

# 連続 Euler 変換と Fourier 積分の収束の加速

京都大学数理解析研究所 大浦拓哉 (Takuya Ooura)

## 1 はじめに

通常の Euler 変換は，交代級数の収束を加速するための方法の一つである．一方，交代級数

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n f(n) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{i\pi n} f(n) \tag{1.1}$$

は，Fourier 積分

$$I = \int_0^{\infty} e^{i\pi x} f(x) dx \tag{1.2}$$

を刻み幅 1 で離散化したものである．したがって，Euler 変換を連続化すれば Fourier 積分の収束が加速されるものと期待できる．本稿ではまず，Fourier 積分の収束を速くするための方法の一つとして連続 Euler 変換を導く．この連続 Euler 変換とは，ある種の重みを被積分関数に掛ける変換であり，どんなに収束の遅い Fourier 積分でも短い有限区間の積分に近似的に変換できることを示す．また，加速を速くするような連続 Euler 変換の重み関数の選び方についても調べる．

次に，連続 Euler 変換を Fourier 積分の計算に応用することを考える．一般に，収束の遅い Fourier 積分の計算は，通常の数値積分公式が直接利用できず，普通の積分と比較して計算が複雑で計算量が多くなるという傾向がある [5], [6]．しかし，連続 Euler 変換を用いることで，本来は Fourier 積分には使えないさまざまな有限区間の数値積分公式が容易に利用可能になり，従来の方法よりも効率よく計算できるようになることを示す．

## 2 Euler 変換の重みの連続化

交代級数

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \tag{2.1}$$

を考える．一般に，この級数の Euler 変換は，

$$S_{\text{Euler}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\Delta\right)^n a_0, \quad (\Delta a_n \equiv a_{n+1} - a_n) \tag{2.2}$$

で表される．また，Euler 変換された級数を  $N$  項で打ち切った和は，次のように表すこともできる [3]．

$$\begin{aligned} S_{\text{Euler}}^{(N)} &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \left(-\frac{1}{2}\Delta\right)^n a_0 \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} w_m^{(N)} (-1)^m a_m \end{aligned} \tag{2.3}$$

$w_m^{(N)}$  は Euler 変換の重みで,

$$w_m^{(N)} = \sum_{n=m+1}^N \frac{1}{2^N} \binom{N}{n} \quad (2.4)$$

である.

ここで,  $N \rightarrow \infty$  での  $w_m^{(N)}$  の振舞いを調べる.  $w_m^{(N)}$  は二項分布の上側確率と考えられるので, 中心極限定理より,

$$\begin{aligned} w_m^{(N)} &\sim \int_{m+1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot N/4}} e^{-(x-N/2)^2/(2 \cdot N/4)} dx, \quad N \rightarrow \infty \\ &\sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{m/\sqrt{N/2} - \sqrt{N/2}}^{\infty} e^{-t^2} dt \end{aligned} \quad (2.5)$$

となる. したがって  $N \rightarrow \infty$  のときの  $w_m^{(N)}$  の振舞いは次のようになることがわかる.

$$w_m^{(N)} \sim \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(m/\sqrt{N/2} - \sqrt{N/2}), \quad N \rightarrow \infty \quad (2.6)$$

$$\operatorname{erfc}(x) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt$$

そこで,  $p, q$  を  $N$  に依存する正の数として, 連続な重み関数

$$w(x; p, q) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(x/p - q) \quad (2.7)$$

を導入する.

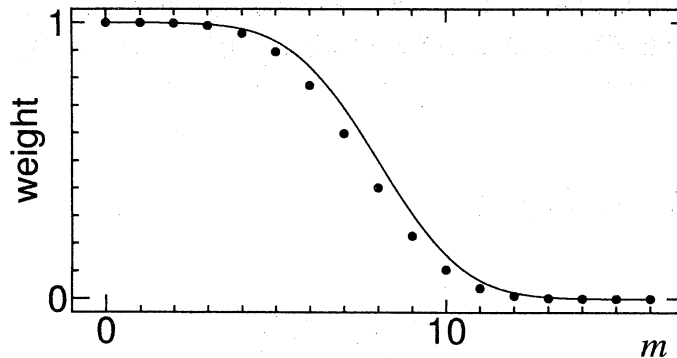


図 1: 離散的な重み  $w_m^{(N)}$  と連続な重み  $w(x; p, q)$  ( $N = 16$ ,  $p = q = (N/2)^{1/2}$ )

次に, Euler 変換の離散的な重み  $w_m^{(N)}$  の代わりに, この連続な重み関数  $w(x; p, q)$  を用いても, 交代級数の加速ができることを示す. まず,

$$S^{(N)} = \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n f(n) \quad (2.8)$$

$$S_w^{(N)} = \sum_{n=0}^{N-1} w(n; p, q) (-1)^n f(n) \quad (2.9)$$

とおく.

**定理 1**  $w(x; p, q) = \frac{1}{2}\operatorname{erfc}(x/p - q)$  ( $p, q$  はある正の数) とし,  $f(z)$  が領域  $|\arg(z + 1/2)| \leq \delta$  ( $\delta$  はある正の数で  $\delta < \pi/2$  と仮定する) で正則で, その領域で  $|f(z)| \leq M$  かつ

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \max_{|\theta| \leq \delta} |f(R - 1/2 + iR \tan \theta)| = 0$$

を満たすとする. このとき, 任意の  $\alpha \leq \tan \delta$ ,  $0 < \alpha < 1$  に対して,

$$|S^{(\infty)} - S_w^{(\infty)}| < \frac{M\sqrt{1+\alpha^2}}{1-e^{-\pi\alpha/2}} \left( \frac{\sqrt{\pi p}}{\sqrt{1-\alpha^2}} e^{(q'-\pi\alpha p/2)^2/(1-\alpha^2)} + \frac{2}{\pi\alpha} e^{(q'-\pi\alpha p)q'} \right) e^{-q'^2} \quad (2.10)$$

が成り立つ. ただし,  $q' = q + 1/(2p)$  である.

**証明**

誤差  $S^{(N)} - S_w^{(N)}$  は留数定理より,

$$S^{(N)} - S_w^{(N)} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\pi}{\sin \pi z} (1 - w(z; p, q)) f(z) dz \quad (2.11)$$

と書ける. ただし, 積分路  $C$  は図 2 に示すものである.

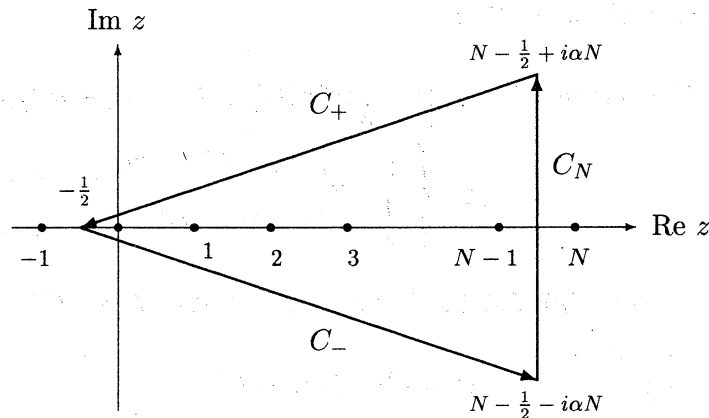


図 2: 積分路  $C$

よって, この誤差は不等式

$$|S^{(N)} - S_w^{(N)}| \leq \frac{1}{2\pi} \int_C \left| \frac{\pi}{\sin \pi z} \right| \cdot |1 - w(z; p, q)| \cdot |f(z)| \cdot |dz| \quad (2.12)$$

で抑えられ, この式の右辺を評価することで求める結果が得られる.

そこで, まず複素平面上での誤差関数の振舞いを調べておく. 誤差関数の定義より,

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{2}\operatorname{erfc}(z) &= 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-(t+z)^2} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-(t+z)^2} dt \end{aligned} \quad (2.13)$$

であるので, 絶対値をとって評価することにより,

$$\left| 1 - \frac{1}{2}\operatorname{erfc}(z) \right| \leq \begin{cases} 1 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty |e^{-t^2 - z^2}| dt = 1 + \frac{1}{2}|e^{-z^2}|, & \operatorname{Re} z \geq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^0 |e^{-t^2 - z^2}| dt = \frac{1}{2}|e^{-z^2}|, & \operatorname{Re} z < 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

を得る.

この結果を用いて, (2.12) 式の  $C_N$  からの寄与を評価すると, 次のようになる.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{C_N} \left| \frac{\pi}{\sin \pi z} \right| \cdot |1 - w(z; p, q)| \cdot |f(z)| \cdot |dz| \\ & < \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{\cosh \pi y} dy \cdot \left( 1 + \frac{1}{2} e^{-((N-1/2)/p-q)^2 + (N\alpha/p)^2} \right) \\ & \quad \cdot \max_{|y| \leq \alpha} |f(N - 1/2 + iNy)| \\ & \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (2.15)$$

次に, (2.12) 式の  $C_+$  上 ( $z = t - 1/2 + i\alpha t$ ) からの寄与を評価する. まず  $|\pi/\sin \pi z|$  については,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\pi}{\sin \pi z} \right| &= \frac{2\pi}{|1 - e^{2\pi iz}|} e^{\pi |z|} \\ &\leq \frac{2\pi}{1 + e^{-2\pi\alpha t} \cos 2\pi t} e^{-\pi\alpha t} \\ &< \frac{2\pi}{1 - e^{-\pi\alpha/2}} e^{-\pi\alpha t} \end{aligned} \quad (2.16)$$

となり, 次に  $|1 - w(z; p, q)|$  については,

$$\begin{aligned} |1 - w(z; p, q)| &= \left| 1 - \frac{1}{2} \operatorname{erfc}((t - 1/2)/p - q + i\alpha t/p) \right| \\ &\leq \begin{cases} 1 + \frac{1}{2} e^{-(t/p-q')^2 + (\alpha t/p)^2}, & t \geq pq' \\ \frac{1}{2} e^{-(t/p-q')^2 + (\alpha t/p)^2}, & t < pq' \end{cases} \end{aligned} \quad (2.17)$$

となる. ここで,  $q' = q + 1/(2p)$  である. したがって,  $C_+$  からの寄与は次のようになる.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{C_+} \left| \frac{\pi}{\sin \pi z} \right| \cdot |1 - w(z; p, q)| \cdot |f(z)| \cdot |dz| \\ & < \frac{1}{2\pi} \frac{2\pi}{1 - e^{-\pi\alpha/2}} \left( \int_0^{\infty} e^{-\pi\alpha t} \frac{1}{2} e^{-(t/p-q')^2 + (\alpha t/p)^2} M\sqrt{1 + \alpha^2} dt \right. \\ & \quad \left. + \int_{pq'}^{\infty} e^{-\pi\alpha t} M\sqrt{1 + \alpha^2} dt \right) \\ & < \frac{M\sqrt{1 + \alpha^2}}{1 - e^{-\pi\alpha/2}} \left( \frac{\sqrt{\pi p}}{2\sqrt{1 - \alpha^2}} e^{(q' - \pi\alpha p/2)^2 / (1 - \alpha^2)} + \frac{1}{\pi\alpha} e^{(q' - \pi\alpha p)q'} \right) e^{-q'^2} \end{aligned} \quad (2.18)$$

(2.12) 式の  $C_-$  からの寄与は  $C_+$  からの寄与とまったく同じになることがわかる. したがって,

$$\begin{aligned} |S^{(\infty)} - S_w^{(\infty)}| &= \lim_{N \rightarrow \infty} |S^{(N)} - S_w^{(N)}| \\ &< \frac{M\sqrt{1 + \alpha^2}}{1 - e^{-\pi\alpha/2}} \left( \frac{\sqrt{\pi p}}{\sqrt{1 - \alpha^2}} e^{(q' - \pi\alpha p/2)^2 / (1 - \alpha^2)} + \frac{2}{\pi\alpha} e^{(q' - \pi\alpha p)q'} \right) e^{-q'^2} \end{aligned} \quad (2.19)$$

が得られる.

[証明終り]

定理 1 より,  $p, q$  および  $\alpha$  を

$$q' = q + \frac{1}{2p} = \frac{\pi\alpha}{2} p \quad (2.20)$$

となるように選んだときの  $S_w^{(\infty)}$  の誤差は,

$$|S^{(\infty)} - S_w^{(\infty)}| < \frac{M\sqrt{1+\alpha^2}}{1-e^{-\pi\alpha/2}} \left( \frac{\sqrt{\pi p}}{\sqrt{1-\alpha^2}} + \frac{2}{\pi\alpha} \right) e^{-q^2} \quad (2.21)$$

と評価される. したがって, 条件 (2.20) のもとで  $\alpha$  を固定して  $q$  を大きくすれば,  $S_w^{(\infty)}$  の誤差は急激に小さくなることがわかる.

次に, 級数  $S_w^{(\infty)}$  を  $N$  項で打ち切った和  $S_w^{(N)}$  の誤差について考える.  $w(n; p, q)$  の振舞いは  $n$  の大きいところで  $w(n; p, q) \leq \frac{1}{2} \exp(-(n/p - q)^2)$  となるので, この打ち切り誤差を十分小さくするには, 打ち切る項数  $N$  は,

$$N = \lfloor 2pq + 1 \rfloor = \lfloor \frac{4}{\pi\alpha} q^2 \rfloor \quad (2.22)$$

とすればよい.

### 系 1 (連続な重みでの交代級数の加速の速さ)

(2.20) 式, (2.22) 式のもとの  $S_w^{(N)}$  の全誤差は,

$$\begin{aligned} |S^{(\infty)} - S_w^{(N)}| &\leq |S^{(\infty)} - S_w^{(\infty)}| + \sum_{n=N}^{\infty} |w(n; p, q)(-1)^n f(n)| \\ &\leq |S^{(\infty)} - S_w^{(\infty)}| + \frac{M}{2} \sum_{n=N}^{\infty} \exp(-(n/p - q)^2) \\ &= O(\alpha^{-2}(1-\alpha)^{-1/2} q e^{-q^2}) \\ &= O(\alpha^{-3/2}(1-\alpha)^{-1/2} \sqrt{N} e^{-\pi\alpha N/4}), \quad N \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (2.23)$$

となる.

要するに, もとの級数の収束がどんなに遅くても定理 1 の条件を満足すれば, 連続な重みの Euler 変換  $S_w^{(N)}$  は, 計算項数  $N$  の関数として指数関数的に極限值に収束させることができるのである.

次に, 交代級数の加速例として,

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \log 2 \quad (2.24)$$

を

#### 1. 通常の Euler 変換

$$S_{\text{Euler}}^{(N)} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \left(-\frac{1}{2}\Delta\right)^n a_n$$

#### 2. 連続な重みの Euler 変換

$$S_w^{(N)} = \sum_{n=0}^{N-1} w(n; p, q)(-1)^n a_n$$

によって計算した結果を表 2 に示す.

ここで  $p, q$  は, 定理 1 の誤差評価より  $N = 2pq$ ,  $q = \pi p/2$  となるように選んである. この計算例より, 連続な重みの Euler 変換は通常の Euler 変換に近い加速効果が得られることがわかる.

|    | 方法              | $N$ | 絶対誤差                 |
|----|-----------------|-----|----------------------|
|    | 直接の和            | 21  | $2.3 \times 10^{-2}$ |
| 1. | 通常の Euler 変換    | 21  | $2.1 \times 10^{-8}$ |
| 2. | 連続な重みの Euler 変換 | 21  | $1.6 \times 10^{-9}$ |

### 3 Fourier 積分に対する連続 Euler 変換

Fourier 積分

$$I = \int_0^{\infty} f(x)e^{i\omega x} dx \quad (3.1)$$

( $\omega > 0$  と仮定) に対する連続 Euler 変換を

$$I_w^{(L)} = \int_0^L w(x; p, q) f(x) e^{i\omega x} dx \quad (3.2)$$

で定義する. ただし, 重み関数  $w(x; p, q)$  は,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) dt = 1, \quad \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \phi(t) = 0 \quad (3.3)$$

を満たす関数  $\phi(t)$  により

$$w(x; p, q) = \int_{x/p-q}^{\infty} \phi(t) dt \quad (3.4)$$

と一般化し,  $p, q$  は積分を打ち切る区間  $L$  および  $\omega$  に依存する正の数とする.

次に, 被積分関数  $f(x)$  の減衰がきわめて遅くても, 連続 Euler 変換  $I_w^{(L)}$  は, 区間の長さ  $L$  に対して指数関数的に積分値  $I$  に収束させることができることを示す. ここでは簡単のため, 具体的な関数  $\phi(t)$  として, Euler 変換の連続化で得られる正規分布関数を用いたときの加速効果を調べる.

**定理 2**  $w(x; p, q) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(x/p - q)$  ( $p, q$  はある正の数) とし, 関数  $f(z)$ ,  $E(z; \omega)$  が領域  $0 \leq \arg(z - r) \leq \delta$  ( $r$  はある実数,  $\omega, \delta$  はある正の数で  $\delta < \pi/2$  と仮定する) で正則で, その領域で  $|f(z)| \leq M_1$ ,  $|E(z; \omega)| \leq M_2 |e^{i\omega z}|$  かつ

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \max_{0 \leq \theta \leq \delta} |f(R + r + iR \tan \theta)| = 0$$

を満たすならば, 任意の  $\alpha \leq \tan \delta$ ,  $0 < \alpha < 1$  に対して,

$$\begin{aligned} & \left| \int_r^{\infty} f(x) E(x; \omega) dx - \int_r^{\infty} w(x; p, q) f(x) E(x; \omega) dx \right| \\ & \leq M_1 M_2 \sqrt{1 + \alpha^2} \left( \frac{\sqrt{\pi} p}{2\sqrt{1 - \alpha^2}} e^{(q' - \omega \alpha p/2)^2 / (1 - \alpha^2)} + \frac{1}{\omega \alpha} e^{(q' - \omega \alpha p) q'} \right) e^{-q'^2} \end{aligned} \quad (3.5)$$

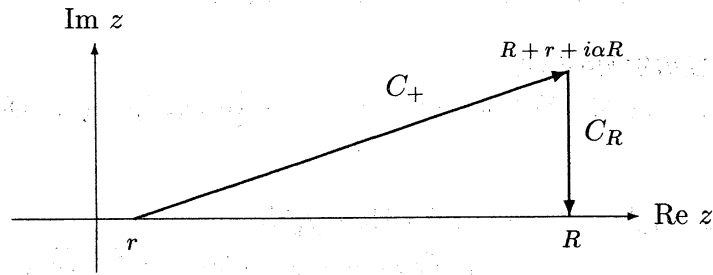
が成り立つ. ただし,  $q' = q - r/p$  である.

**証明**

積分

$$\begin{aligned} \Delta I_w^{(R)} &= \int_r^{r+R} f(x) E(x; \omega) dx - \int_r^{r+R} w(x; p, q) f(x) E(x; \omega) dx \\ &= \int_r^{r+R} (1 - w(x; p, q)) f(x) E(x; \omega) dx \end{aligned} \quad (3.6)$$

において, 積分路  $(r, r+R)$  を正則な領域の範囲で, 図 3 のような  $C_+$ ,  $C_R$  に変形する.

図 3: 積分路  $C_+ + C_R$ 

このとき,

$$\begin{aligned} |\Delta I_w^{(R)}| &= \left| \int_{C_+ + C_R} (1 - w(z; p, q)) f(z) E(z; \omega) dz \right| \\ &\leq \int_{C_+ + C_R} |1 - w(z; p, q)| \cdot |f(z)| \cdot |E(z; \omega)| \cdot |dz| \end{aligned} \quad (3.7)$$

が成り立ち, 定理 1 と全く同じ考え方でこの積分を評価することにより, 求める結果が得られる. [証明終り]

この定理で  $r = 0$ ,  $E(z; \omega) = \exp(i\omega z)$  とおけば, Fourier 積分 (3.1) に対して  $w(x; p, q)$  を乗じた積分

$$I_w = \int_0^\infty w(x; p, q) f(x) e^{i\omega x} dx \quad (3.8)$$

の誤差が得られる. とくに,  $p, q$  および  $\alpha$  を

$$q = \frac{\omega \alpha}{2} p \quad (3.9)$$

となるように選べば,

$$|I - I_w| < M_1 \sqrt{1 + \alpha^2} \left( \frac{\sqrt{\pi} p}{2\sqrt{1 - \alpha^2}} + \frac{1}{\omega \alpha} \right) e^{-q^2} \quad (3.10)$$

のように評価される. 要するにこれは, 被積分関数に単に  $w(x; p, q)$  を乗ずるだけの操作で, 積分値を近似的に保ったままで, 収束のきわめて遅い積分  $I$  から収束のきわめて速い積分  $I_w$  に変換できることを意味する.

次に, 連続 Euler 変換 (3.2) の誤差を調べる. そのためには, 積分 (3.8) を  $L$  で打ち切った誤差を調べなければならない. 積分の打ち切りを

$$L = 2pq = \frac{4}{\omega \alpha} q^2 \quad (3.11)$$

と選べば, この打ち切りの誤差は,

$$\begin{aligned} |I_w - I_w^{(L)}| &\leq \int_L^\infty |w(x; p, q) f(x) e^{i\omega x}| dx \\ &\leq \frac{M_1}{2} \int_{2pq}^\infty \exp(-(x/p - q)^2) dx \\ &\leq \frac{\sqrt{\pi} M_1 p}{4} e^{-q^2} \end{aligned} \quad (3.12)$$

となり, (3.10) 式の右辺と同じオーダーにすることができる.

## 系 2 (連続 Euler 変換の加速の速さ)

(3.9) 式, (3.11) 式のもとで, 重み関数を  $w(x; p, q) = \frac{1}{2}\text{erfc}(x/p - q)$  と選んだ連続 Euler 変換の全誤差は,

$$\begin{aligned} |I - I_w^{(L)}| &\leq |I - I_w| + |I_w - I_w^{(L)}| \\ &< M_1 \left( \frac{\sqrt{\pi}\sqrt{1+\alpha^2}p}{2\sqrt{1-\alpha^2}} + \frac{\sqrt{\pi}p}{4} + \frac{\sqrt{1+\alpha^2}}{\omega\alpha} \right) e^{-q^2} \\ &= O((\omega\alpha)^{-1/2}(1-\alpha)^{-1/2}\sqrt{L}e^{-\omega\alpha L/4}), \quad L \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (3.13)$$

となる.

$p, q$  の具体的な定め方は, まず  $e^{-q^2}$  が許容誤差より十分小さくなるように  $q$  を定め, 次に  $p$  を適当に定める. このとき,  $p$  を  $\alpha$  の範囲と  $\omega$  に依存するように定めると, 計算する積分区間  $L$  は小さくできる.

また, 定理 2 の  $E(z; \omega)$  を Hankel 関数などに選ぶことで, この方法は Fourier 変換だけでなく, Bessel 関数のように漸近的に  $e^{i\omega z}$  のように振舞う振動項を持つ関数の積分に対しても有効であることがわかる.

## 4 連続 Euler 変換の重みの拡張

連続 Euler 変換の誤差を小さくするためには, その重み関数は任意には選べず, さらにある条件が必要になる. ここでは, Fourier 変換に対する一般の重み関数による連続 Euler 変換の誤差を考える. まず,  $f(x)$  の Fourier 変換

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \quad (4.1)$$

を, 重み関数

$$\hat{w}(x; p, q) = \int_{x/p-q}^{x/p+q} \phi(t) dt \quad (4.2)$$

を用いて

$$F_{\hat{w}}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{w}(x; p, q) f(x) e^{-i\omega x} dx \quad (4.3)$$

で近似したときの誤差を考える. ただし,  $\phi(t)$  は, (3.3) 式を満たす関数である.

ここで, (4.3) 式は畳み込み

$$F_{\hat{w}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{W}(\omega - \omega') F(\omega') d\omega' \quad (4.4)$$

と等価であることに注意する. ただし,  $\hat{W}(\omega)$  は  $\hat{w}(x; p, q)$  の Fourier 変換で,

$$\begin{aligned} \hat{W}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{w}(x; p, q) e^{-i\omega x} dx \\ &= \frac{\sin(pq\omega)}{\pi\omega} 2\pi\Phi(p\omega) \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\Phi(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) e^{-i\omega x} dx \quad (4.6)$$



である。この結果を畳み込みの式 (4.4) に代入して

$$F_{\hat{w}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega') \frac{\sin(pq(\omega - \omega'))}{\pi(\omega - \omega')} 2\pi\Phi(p(\omega - \omega')) d\omega' \quad (4.7)$$

を得る。これは sinc 近似の連続版である。もし、 $F(\omega)$ 、 $\Phi(\omega)$  が解析的で滑らかな関数ならば、sinc 近似の典型的な誤差の振舞いは  $q$  に対して  $O(\exp(-Cq))$  と指数関数で減少することがわかっている。

しかし、一般に  $O(|x|^{-m})$  の減衰をする関数の Fourier 変換は、 $\omega$  に関する  $m-1$  階微分が不連続になり、とくに  $f(z)$ 、 $f(-z)$  の  $z$  平面上での振舞いが定理 2 の条件を満たすとき、 $F(\omega)$  は  $\text{Re } \omega = \pm 0$  の境界で解析的ではなくなり、通常の sinc 近似の誤差評価は利用できない。具体的な (4.7) 式の誤差評価は次の定理を用いて  $F(\omega)$  および  $\Phi(\omega)$  の性質に応じて個別に行わなければならない。

**定理 3** 関数  $F(\zeta)$ 、 $F(-\zeta)$ 、 $\Phi(p(\omega - \zeta))$ 、 $\Phi(p(\omega + \zeta))$  が領域  $|\arg(\zeta)| < \gamma$ 、 $(\gamma > 0, \omega \neq 0$  で実数) で正則で

$$\lim_{R \rightarrow \pm\infty} \int_{-\gamma}^{\gamma} |F(Re^{i\theta})\Phi(p(\omega - Re^{i\theta}))| \exp(-pq|\text{Im } Re^{i\theta}|) d\theta = 0$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \pm 0} \int_{-\gamma}^{\gamma} |F(\varepsilon e^{i\theta})\Phi(p(\omega - \varepsilon e^{i\theta}))| \varepsilon d\theta = 0$$

を満たすならば、任意の  $0 < \theta < \gamma$  に対して、

$$|F(\omega) - F_{\hat{w}}(\omega)| \leq \int_{C_{\theta+} + C_{\theta-}} |F(\zeta)| \frac{\exp(-pq|\text{Im } \zeta|)}{|\omega - \zeta|} |\Phi(p(\omega - \zeta))| \cdot |d\zeta| \quad (4.8)$$

を満たす。ただし、積分路  $C_{\theta+}$ 、 $C_{\theta-}$  は図 4 に示すものである。

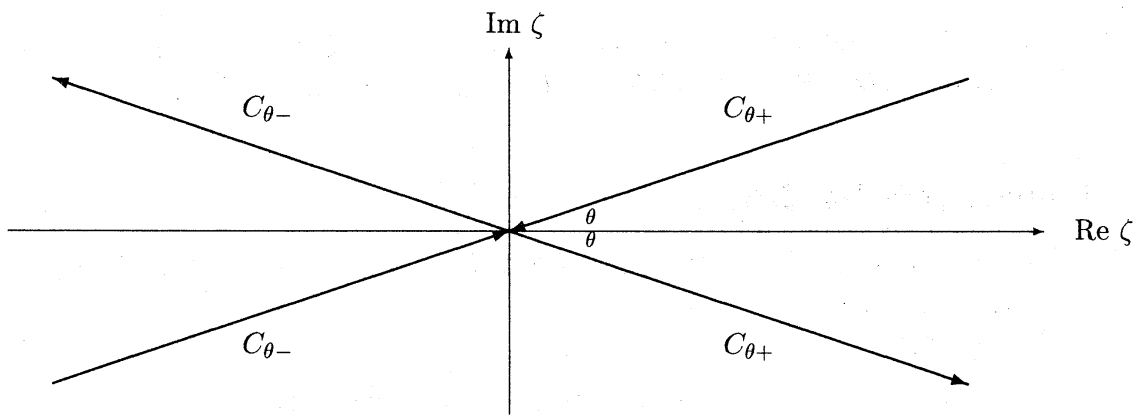


図 4: 積分路  $C_{\theta+}$ 、 $C_{\theta-}$

**証明**

まず、

$$\begin{aligned} \frac{\sin(pq\omega)}{\pi\omega} &= \frac{\exp(+ipq\omega) - 1}{2\pi i\omega} - \frac{\exp(-ipq\omega) - 1}{2\pi i\omega} \\ &= \frac{\exp(+ipq(\omega + i0)) - 1}{2\pi i(\omega + i0)} - \frac{\exp(-ipq(\omega - i0)) - 1}{2\pi i(\omega - i0)} \\ &= \frac{\exp(+ipq(\omega + i0))}{2\pi i(\omega + i0)} - \frac{\exp(-ipq(\omega - i0))}{2\pi i(\omega - i0)} + \delta(\omega) \end{aligned} \quad (4.9)$$

を(4.7)式に代入し、次に積分路を実軸から  $C_{\theta+}$ ,  $C_{\theta-}$  に変形することで結果が得られる。[証明終り]

定理3の評価から、もし  $|\omega'|$  が大きいところで  $|\Phi(\omega')|$  がゼロまたは非常に小さくなるという条件があれば、 $p \rightarrow \infty$  で  $|\Phi(p(\omega - \zeta))|$  からの実軸近傍の誤差の寄与は小さくできることがわかる。したがって、 $\phi(t)$  はこの条件を満たすように決めるべきである。一方、 $\exp(-pq|\operatorname{Im} \zeta|)$  は通常の sinc 近似による誤差の項であり、 $p, q$  はこの二つの誤差がうまくつりあうように決めるべきである。

さらに連続 Euler 変換は、積分  $F_{\hat{w}}(\omega)$  を区間  $L_{\pm}$  で打ち切ったものであり、その打ち切り誤差も同時に小さくしなければならない。もし、 $f(\pm z)$ ,  $\hat{w}(\pm z; p, q)$  に定理2の仮定の解析性があり、 $\phi(t)$  に  $t'$  が大きいところで  $\int_{t'}^{\infty} \phi(\pm t) dt$  が非常に小さいという条件があればこの誤差は小さくすることが示せる。

したがって、条件

1.  $|\omega'|$  が大きいところで  $|\Phi(\omega')|$  がゼロまたは非常に小さい。
2.  $t'$  が大きいところで  $\int_{t'}^{\infty} \phi(\pm t) dt$  が非常に小さい。

が同時に成り立てば、連続 Euler 変換の全誤差は小さくすると期待できる。

このような条件を満たす重み関数の一例として、 $I_0$ -sinh 窓

$$\Phi(\omega) = \frac{I_0(\beta\sqrt{1-\omega^2})}{2\pi I_0(\beta)}, \quad |\omega| \leq 1 \quad (4.10)$$

$$\Phi(\omega) = 0, \quad |\omega| > 1 \quad (4.11)$$

が知られている [2]。これは、あるノルムで上の条件を最適化する関数である。このとき

$$w(x; p, q) = \frac{1}{\pi I_0(\beta)} \int_{x/p-q}^{\infty} \frac{\sinh \sqrt{\beta^2 - t^2}}{\sqrt{\beta^2 - t^2}} dt \quad (4.12)$$

となる。これ以外にも同様な性質の重み関数はいくつか挙げることができる。また、これらの重み関数による連続 Euler 変換の詳しい誤差解析は、具体的な関数  $f(x)$  が定まれば容易に行える。

## 5 Fourier 積分の計算例

収束の遅い Fourier 積分に対して連続 Euler 変換を適用した後に、既存の有限区間の積分公式で計算した具体例をいくつか示す。

まず、Fourier 積分

$$I_1 = \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{1+x^2}} dx = K_0(1) \quad (5.1)$$

に対して連続 Euler 変換を適用して有限区間の積分に変換した後、Legendre-Gauss 則を用いて計算した結果を表1に示す。参考のため、従来から用いられている古典的な計算方法による結果も示す。この従来からの計算方法は、(5.1)式を、

$$I_1 = \sum_{j=0}^{\infty} I_1(j), \quad I_1(j) = \int_{\pi_j}^{\pi(j+1)} \frac{\cos x}{\sqrt{1+x^2}} dx \quad (5.2)$$

と考え、いくつかの  $I_1(j)$  の値を既存の積分公式で計算しておき、それをもとにして交代級数の加速を行い  $I_1$  を求める方法である [5]。

計算に用いたパラメータは、

1. 連続 Euler 変換：連続 Euler 変換 ( $\phi(t) = \pi^{-1/2} e^{-t^2}$ ,  $q = p/2 = 4$ ,  $L = 2pq$ ) + 60 点 Gauss 則

## 2. 従来の方法：通常の Euler 変換 (24 点) + 12 点 Gauss 則

であり、理論的誤差が  $10^{-7}$  程度になるように選んである。

表 1: 積分  $I_1$  に対する計算例

| 方法          | 関数評価回数 | 絶対誤差                 |
|-------------|--------|----------------------|
| 連続 Euler 変換 | 60     | $2.1 \times 10^{-9}$ |
| 従来の方法       | 288    | $4.1 \times 10^{-9}$ |

この結果より、連続 Euler 変換による方法は従来の方法に対して 1/5 程度の計算量で済むことがわかる。

次に、さまざまな積分公式との比較例として、 $I_1$  と

$$I_2 = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{1+x^2} dx = 0.646761122779 \dots \quad (5.3)$$

に対して、いくつかの積分公式を用いて計算したときの結果を表 2 に示す。連続 Euler 変換は  $\phi(t) = \pi^{-1/2}e^{-t^2}$ ,  $q = p/2 = 4$ ,  $L = 2pq$  とし、用いた積分公式は

1. 台形則
2. Legendre-Gauss 則
3. Clenshaw-Curtis 則 (Chebyshev 級数展開による積分公式)

である。

表 2: 積分  $I_1, I_2$  に対する連続 Euler 変換による計算例

| 積分則               | $I_1$ |                      | $I_2$ |                      |
|-------------------|-------|----------------------|-------|----------------------|
|                   | 標本数   | 誤差                   | 標本数   | 誤差                   |
| 台形則               | 201   | $5.0 \times 10^{-9}$ | -     | -                    |
| Legendre-Gauss 則  | 60    | $2.1 \times 10^{-9}$ | 60    | $7.0 \times 10^{-9}$ |
| Clenshaw-Curtis 則 | 65    | $7.6 \times 10^{-9}$ | 65    | $2.0 \times 10^{-8}$ |

この結果より、Clenshaw-Curtis 則は Legendre-Gauss 則とほぼ同程度の計算効率になることがわかる。一方、台形則の計算効率は他の 2 つよりも悪くなる。これは、台形則が他の 2 つの公式と比較して、被積分関数の複素平面上での特異点  $x = \pm i$  からの影響を受けやすいためだと考えられる。また、台形則が高精度となる場合は、解析関数の全無限区間あるいは偶関数の半無限区間の積分であり、この場合  $I_1$  に対してのみ有効である [1], [4].

次に、等間隔でない振動積分の計算例として、Bessel 関数を含む積分

$$I_3 = \int_0^{\infty} \frac{x J_0(x)}{1+x^2} dx = K_0(1) \quad (5.4)$$

$$I_4 = \int_0^{\infty} \frac{J_0(x)}{\sqrt{1+x^2}} dx = I_0(1/2)K_0(1/2) \quad (5.5)$$

に対して、Fourier 積分の場合と同様に連続 Euler 変換 ( $\phi(t) = \pi^{-1/2}e^{-t^2}$ ,  $q = p/2 = 4$ ,  $L = 2pq$ ) を行った後に、

1. Legendre-Gauss 則
2. Clenshaw-Curtis 則

表 3: Bessel 関数を含む振動積分  $I_3, I_4$  に対する計算例

| 積分則               | $I_3$ |                      | $I_4$ |                      |
|-------------------|-------|----------------------|-------|----------------------|
|                   | 標本数   | 誤差                   | 標本数   | 誤差                   |
| Legendre-Gauss 則  | 60    | $1.1 \times 10^{-9}$ | 60    | $8.9 \times 10^{-9}$ |
| Clenshaw-Curtis 則 | 65    | $1.3 \times 10^{-8}$ | 65    | $1.7 \times 10^{-8}$ |

で計算した結果を表 3 に示す。

この結果より, Bessel 関数を含む無限区間積分に対しても, 連続 Euler 変換は有効であることがわかる。

最後に, 連続 Euler 変換の重み関数に対する比較例を示す。積分  $I_1, I_2$  に対して,

### 1. 連続 Euler 変換 1 (正規分布窓)

$$w(x; p, q) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(x/p - q) \quad (5.6)$$

$$q = p/2 = 4$$

### 2. 連続 Euler 変換 2 ( $I_0$ -sinh 窓)

$$w(x; p, q) = \frac{1}{\pi I_0(\beta)} \int_{x/p-q}^{\infty} \frac{\sinh \sqrt{\beta^2 - t^2}}{\sqrt{\beta^2 - t^2}} dt \quad (5.7)$$

$$p = 1/\omega = 1, \quad \beta = q = 20$$

を行った後に, Legendre-Gauss 則で計算した結果を表 4 に示す。

表 4: いろいろな重み関数に対する計算結果

| 重み関数           | $I_1$ |                      | $I_2$ |                      |
|----------------|-------|----------------------|-------|----------------------|
|                | 標本数   | 誤差                   | 標本数   | 誤差                   |
| 1. 正規分布        | 60    | $2.1 \times 10^{-9}$ | 60    | $7.0 \times 10^{-9}$ |
| 2. $I_0$ -sinh | 40    | $3.8 \times 10^{-9}$ | 40    | $4.4 \times 10^{-8}$ |

この結果より,  $I_0$ -sinh 窓による重み関数の連続 Euler 変換は, 正規分布窓のに対して, 計算する積分区間が短くなり計算量は 2/3 程度で済むことがわかる。

## 6 減衰の遅い関数の Fourier 変換の計算例

$f(x)$  の Fourier 変換 (すなわちいろいろな  $\omega$  に対する積分)

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \quad (6.1)$$

を高速に計算することを考える。ただし,  $f(x)$  は  $|x| \rightarrow \infty$  で非常に減衰の遅い関数である。まず, この積分に対して, 連続 Euler 変換を適用して,

$$F_w^{(L)}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-L_-}^{L_+} w(|x|; p, q) f(x) e^{-i\omega x} dx \quad (6.2)$$

とする. 次に,  $F_w^{(L)}(\omega)$  の積分を単純に等間隔  $h$  で離散化し,

$$F_w^{(N,h)}(\omega) = \frac{h}{2\pi} \sum_{n=-N_-}^{N_+} w(|nh|; p, q) f(nh) e^{-i\omega nh} \quad (6.3)$$

( $N_{\pm} = \lfloor L_{\pm}/h \rfloor$ ) として計算することを考える. 連続 Euler 変換の誤差を小さくするためには  $p, q$  を  $L_{\pm}$  と  $\omega$  に対応して決めなければならない. しかしここでは, 多少の誤差は犠牲にして  $p, q$  を固定して  $L_+ = N/2 - 1$ ,  $L_- = N/2$  と定め,  $\omega = 2\pi k/(Nh)$  と離散化して計算することにする.

$$F_w^{(N,h)}\left(\frac{2\pi}{Nh}k\right) = \frac{h}{2\pi} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} w(|nh|; p, q) f(nh) e^{-2\pi ink/N} \quad (6.4)$$

このように離散化することで FFT を用いて高速に計算できるようになる.

まず, 正規分布窓による重み関数  $w(x; p, q) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(x/p - q)$  を用いたときの (6.4) 式での計算例を図 5, 図 6 に示す. Fourier 変換する関数は,

$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad (F_1(\omega) = \frac{1}{\pi} K_0(|\omega|))$$

$$f_2(x) = \frac{x^3}{4+x^4}, \quad (F_2(\omega) = i \frac{\operatorname{sgn} \omega}{2} e^{-|\omega|} \cos \omega)$$

である.

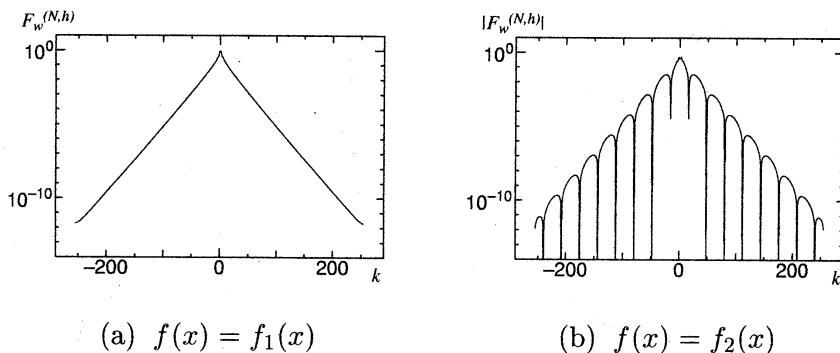


図 5: Fourier 変換の近似結果:  $F_w^{(N,h)}\left(\frac{2\pi}{Nh}k\right)$ ,  $N = 512$ ,  $h = 0.125$

標本数, 刻み幅は  $N = 512$ ,  $h = 0.125$  と選び, 仮数部が 53 ビットの倍精度 (有効桁数は約 16 桁) で計算を行った. 連続 Euler 変換の打ち切り誤差は  $10^{-12}$  程度に設定し,  $p, q$  を  $\exp(-q^2) = 10^{-12}$ ,  $L = Nh/2 = 2pq$  となるように選んである. 比較のために,  $w(x; p, q)$  を用いずに直接計算を行ったときの誤差も図 6 に示してある.

図の横軸  $k$  は,  $\omega = \frac{2\pi}{Nh}k$  という関係で結ばれている. したがって, 計算した最大の  $|\omega|$  は  $\omega_{\max} = \frac{2\pi}{Nh} \frac{N}{2} = 8\pi$  である. 結果の図より, 誤差の振舞いは  $|\omega|$  が小さいところで精度が悪くなり, 一方,  $|\omega|$  が大きいところで誤差が大きくなり,  $|\omega| = 8\pi$  で相対精度として意味を持たなくなる.

理論的な誤差の評価は, 定理 2 の連続 Euler 変換の誤差の評価式に関しては  $|\omega|$  が  $\omega = 2q/p = 3.45$  ( $k = 35.1$ ) 以下で評価が急激に大きくなる. また, 等間隔  $h$  での離散化に関しては, 標本化定理より  $|\omega| < \pi/h = 8\pi$  の範囲で離散化が有効となることがわかる. したがって, 計算結果は理論的な誤差評価とほぼ一致することがわかる.

次に,  $I_0$ -sinh 窓による重み関数

$$w(x; p, q) = \frac{1}{\pi I_0(\beta)} \int_{x/p-q}^{\infty} \frac{\sinh \sqrt{\beta^2 - t^2}}{\sqrt{\beta^2 - t^2}} dt \quad (6.5)$$

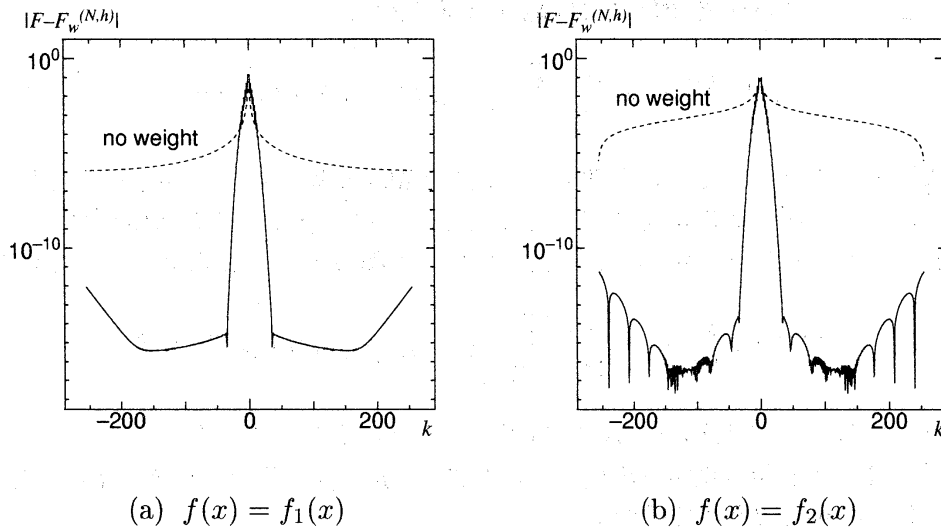


図 6: Fourier 変換の近似誤差 :  $F_w^{(N,h)}(\frac{2\pi}{Nh}k)$ ,  $N = 512$ ,  $h = 0.125$

を用いたときの (6.4) 式での計算誤差を図 7 に示す.

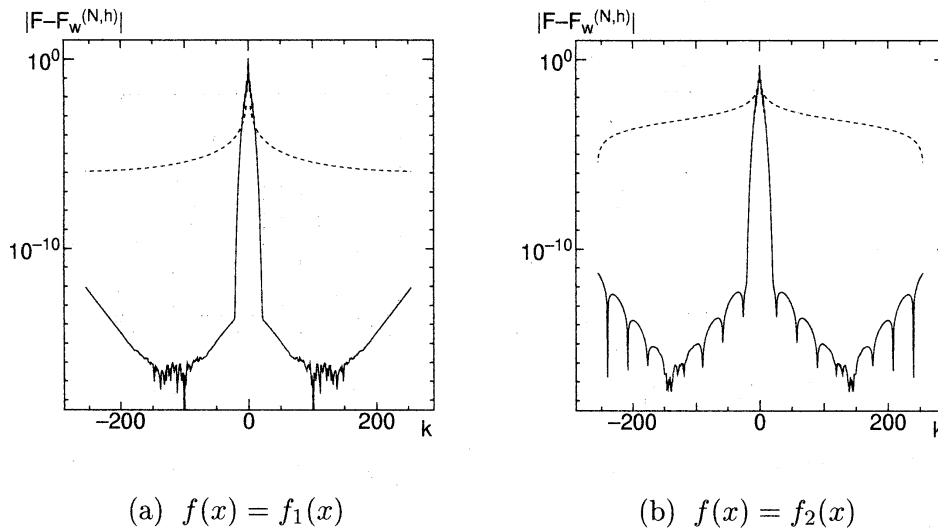


図 7: Fourier 変換の近似誤差 -  $I_0$ -sinh 窓 :  $F_w^{(N,h)}(\frac{2\pi}{Nh}k)$ ,  $N = 512$ ,  $h = 0.125$

標本数, 刻み幅は  $N = 512$ ,  $h = 0.125$  と選び, 連続 Euler 変換の打ち切り誤差は  $10^{-15}$  程度に設定し,  $p, q, \beta$  を  $\beta = q = -\log(10^{-15})$ ,  $L = Nh/2 = 2pq$  となるように選んである. 比較のために,  $w(x; p, q)$  を用いずに直接計算を行ったときの誤差も図 7 に示してある.

結果の図より, 誤差の振舞いは  $|k| < 21$  のところで精度が悪くなっている. 理論的には  $\omega = 1/p = 2.16$  ( $k = 22.0$ ) 以下で評価が急激に大きくなるのがわかっている, 実際の結果はこれとほぼ一致する. また, 正規分布窓による連続 Euler 変換と比較すると, 精度の悪くなる  $|\omega|$  の範囲は  $2/3$  以下に減少し, 計算できる  $\omega$  の範囲が広がっていることがわかる.

## 7 まとめ

本稿では, Fourier 積分の収束を加速する方法の一つとして連続 Euler 変換を導き, 近似的に積分値を保ったまま積分の収束を速くすることができることを示した. この連続 Euler 変換により, 広く用いられている有限区間の積分公式で収束の遅い Fourier 積分の計算が可能になり, 従来の方法よりも効率よく計算できるようになる. さらに, 減衰の遅い関数の Fourier 変換に対して, FFT を用いて効率よく計算できることを具体的に示した. また, 連続 Euler 変換は, Bessel 関数を含むような振動積分に対しても直接適用できるという利点がある.

## 参考文献

- [1] H. Takahasi and M. Mori, Error Estimation in the Numerical Integration of Analytic Functions, Rep. Comput. Centre Univ. Kyoto 3, 1970, 41-108.
- [2] J.F.Kaiser, Nonrecursive digital filter design using the  $I_0 - \sinh$  window function, Proc. IEEE International Symposium on Circuits and Systems, 1974.
- [3] Jet Wimp, Sequence Transformations and their Applications, Academic Press, 1981.
- [4] 森正武, 数値解析と複素関数論, 筑摩書房, 1975.
- [5] Philip J. Davis and Philip Rabinowitz, Methods of Numerical Integration (Second Edition), Academic Press, 1984.
- [6] T. Ooura and M. Mori, The Double Exponential Formula for Oscillatory Functions Over the Half Infinite Interval, Journal of Computational and Applied Mathematics 38, 1991, 353-360.
- [7] 大浦拓哉, フーリエ型積分に対する数値積分法の研究, 東京大学工学系研究科博士論文, 1997.