1)=(0,1)$

$c(3,1)=(2,1), c(3,2)=(4,1), c(3,3)=(3,1),\ c(4,1)=(0,0).$

$\alpha_1:\alpha_1(1)=1,\alpha_1(3)=1$；$\alpha_2:\alpha_2(1)=1,\alpha_2(3)=2$；$\alpha_3:\alpha_3(1)=1,\alpha_3(3)=3$

$\beta_1:\beta_1(1)=2,\beta_1(3)=1$；$\beta_2:\beta_2(1)=2,\beta_2(3)=2$；$\beta_3:\beta_3(1)=2,\beta_3(3)=3$

$\gamma_1:\gamma_1(1)=3,\gamma_1(3)=1$；$\gamma_2:\gamma_2(1)=3,\gamma_2(3)=2$；$\gamma_3:\gamma_3(1)=3,\gamma_3(3)=3.$

PhaseⅠ

(1) $f_1=\alpha_1$ を選び, $I_{\alpha_1}(i), i=1,2,3$ を計算する. 補題3より $\alpha_1$ は, proper ではない.

$E_1=\phi$, $F_1=\{\alpha_1\}$

(2) $f_2=\alpha_2$ を選び, $I_{\alpha_2}(i), i=1,2,3$ を計算する.

$I_{\alpha_2}(1)=(4,4)$, $I_{\alpha_2}(2)=(4,2)$, $I_{\alpha_2}(3)=(4,1)$

$\alpha_2$ は, proper.

$I_{\alpha_2}^{\alpha_3}(1)-I_{\alpha_2}^{\alpha_2}(1)=(0,0), I_{\alpha_2}^{\alpha_3}(2)-I_{\alpha_2}^{\alpha_2}(2)=(0,0), I_{\alpha_2}^{\alpha_3}(3)-I_{\alpha_2}^{\alpha_2}(3)=(1,2)$

$I_{\alpha_2}^{\beta_1}(1)-I_{\alpha_2}^{\alpha_2}(1)=(2,-2), I_{\alpha_2}^{\beta_1}(2)-I_{\alpha_2}^{\alpha_2}(2)=(0,0), I_{\alpha_2}^{\beta_1}(3)-I_{\alpha_2}^{\alpha_2}(3)=(2,4)$

$I_{\alpha_2}^{\beta_2}(1)-I_{\alpha_2}^{\alpha_2}(1)=(2,-2), I_{\alpha_2}^{\beta_2}(2)-I_{\alpha_2}^{\alpha_2}(2)=(0,0), I_{\alpha_2}^{\beta_2}(3)-I_{\alpha_2}^{\alpha_2}(3)=(0,0)$

$I_{\alpha_2}^{\beta_3}(1)-I_{\alpha_2}^{\alpha_2}(1)=(2,-2), I_{\alpha_2}^{\beta_3}(2)-I_{\alpha_2}^{\alpha_2}(2)=(0,0), I_{\alpha_2}^{\beta_3}(3)-I_{\alpha_2}^{\alpha_2}(3)=(1,2)$

$I_{\alpha_2}^{\gamma_1}(1)-I_{\alpha_2}^{\alpha_2}(1)=(2,2), I_{\alpha_2}^{\gamma_1}(2)-I_{\alpha_2}^{\alpha_2}(2)=(0,0), I_{\alpha_2}^{\gamma_1}(3)-I_{\alpha_2}^{\alpha_2}(3)=(2,4)$

$I_{\alpha_2}^{\gamma_2}(1)-I_{\alpha_2}^{\alpha_2}(1)=(2,2), I_{\alpha_2}^{\gamma_2}(2)-I_{\alpha_2}^{\alpha_2}(2)=(0,0), I_{\alpha_2}^{\gamma_2}(3)-I_{\alpha_2}^{\alpha_2}(3)=(0,0)$

$I_{\alpha_2}^{\gamma_3}(1)-I_{\alpha_2}^{\alpha_2}(1)=(2,2), I_{\alpha_2}^{\gamma_3}(2)-I_{\alpha_2}^{\alpha_2}(2)=(0,0), I_{\alpha_2}^{\gamma_3}(3)-I_{\alpha_2}^{\alpha_2}(3)=(1,2)$

$A_{\alpha_2}=\phi, B_{\alpha_2}=\{\alpha_3,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3\}$, $C_{\alpha_2}=\{\alpha_2\}$

$E_2=\{\alpha_2\}$, $F_2=\{\alpha_1,\alpha_3,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3\}$

(3) $f_3=\beta_1$ を選び, $I_{\beta_1}(i), i=1,2,3$ を計算する. 補題3より $\beta_1$ は, proper ではない.

$E_3=\{\alpha_2\}$, $F_3=\{\alpha_1,\alpha_3,\beta_1,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3\}$

(4) $f_4=\beta_2$ を選び, $I_{\beta_2}(i), i=1,2,3$ を計算する.

$I_{\beta_2}(1)=(6,2), I_{\beta_2}(2)=(4,2), I_{\beta_2}(3)=(4,1)$

$\beta_2$ は, proper.

$I_{\beta_2}^{\beta_3}(1)-I_{\beta_2}^{\beta_2}(1)=(2,1), I_{\beta_2}^{\beta_3}(2)-I_{\beta_2}^{\beta_2}(2)=(0,0), I_{\beta_2}^{\beta_3}(3)-I_{\beta_2}^{\beta_2}(3)=(2,1)$

$A_{\beta_2}=\phi, B_{\beta_2}=\{\beta_3\}$, $C_{\beta_2}=\{\beta_2\}$

$E_4=\{\alpha_2,\beta_2\}$, $F_4=\{\alpha_1,\alpha_3,\beta_1,\beta_3,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3\}$

(5) $E_2\cup F_2=\Pi_D$ なので止める.

**参考文献**

1. Bertsekas & Tsitsiklis (1991) An analysis of stochastic shortest path problems, MOR 16, 580-595.
2. Sancho (1985) Routing problems and Markov decision processes, JMAA 105, 76-85.
3. Sancho (1986) A multi-objective routing problem, Eng. Opt. 10, 71-76.
4. Sniedovich (1988) A multi-objective routing problems revisited, Eng. Opt. 13, 99-108.
5. Wakuta & Togawa (1998) Solution procedures for multi-objective Markov decision processes, Optimization 43, 29-46.