数理解析研究所講究録
1080 巻 1999 年 56-66

Simultaneous Unitarizability and Similarity Problem

木更津高専　　和田　州平　(Shuhei Wada　)

1. 序　ヒルベルト空間上の有界線形作用素 x に対し，可逆な作用素 S が存在して SxS^{-1} がユニタリとなるとき，x はユニタリ化可能と言う．ユニタリ化可能作用素は以下のように特徴付けできる [7].

$$x \text{ がユニタリ化可能} \iff \sup\{\|x^n\| : n \in \mathbb{Z}\} < \infty.$$

上の結果は J.Dixmier [5] によって，以下のように拡張された．

命題 **1.**　φ を（局所コンパクト）アメナブル群 G の $\mathcal{H}$ 上の連続表現とする．φ が一様有界 (i.e. $\sup_{g\in G}\|\varphi(g)\| < \infty$) ならば，可逆な作用素 S が存在して，$S\varphi(\cdot)S^{-1}$ はユニタリ表現になる．

ユニタリ化可能な作用素の集合 $\mathcal{F} \subset B(\mathcal{H})$ に対し，可逆な作用素 $S \in B(\mathcal{H})$ が存在して，$S\mathcal{F}S^{-1}$ の全要素がユニタリ作

用素になるとき，$\mathcal{F}$は同時ユニタリ化可能と言うことにする．本稿では，まず上述の結果を用いて同時ユニタリ化可能な作用素の集合を考察する．さらに，この考察で得られた結果を，C*環の Similarity Problem に応用する．

2．同時ユニタリ化可能性　単位元を持つ C*環 A に対して，A のユニタリ元全体を $\mathcal{U}(A)$ と書く．次の定理は群の表現と C*環の表現が性質の良い表現へと”同時に”変形できるための条件を与える．

定理 **2.**　φ を（局所コンパクト）アメナブル群 G の $\mathcal{H}$ 上の一様有界連続表現とする．ψ をユニタル C*環 A の $\mathcal{H}$上の有界表現とする．φ と ψ が次の条件を満たすとする．

$$\varphi(g)\psi(\mathcal{U}(A))\varphi(g^{-1}) \subset \mathcal{U}(B(\mathcal{H})) \quad \text{for all } g \in G.$$

このとき可逆な作用素 Sが存在して $S\varphi(\cdot)S^{-1}$ はユニタリ表現に，$S\psi(\cdot)S^{-1}$は $*$-表現になる．

証明.　ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の元 ξ, ηにたいし, G 上の連続

関数 $f_{\xi,\eta}$ を以下のように定義する:

$$f_{\xi,\eta}(g)=(\varphi(g^{-1})\xi\mid\varphi(g^{-1})\eta),$$

ここで $(\cdot\mid\cdot)$ は $\mathcal{H}$ の内積を表す. 関数 f を用いて $\mathcal{H}$ 上の新しい内積を以下のように定義する:

$$<\xi\mid\eta>=m(f_{\xi,\eta}),$$

ただし m は, アメナブル群 G の invariant mean とする. $M=\sup_{g\in G}\|\varphi(g)\|$ とすれば仮定から, 全ての $\xi\in\mathcal{H}$に対して

$$\frac{1}{M^2}(\xi\mid\xi)\leq<\xi\mid\xi>\leq M^2(\xi\mid\xi).$$

上記内積 $<\cdot\mid\cdot>$ に対して可逆な正作用素 Tが存在して, 任意の $\xi,\eta\in\mathcal{H}$ に関して

$$<\xi\mid\eta>=(T\xi\mid\eta),$$

と書ける. 従って $S=T^{1/2}$ とすれば $S\varphi(g)S^{-1}$ はユニタリ表現になる.

任意のユニタリ元 $u\in A$ に対して, $U_g=\varphi(g^{-1})\psi(u)\varphi(g)$ とすると, 仮定より U_g はユニタリ作用素になり,

$$\begin{aligned}
f_{\psi(u)\xi,\psi(u)\eta}(g)&=(\varphi(g^{-1})\psi(u)\xi\mid\varphi(g^{-1})\psi(u)\eta)\\
&=(U_g\varphi(g^{-1})\xi\mid U_g\varphi(g^{-1})\eta)\\
&=f_{\xi,\eta}(g)
\end{aligned}$$

が得られる．故に

$$S\psi(\mathcal{U}(A))S^{-1} \subset \mathcal{U}(B(\mathcal{H}))$$

となる．この議論から表現 $S\psi(\cdot)S^{-1}$ の有界性が分かる．従って，ψ に関する以下の性質を示せば証明は完了する:

$$S\psi(x^*)S^{-1} = (S\psi(x)S^{-1})^*, \quad \text{for all } x \in A.$$

任意の $x \in A$ に対して，スカラー α とユニタリ元 u, v が在って

$$x = \alpha(u + u^{-1} + iv + iv^{-1})$$

と書けるから，以下の等式が成立する:

$$\begin{aligned}
S\psi(x^*)S^{-1} &= \alpha(S\psi(u^{-1})S^{-1} + S\psi(u)S^{-1} \\
&\qquad - iS\psi(v^{-1})S^{-1} - iS\psi(v)S^{-1}) \\
&= \alpha(S\psi(u)S^{-1} + S\psi(u^{-1})S^{-1} \\
&\qquad + iS\psi(v)S^{-1} + iS\psi(v^{-1})S^{-1})^* \\
&= (S\psi(x)S^{-1})^*.
\end{aligned}$$

（証明終り）

この定理を用いて，同時ユニタリ化可能性に関する結果が得られる．

補題 **3.** $G_1, G_2, \ldots G_n$ をアメナブル群，φ を群 $G = ((G_1 \rtimes G_2) \rtimes \cdots) \rtimes G_n$ の $\mathcal{H}$上の連続表現とする．このとき可逆な作用素 Sが存在して $S\varphi(\cdot)S^{-1}$ はユニタリ表現になる．

証明. G の任意の元 g に対し，$g_i \in G_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ が存在して，$g = g_1 g_2 \cdots g_n$ と書ける．この事実から

$$\sup_{g \in G} \|\varphi(g)\| \leq \sup_{g_1 \in G_1} \|\varphi(g_1)\| \sup_{g_2 \in G_2} \|\varphi(g_2)\| \cdots \sup_{g_n \in G_n} \|\varphi(g_n)\|,$$

が分かる．アメナブル群の半直積は再びアメナブルになるから，φ はアメナブル群の一様有界連続表現である．従って命題 1 より，φ はユニタリ表現と similar になる．

（証明終り）

上記補題と定理 2 から以下の命題が得られる．

命題 **4.** $a_1, a_2, \cdots a_n$をユニタリ化可能で互いに可換な作用素， A を $\{a_i, a_i^{-1} \mid i = 1, 2, \cdots, n\}$. が生成する $B(\mathcal{H})$ の閉部分環とする．局所コンパクトアメナブル群 G の $\mathcal{H}$上の一様有界連続表現 φ が条件

$$\varphi(g)A\,\varphi(g)^{-1} \subset A \quad \text{for all } g \in G,$$

を満たすとき，$\{a_i, \varphi(g) \mid i = 1, 2, \cdots, n,\ g \in G\}$ は同時ユニタリ化可能である．

証明. 群 $\mathbb{Z}$ のアメナブル性と補題 3 から，$\mathcal{H}$ 上の可逆な作用素 S が存在して Sa_iS^{-1} はユニタリになる．ここで可換ユニタル C*環 SAS^{-1} のユニタリ元 u に対して，仮定から以下の事実が分かる:

$$S\varphi(g)S^{-1}uS\varphi(g^{-1})S^{-1} \in S\varphi(g)A\varphi(g^{-1})S^{-1} \subset SAS^{-1}.$$

SAS^{-1} は可換だから，$S\varphi(g)S^{-1}uS\varphi(g^{-1})S^{-1}$ は正規作用素で，スペクトルは u のそれと同じである．従って，任意の $g \in G$ に対し作用素 $S\varphi(g)S^{-1}uS\varphi(g^{-1})S^{-1}$ はユニタリ作用素となる．ここで定理 2 を使えば，求める結果が得られる．

（証明終り）

命題 4 を応用すると以下の具体例に対して，同時ユニタリ化可能性が保証される．

例 **1.** a, b をユニタリ化可能な作用素，c を積に関する交換子 $aba^{-1}b^{-1}$ とする．作用素 c が a, b 双方と可換ならば，$\{a, b\}$ は同時ユニタリ化可能である．

例 **2.** a, b をユニタリ化可能な作用素，$f : Sp(a) \longrightarrow Sp(a)$ を連続関数で以下の条件を満たすとする

$$bab^{-1} = f(a),$$

このとき $\{a, b\}$ は同時ユニタリ化可能となる．

3. Similarity Problem for C*-algebras 与えられた C*環 A にたいし，任意の有界表現 φ が常に $*$-表現と similar となるとき，A に対して similarity problem が解けるという．J.W.Bunce [1] と E.Christensen [2] は，核型 C*環に対して similarity problem が解ける事を示した．また，E.Christensen [3] は，similarity problem が解ける核型でない C*環の例とし

て property Γ を持つ II_1-factor を挙げた．これらの結果に関連して定理 5 を得た．証明は定理 2 を使う．

定理 **5.** G をアメナブル離散群，A をユニタル C*環とする．A に対して similarity problem が解けるならば A と G の接合積 $A \rtimes_\alpha G$ に対しても similarity problem が解ける．

証明. φ を $A \rtimes_\alpha G$ の有界表現とする．群 G のユニタリ表現 u が存在して $A \rtimes_\alpha G$ は $\{x, u_g \mid x \in A, g \in G\}$ で生成された C*環と見なせる．ここで準同型 $\alpha : G \longrightarrow Aut(A)$ と表現 u との間には，以下の関係式が成立する:

$$u_g x u_g^{-1} = \alpha_g(x).$$

A に関する仮定から， 可逆な作用素 $S_1 \in B(\mathcal{H})$ が存在して

$$x \in A \longrightarrow S_1 \varphi(x) S_1^{-1} \in B(\mathcal{H})$$

は，$*$-表現になる．

$\varphi_1(\cdot) = S_1 \varphi(\cdot) S_1^{-1}$ とおき，J を φ_1 の零空間とする．J は $A \rtimes_\alpha G$ の閉じた両側イデアルだから J は $*$-不変である．

$A \rtimes_\alpha G$ から $(A \rtimes_\alpha G)/J$ への標準的 $*$-準同型を π とする．$(A \rtimes_\alpha G)/J$ の任意の元 $\pi(x)$ に対して，$\tilde{\pi}(\pi(x)) := \varphi_1(x)$ とすると，$\tilde{\pi}$ は単射になる．さらに，φ_1 が $*$-準同型である事実を使えば，$\tilde{\pi}|_{\pi(A)}$ は $\pi(A)$ から $\varphi_1(A)$ への $*$-同型写像になる．

次に，

$$\varphi_1(u_g)\mathcal{U}(\varphi_1(A))\varphi_1(u_g)^{-1} \subset \mathcal{U}(\varphi_1(A))$$

を示す．まず，$\varphi_1(x)$ がユニタリ作用素になるような要素 x を C*環 A から任意に選ぶ．上で示した通り $\tilde{\pi}|_{\pi(A)}$ は $*$-同型写像だから，$\pi(x)$ もユニタリである．従って

$$\pi(\alpha_g(x)) = \pi(u_g x u_g^{-1}) = \pi(u_g)\pi(x)\pi(u_g)^{-1}$$

もユニタリで，さらに$\tilde{\pi}(\pi(\alpha_g(x))) = \varphi_1(\alpha_g(x))$ もユニタリである．故に

$$\varphi_1(u_g)\varphi_1(x)\varphi_1(u_g)^{-1} = \varphi_1(u_g x u_g^{-1}) = \varphi_1(\alpha_g(x))$$

もユニタリで，目的の関係式が成立する．ここで定理 2 を使えば，可逆な作用素 $S_2 \in B(\mathcal{H})$ が存在して，

$$x \in A \longrightarrow S_2\varphi_1(x)S_2^{-1} \in B(\mathcal{H})$$

は $*$-表現になり,

$$g \in G \longrightarrow S_2\varphi_1(u_g)S_2^{-1} \in B(\mathcal{H})$$

はユニタリ表現になる.

（証明終り）

参考文献

[1] J.W.Bunce, The similarity problem for representations of C*-algebras, Proc. Amer. Math. Soc. 81(1981), 409-414.

[2] E.Christensen, On non self adjoint representations of operator algebras, Amer. J. Math. 103(1981), 817-834.

[3] E. Christensen, Similarityies of II_1 factors with property Γ, J. Operator Theory 15(1986), 281-288.

[4] K. R. Davidson, C*-Algebras by Example, Fields Institute Monographs 6, Amer. Math. Soc., 1996.

[5] J. Dixmier, Les moyennes invariantes dans les semi-groupes et leurs applications, Acta Sci. Math. Szeged 12(1950), 213-227.

[6] F. Greenleaf, Invariant means on topological groups, Van Nostrand, New York, 1969.

[7] B.Sz.-Nagy, On uniformly bounded linear transformations in Hilbert space, Acta. Sci. Math. Szeged 11(1947), 152-157.

[8] G. Pisier, Similarity Problems and Completely Bounded Maps, Lecture Notes in Math. 1618, Springer-Verlag, 1996.