数理解析研究所講究録
1086巻 1999年 26-36

Threefold and Higgs Transitions in Calabi-Yau models

富山大・理　細野　忍 (Shinobu Hosono)

1. Mを3次元 Calabi-Yau 多様体とし、Wをそれのミラー多様体とする。ミラー対称性によると、Mの Kähler 構造変形のモジュライ空間 $\mathcal{K}(M)$ と Wの複素構造変形のモジュライ空間 $\mathcal{M}(W)$ が同一であることが予言される。正確に述べると、前者の複素化 $\overline{\mathcal{K}}(M)\otimes\mathbf{C}$ に対し、$\mathcal{M}(W)$ のコンパクト化 $\overline{\mathcal{M}}(W)$ が存在し、前者を Aut(M) の作用で割るとき2つが同一になるという予言である [GY]。ここで、$\mathcal{K}(M)$ は M の Kähler cone で、Aut(M) は Mの複素構造を不変にする自己同型である。

$\overline{\mathcal{K}}(M)$ について、これが cubic cone $\{D\in H^2(M,\mathbf{R})\mid D^3=0\}$ の内部 $(D^3\geq 0)$ にあり、cubic cone から離れた所では局所的に有理多面体的であることが知られている。$\overline{\mathcal{K}}(M)$ の余次元1の面の上では、contraction $\phi: M\to M'$ が起こる。特に、この場合 Picard 数について $\rho(M')=\rho(M)-1$ の関係が成り立つので、primitive contraction と呼ばれている。primitive contraction について、次の様な分類がなされている [Wil] ;

I. 有限個の有理曲線 $(\cong \mathbf{P}^1)$ がそれぞれ点につぶれる.

II. 既約な曲面が点につぶれる.

III. 既約な曲面が曲線につぶれる.

さて、これらの$\overline{\mathcal{K}}(M)$ の境界は、ミラー対称性によって$\overline{\mathcal{M}}(W)$ の境界に対応すると期待されるが、$\mathcal{M}(W)$ のコンパクト化に於てその境界はどの様に現われるだろうか?ここでは、Kähler cone $\mathcal{K}(M)$ 及び $\mathcal{M}(W)$ のコンパクト化が容易に解析できるトーリック多様体を ambient 空間とする Calabi-Yau 超曲面について、そのモジュライ空間の様子を調べる。

上述の contraction には、次のような物理的描像が描かれている。3次元 Calabi-Yau 多様体は、超弦理論のコンパクト化に用いられるが、多様体の Kähler モジュライと複素構造変形のモジュライは、それぞれ II_A, II_B 型のモジュライと呼ばれ、超弦理論の (marginal)

変形を実現する。超弦理論の変形は零質量粒子によって引き起こされ、II_A, II_Bそれぞれに応じて、零質量粒子（超対称多重項）は、vectormultiplet, hypermultiplet と呼ばれている。ここで、vectormultiplet はゲージ場、hypermultiplet は物質場を表し、その役割が異なるばかりでなく量子的な（輻射補正に関する）性質も大きく異なる。零質量粒子の個数と多様体のホッジ数は次の関係にあることが知られている、

$$\begin{aligned} h^{1,1}(M) &= (\#\text{vectormultiplet}) + 1 \ , \\ h^{2,1}(M) &= (\#\text{hypermultiplet}) \ . \end{aligned} \tag{1}$$

ゲージ理論では、一般にポテンシャル関数の様子によって基底状態の転移が起こり、その転移機構はHiggs 機構と呼ばれている。この機構によって、ゲージ対称性（ゲージ群）はそれの部分群に縮小するが、(1) 式の対応とあわせて見ると、Higgs 機構は幾何学的にはcontraction $M \to M'$ と見える。実は、hypermultiplet の数も Higgs 機構のもとで変化（増大）することが分かり、これは、contraction $M \to M'$ に引き続く smoothing $M' \to M''$ と理解されている。最近このような、Higgs 機構と smoothing が可能なcontraction との間の対応が明らかにされつつある [BIKMSV]。

以上の様な、背景から smoothing が存在する contraction で、I, II, III のタイプの典型的なトーリックモデルを順に調べることにする。

2. 記号を整理するためにBatyrev によるミラー対称性とトーリック幾何学におけるいくつかの結果を簡単にまとめる。Δを原点を内点に含む$\mathbf{R}^4$の多面体とし、Δ^*をそれの双対とする。このとき、Δ, Δ^*ともにその頂点が全て整数点からなる場合、これらはreflexive であると言われる。reflexive な多面体Δ, Δ^* について、それぞれ原点から各々の面に向かって錐を考え、所謂完備扇$\Sigma(\Delta), \Sigma(\Delta^*)$ を作る。そこで、格子 $\mathbf{Z}^4 \subset \mathbf{R}^4$に基づいてトーリック多様体 $\mathbf{P}_{\Sigma(\Delta^*)}$を構成する。トーラスの座標を $X_1, \cdots, X_4$と書くとき、定義式

$$f(a) = \sum_{\nu \in \Delta \cap \mathbf{Z}^4} a_\nu X^\nu \ , \tag{2}$$

の零点集合（の閉包）を考える。一般の a_νの値に対して、この超平面は非退化であり、トーリック多様体 $\mathbf{P}_{\Sigma(\Delta^*)}$の特異点の解消を通して超平面の (crepant な) 特異点解消が存在する

ことが示される。こうして得られる超曲面は Calabi-Yau 多様体であることが分かり、これを $X_\Delta \subset \mathbf{P}_{\Sigma(\Delta^*)}$ と書く。全く同様にして、Calabi-Yau 多様体 $X_{\Delta^*} \subset \mathbf{P}_{\Sigma(\Delta)}$ を得る。こうして構成する、X_Δ, X_{Δ^*} は互いにミラー対称であることが示される [Bat]。以下では、X_Δ について II_Aモジュライ (Kähler モジュライ) を考え、X_{Δ^*}については II_Bモジュライ (複素構造変形モジュライ) を考える。これらは、前述の意味でミラー対称のもとで同一である。このことは、X_Δの Kähker cone が多面体Δ^*から作る二次扇 $S\Sigma(\Delta^*)$ に含まれる一部の錐で決まり、同時に二次扇 $S\Sigma(\Delta^*)$ に基づいて X_{Δ^*} の II_Bモジュライ空間のコンパクト化が定義されることからも自然である。

そこで、詳しい記述は文献を挙げるに止めて、X_Δの Kähker cone の構成についてその概略を整理する。それにあたって、簡単のため次の性質を仮定する:

1) 完備扇$\Sigma(\Delta^*)$ の最大次元の錐はすべて regular である。すなわち、単体的であって、境界に位置する 1 次元錐の (integral な) 生成元は一次独立で格子 $\mathbf{Z}^4$を生成する。
2) 超曲面の Picard 群は ambient 空間 $\mathbf{P}_{\Sigma(\Delta^*)}$のそれに一致する。

1) の性質は $\mathbf{P}_{\Sigma(\Delta^*)}$が非特異であることに同値である。2) は twisted sector と物理で呼ばれるものが存在しないことを言う。以下に考えるモデルは全てこの二つの性質を満たしている。さて、これらの仮定のもとで、超曲面 X_Δの Picard 群は

$$\mathrm{Pic}(X_\Delta) = \oplus_{i=1}^{p} \mathbf{Z} \cdot D_i / R \tag{3}$$

と書かれる [Ful][Oda]。ここで、Δ^*に含まれる原点以外の整数点を$\nu_1^*, \cdots, \nu_p^*$とし、これらの点を通る 1 次元錐が定義するトーリック因子を $D_1, \cdots, D_p$と表した。また、Rは因子の有理関係を表す一次関係式で、$\sum_i \langle u, \nu_i^* \rangle D_i$ $(u \in \mathbf{Z}^4)$ によって $\mathbf{Z}$ 上生成される。1) の仮定のもとで商は torsion を持たないことが示される。なお、$\mathrm{rk}(\mathrm{Pic}(X_\Delta)) = p - 4$ である。二次扇はΔ^*の単体分割 Tを全て考えることによって作られる扇で

$$S\Sigma(\Delta^*) = \{\sigma_T \mid T : \text{regular triangulation}\} \tag{4}$$

のような最高次元の錐σ_T(とそれの面) の集まりで、$\mathrm{Pic}(X_\Delta) \otimes \mathbf{R}$ の完備扇である。特に、完備扇$\Sigma(\Delta^*)$ に対して単体分割 T_0が一つ定まるが、これに対する錐σ_{T_0}が Kähler cone である。

Z 加群

$$L = \{(l_1, \cdots, l_p) \in \mathbf{Z}^p \mid \sum_{i=1}^{p} l_i \nu_i^* = 0\} \tag{5}$$

を考えるとこれが、$\mathrm{Pic}(X_\Delta)$ の双対を与えることが分かる。加群 L は、ミラー多様体 X_{Δ^*} の周期の満たす微分方程式 (GKZ 方程式系 [GKZ]) を決める。二次扇はこの微分方程式系の変数空間の自然なコンパクト化を定義するので、これをもって X_{Δ^*} の II_B モジュライ空間のコンパクト化とすることができる [HLY]。

ここで明らかなように、単体分割 T_0 に対する錐 σ_{T_0} が二つの役割を果たすことになる。一つは、II_A モジュライ空間の Kähler cone を決めるもので、もう一つは、II_B モジュライ空間の一つのアフィン座標を決めるものである。実はこの対応によって、II_A モジュライ空間の large volume limit と呼ばれる Kähler cone の"深い"位置に向かう極限と、II_B モジュライ空間の一つのアフィン座標の原点, large complex structure limit, とが自然に対応する。これらの極限は、量子コホモロジー環を決めるときに重要な役割を果たすもので詳しく調べられている [HKTY][HLY]。

3. 以上の準備のもとで、I,II,III のタイプの primitive contraction を示す 3 つの具体的なモデルを順に挙げる。これらは、どれも contraction の後 smoothing によって (5 次式)$\subset \mathbf{P}^4$ に結びつくモデルである。

<u>example 0</u>(quintic): $\mathbf{P}^4$ の一般 5 次超曲面は Calabi-Yau 多様体である。これに対する、reflexive 多面体は

$$\Delta_0^* = \mathrm{Conv.}(\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1),(-1,-1,-1,-1)\}) \tag{6}$$

で与えられる。$\mathbf{P}_{\Sigma(\Delta_0^*)} = \mathbf{P}^4$ であることは容易に分かる。また、$\mathrm{rk}(\mathrm{Pic}(X_{\Delta_0})) = 1$ で、その双対は $L = \mathbf{Z}(1,1,1,1,1)$ と表される。Δ_0^* の単体分割は 2 つ存在し従って二次扇は $S\Sigma(\Delta_0^*) = \mathbf{R}_{\geq 0} \cdot 1 \cup \mathbf{R}_{\geq 0} \cdot (-1)$ となり、II_B モジュライ空間のコンパクト化は $\mathbf{P}_{S\Sigma(\Delta_0^*)} = \mathbf{P}^1$ で与えられる。ここで錐 $\mathbf{R}_{\geq 0} \cdot 1$ は X_{Δ_0} の Kähler cone を決めると同時に、larege complex structure limit を決める。この錐が決めるアフィン座標を x とすると、$X_{\Delta_0^*}$の一つの周期は

$$w_0(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(5n)!}{(n!)^5} x^n \tag{7}$$

で与えられる。この周期は、量子コホモロジー環を記述する際に基本的な役割を果たすもので、primitive form の理論でも同様に基本的な役割をする [Saito]。

<u>example 1</u>: quintic の多面体Δ_0^*を少し修正し

$$\Delta_1^* = \mathrm{Conv.}\left(\Delta_0^* \cup \{(-1,-1,-1,0)\}\right) \tag{8}$$

を考える。定義から、Δ_1^*はΔ_0^*に比べ少し大きくなっているが、双対Δ_1は小さくなっている。このことは、一般 5 次式に制限を加えたことなっており、超曲面は$\mathbf{P}^4$で generic に退化しこれを blow up することによって滑らかな Calabi-Yau 多様体 $X_{\Delta_1} \subset \mathbf{P}_{\Sigma(\Delta_1^*)}$を得る。従って、contraction $X_{\Delta_1} \to X'_{\Delta_1}$ は例外集合がつぶれるもので、この場合有限個の$\mathbf{P}^1$がつぶれるI型であることが分かる。この様子を見るために、ambient 空間$\mathbf{P}_{\Sigma(\Delta_1^*)}$を Cox による斉次座標 [Cox] によって表す:

$$\mathbf{P}_{\Sigma(\Delta_1^*)} = \mathbf{C}^6 \setminus \{(z_1 = z_2 = z_3 = z_6 = 0), (z_4 = z_5 = 0)\}/\sim \tag{9}$$

ここで、$\sim$は$(\mathbf{C}^*)^2$の作用のもとでの同一視で、斉次座標に次のように作用する $(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6) \sim (\lambda z_1, \lambda z_2, \lambda z_3, z_4, z_5, \lambda z_6) \sim (z_1, z_2, z_3, \mu z_4, \mu z_5, \mu^{-1} z_6)$ $(\lambda, \mu \in \mathbf{C}^*)$. Cox の斉次座標では、因子 $D_1, \cdots, D_6$は順に $z_1 = 0, \cdots, z_6 = 0$ によって簡単に表現される。Calabi-Yau 多様体 X_{Δ_1}は (9) を ambient 空間として、斉次方程式

$$z_4 f_4(z_1, z_2, z_3) + z_5 g_4(z_1, z_2, z_3) + h_5(z_4, z_5) z_6^4 = 0 \tag{10}$$

によって与えられる。$z_6 \neq 0$ では、ambient 空間は (9) 式より、$\mathbf{P}^4 \setminus (z_4 = z_5 = 0)$ に同型で、X_{Δ_1}はそこで非退化である。一方 $z_6 = 0$ で決まる、ambient 空間の因子は、$D_6 = \mathbf{P}^2 \times \mathbf{P}^1$に等しく、(10) 式との交点は、$4 \cdot 4 = 16$ 個の$\mathbf{P}^1$であることが分かる。Pic(X_{Δ_1}) を生成する因子は、D_1と D_4 であることは、因子の線形関係を直接調べることによって分かる。

さて、二次扇によってII_Aモジュライ空間 (Kähler cone) を記述しよう。Δ_1^*については、4 つの異なる正則な単体分割が存在することが分かり、このことから $\mathrm{Pic}(X_{\Delta_1})\otimes\mathbf{R}$ の完備扇として

$$\begin{aligned} S\Sigma(\Delta_1^*) &= \sigma_{T_0}\cup\sigma_{T_1}\cup\sigma_{T_2}\cup\sigma_{T_3} \\ &= (\mathbf{R}_{\geq 0}(1,0)+\mathbf{R}_{\geq 0}(0,1))\cup(\mathbf{R}_{\geq 0}(0,1)+\mathbf{R}_{\geq 0}(-2,-1)) \\ &\quad \cup(\mathbf{R}_{\geq 0}(-2,-1)+\mathbf{R}_{\geq 0}(1,-1))\cup(\mathbf{R}_{\geq 0}(1,-1)+\mathbf{R}_{\geq 0}(1,0)) \end{aligned} \tag{11}$$

を得る。ここで、T_0は$\Sigma(\Delta_1^*)$ から自然に従う単体分割で、従ってσ_{T_0}は Kähler cone を表す。((11) 式では成分表示で錐を表しているが、例えばσ_{T_0}は、$\mathbf{R}_{\geq 0}D_1+\mathbf{R}_{\geq 0}D_6$の意味である.) D_6は例外因子であったので、contraction $X_{\Delta_1}\to X'_{\Delta_1}$は、壁 $\mathbf{R}_{\geq 0}D_1$で起こることが分かる。

一方、ミラー $X_{\Delta_1^*}$のII_Bモジュライ空間のコンパクト化も同じ二次扇 (11) によって与えられ、$\overline{\mathcal{M}}(X_{\Delta_1^*})=\mathbf{P}^2\widetildeto{(2,1,1)}$(, 重み付き射影空間の一点 blow up,) となることが分かる。D_1,D_6の双対を $l^{(1)},l^{(2)}$と書くとき、σ_{T_0}の双対$\sigma_{T_0}^\vee$はこれらによって生成される $L\otimes\mathbf{R}$ の錐である。アフィン空間 $U_{\sigma_{T_0}}=Hom_{s.g.}(\sigma_{T_0}^\vee\cap L,\mathbf{C})$ の局所座標を、$x=u(l^{(1)})$, $y=u(l^{(2)})$ と書く。$x=y=0$ は rarge complex structure limit である。なお、$l^{(1)},l^{(2)}$の具体的な表示は $l^{(1)}=(1,1,1,0,0,1)$, $l^{(2)}=(0,0,0,1,1,-1)$ で与えられる。

さて、contraction $X_{\Delta_1}\to X'_{\Delta_1}$は $X_{\Delta_1^*}$の II_Bモジュライ空間でどのように見えているだろうか。これは、次の様に周期 $w_0(x,y)$ の振る舞いから推察することができる:

$$\begin{aligned} w_0(x,y) &= \sum_{n,m\geq 0}\frac{(4n+m)!}{(n!)^3(m!)^2(n-m)!}x^n y^m \\ &= \sum_{n,m\geq 0}\frac{(4n+m)!}{(n!)^3(m!)^2}(xy)^n\frac{(\frac{1}{y})^{n-m}}{(n-m)!} \\ &\to \sum_{n\geq 0}\frac{(5n)!}{(n!)^5}(xy)^n \qquad (\frac{1}{y}\to 0) \end{aligned} \tag{12}$$

この様に、quintic $X_{\Delta_0^*}$の周期が得られるのは contraction が smoothig $X_{\Delta_1}^{2,86}\to X_{\Delta_1}^{\prime 1,86}\to X_{\Delta_0}^{1,101}$を持つ一方で、$\overline{\mathcal{M}}(X_{\Delta_1^*})$ のトーリック因子$\frac{1}{y}=0$ ($D_{(1,-1)}$) が、quintic $X_{\Delta_0^*}$の II_B モジュライ空間$\overline{\mathcal{M}}(X_{\Delta_0^*})$ に同定されるからである。すなわち、II_Aでの smoothing 可能な contraction $X_{\Delta_1}\to X'_{\Delta_1}$に対し、$II_B$では境界のトーリック因子が対応している。

example 2: 前述の例と同様に quintic に contraction を持つモデルで、III 型の例を構成する。事情は例 1 と全く同様なので詳細は省きまとめる。モデルを決める reflexive 多面体を

$$\Delta_2^* = \mathrm{Conv.}\,(\Delta_0^* \cup \{(-1,-1,0,0)\}) \tag{13}$$

で与える。多面体の包含関係から、(13) のモデルは quintic の blow up であることが分かる。実際、contraction $X_{\Delta_2} \to X'_{\Delta_2}$ によって、conic bundle が、低空間 $\mathbf{P}^1$につぶれることが分かる。その様子を見るために、Cox 座標によって ambient 空間を表示する。

$$\mathbf{P}_{\Sigma(\Delta_2^*)} = \mathbf{C}^6 \setminus \{(z_1 = z_2 = z_6 = 0), (z_3 = z_4 = z_5 = 0)\}/\sim \tag{14}$$

ここで、$(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6) \sim (\lambda z_1, \lambda z_2, z_3, z_4, z_5, \lambda z_6) \sim (z_1, z_2, \mu z_3, \mu z_4, \mu z_5, \mu^{-1} z_6)$ $(\lambda, \mu \in \mathbf{C}^*)$ である。超曲面 X_{Δ_2}の定義式は、斉次式

$$z_1^3 f_2(z_3, z_4, z_5) + z_2^3 g_2(z_3, z_4, z_5) + z_6^3 h_5(z_3, z_4, z_5) = 0 \tag{15}$$

によって与えられる。特に、$z_6 = 0$ で決まるトーリック因子は $D_6 = \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^2$であるが、ここで、定義式 (15) は $(z_1, z_2) \in \mathbf{P}^1$に対して $\mathbf{P}^2$の 2 次式を決め conic bunble になっていることが分かる。この一般 2 次式は、9 個の点で (一次式)^{2}になることが判別式から容易に確かめられる。超曲面 X_{Δ_2}は $X_{\Delta_2} \cap D_6$を除く所で、(15) の形をした $\mathbf{P}^4$の特異 5 次式に同型である (特異点集合は $\mathbf{P}^1 = (z_3 = z_4 = z_5 = 0)$)。なお、$\mathrm{Pic}(X_{\Delta_2}) = \mathbf{Z} \cdot D_1 \oplus \mathbf{Z} \cdot D_3$である。

さて、Δ_2^*の単体分割は 4 通りあることが分かり、二次扇は

$$\begin{aligned} S\Sigma(\Delta_2^*) &= \sigma_{T_0} \cup \sigma_{T_1} \cup \sigma_{T_2} \cup \sigma_{T_3} \\ &= (\mathbf{R}_{\geq 0}(1,0) + \mathbf{R}_{\geq 0}(0,1)) \cup (\mathbf{R}_{\geq 0}(0,1) + \mathbf{R}_{\geq 0}(-1,-1)) \\ &\quad \cup (\mathbf{R}_{\geq 0}(-1,-1) + \mathbf{R}_{\geq 0}(1,-1)) \cup (\mathbf{R}_{\geq 0}(1,-1) + \mathbf{R}_{\geq 0}(1,0)) \end{aligned} \tag{16}$$

と求められる。$\sigma_{T_0} = \mathbf{Z}_{\geq 0} D_1 + \mathbf{Z}_{\geq 0} D_3$ が X_{Δ_2}の Kähler cone を決める。同時に二次扇はミラー X_{Δ_2}の II_Bモジュライ空間のコンパクト化を決め、$\overline{\mathcal{M}}(X_{\Delta_2^*}) = \widetilde{\mathbf{P}^2}$(, 射影空間の一点 blow up,) であることが分かる。双対$\sigma_{T_0}^\vee$は、$U_{\sigma_{T_0}}$を決めるが、具体的に, D_1,D_3の双対, $l^{(1)} = (1,1,0,0,0,1), l^{(2)} = (0,0,1,1,1,-1)$ で生成される。

さて、example 1 と全く同様に、contraction $X_{\Delta_2} \to X'_{\Delta_2}$に対して、$II_B$での極限$\frac{1}{y} \to 0$を考えると (基本) 周期について

$$
\begin{aligned}
w_0(x,y) &= \sum_{n,m\geq 0} \frac{(3n+2m)!}{(n!)^2(m!)^3(n-m)!} x^n y^m \\
&= \sum_{n,m\geq 0} \frac{(3n+2m)!}{(n!)^2(m!)^3}(xy)^n \frac{(\frac{1}{y})^{n-m}}{(n-m)!} \\
&\to \sum_{n\geq 0} \frac{(5n)!}{(n!)^5}(xy)^n \qquad (\frac{1}{y} \to 0)
\end{aligned} \tag{17}
$$

が確かめられる。この場合も前の例と同様に、contraction に引き続く smoothing $X^{2,86}_{\Delta_2} \to X'^{1,86}_{\Delta_2} \to X^{1,101}_{\Delta_0}$が存在することが分かり、$II_B$モジュライ空間ではこれがトーリック因子 $\frac{1}{y} = 0(D_{(1,-1)})$ によって現れていることが分かる。

example 3: 最後に、II 型の contraction を持つモデルを構成する。多面体として

$$\Delta_3^* = \mathrm{Conv.}\,(\Delta_0^* \cup \{(-1,0,0,0)\}) \tag{18}$$

を考える。このとき、contaction $X_{\Delta_3} \to X'_{\Delta_3}$ によって Del Pezzo 曲面 B_6がつぶれることが分かる。また、この contraction は smoothing によって、quintic につながる。これまでの例と同様にして、Cox の斉次座標を用いて超曲面を書く。まず、

$$\mathbf{P}_{\Sigma(\Delta_3^*)} = \mathbf{C}^6 \setminus \{(z_1 = z_6 = 0), (z_2 = z_3 = z_4 = z_5 = 0)\} / \sim \tag{18}$$

ここで、$(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6) \sim (\lambda z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, \lambda z_6) \sim (z_1, \mu z_2, \mu z_3, \mu z_4, \mu z_5, \mu^{-1} z_6)$ $(\lambda, \mu \in \mathbf{C}^*)$. 超曲面の定義式は

$$X_{\Delta_3} : z_1^2 f_3(z_2, z_3, z_4, z_5) + z_6^2 g_5(z_2, z_3, z_4, z_5) = 0 \tag{19}$$

で与えられる。$z_6 = 0$ で与えられるトーリック因子 D_6は、$\mathbf{P}^3$ に等しいことが分かる。そして、この因子との交点で超曲面は、一般 3 次式になることから、Del Pezzo 曲面 B_6であることが分かる。

他の例と同様に、$\mathrm{Pic}(X_{\Delta_3}) = \mathbf{Z}\cdot D_1 \oplus \mathbf{Z}\cdot D_2$ であることが分かり、また、二次扇は

$$
\begin{aligned}
S\Sigma(\Delta_2^*) &= \sigma_{T_0} \cup \sigma_{T_1} \cup \sigma_{T_2} \cup \sigma_{T_3} \\
&= (\mathbf{R}_{\geq 0}(1,0) + \mathbf{R}_{\geq 0}(0,1)) \cup (\mathbf{R}_{\geq 0}(0,1) + \mathbf{R}_{\geq 0}(-2,-3)) \qquad (20)\\
&\quad \cup (\mathbf{R}_{\geq 0}(-2,-3) + \mathbf{R}_{\geq 0}(1,-1)) \cup (\mathbf{R}_{\geq 0}(1,-1) + \mathbf{R}_{\geq 0}(1,0))
\end{aligned}
$$

と求められる。$\sigma_{T_0} = \mathbf{R}_{\geq 0}D_1 + \mathbf{R}_{\geq 0}D_2$ が X_{Δ_3}の Kähler cone をきめる。また、(20) は $X_{\Delta_3^*}$のコンパクト化を決め、$\overline{\mathcal{M}}(X_{\Delta_3^*}) = \mathbf{P}^2\widetilde{(3,2,1)}$ (, 一点 blow up で、まだ $U_{\sigma_{T_1}}$ に特異点が残る,) となる。双対$\sigma_{T_0}^\vee$は、$l^{(1)} = (1,0,0,0,0,1)$, $l^{(2)} = (0,1,1,1,1,-1)$ によって生成され、またこれらが $\mathbf{Z}$ 加群 L を生成することも確かめられる。以上の data から、基本周期を決め境界での振舞いを見ると

$$
\begin{aligned}
w_0(x,y) &= \sum_{n,m\geq 0} \frac{(2n+3m)!}{n!(m!)^4(n-m)!} x^n y^m \\
&= \sum_{n,m\geq 0} \frac{(2n+3m)!}{n!(m!)^4}(xy)^n \frac{(\frac{1}{y})^{n-m}}{(n-m)!} \qquad (21)\\
&\to \sum_{n\geq 0} \frac{(5n)!}{(n!)^5}(xy)^n \qquad (\frac{1}{y} \to 0)
\end{aligned}
$$

が確かめられる。他の例と同様に、contraction $X_{\Delta_3}^{2,90} \to X_{\Delta_3}^{\prime 1,90}$は、quintic $X_{\Delta_0}^{1,101}$に smoothing 可能で、このことは、ミラー $X_{\Delta_3^*}$の II_Bモジュライ空間で見ると、トーリック因子$\frac{1}{y} = 0$ $(D_{(1,-1)})$ が、$\overline{\mathcal{M}}(X_{\Delta_0^*})$ と同定できることとして現れている。

4. Higgs 機構は場の理論における基底状態の非摂動的転移機構で、同じ理論の異なる相 (基底状態) を結び付ける。超弦理論もまた多くの基底状態を持ち、それらは Higgs 機構によって移りあう。個々の Calabi-Yau 多様体は II 型超弦理論を定義しその基底状態を決めるが、基底状態から離れた非摂動効果を取り入れて考える時、多くの異なった基底状態 (Calabi-Yau 多様体) は一つの超弦理論の異なる相 (基底状態) として一つにまとまることが期待される。2 つの Calabi-Yau 多様体 (基底状態) が Higgs 転移可能かどうかは、そこに smoothing を持つ contraction が存在するかどうかということに言い換えるのが自然である。また、ミラー対称性を用いるとき、smoothing を持つ contraction は、対応する II_Bモジュライ空間

のコンパクト化とそこでの境界因子によって特徴付けられるべきである。この様な観点からトーリック多様体の超曲面を調べるとき、example 1,2,3 は、易しいが、Calabi-Yau モデルの contraction に典型的に現れるパターンである。これらの例に共通する性質は多面体の包含関係$\Delta'^{*} \supset \Delta^{*}$である。包含関係から自然に$\mathbf{P}_{\Sigma(\Delta'^{*})}$は blow up によって$\mathbf{P}_{\Sigma(\Delta^{*})}$ から得られ、このため contraction $X_{\Delta'} \to X_{\Delta}$ を常に考えることが出来る。二次扇の解析から、こうして得られる contraction は常に smoothing 可能であると思われる。

一般に smoothing 可能な primitive contraction $X_{\Delta} \to X'_{\Delta}$ について、これまでの例を含めて、次の 3 つのタイプが観察される: $\overline{\mathcal{K}}(X_{\Delta}) \otimes \mathbf{C}$ の余次元 1 の境界は、ミラー対称性のもとで、以下のようなII_Bモジュライ空間の境界に写される.

A) 二次扇を用いたコンパクト化$\overline{\mathcal{M}}(X_{\Delta^{*}})$ のあるトーリック因子. これは、包含関係$\Delta'^{*} \supset \Delta^{*}$ がある場合一般に起こる。

B) ミラー (family)X^{*}_{Δ}の discriminant で、その一つの既約成分. 例えば、 contrction + smoothing $\mathbf{P}(6,2,2,1,1)[12]^{2,128} \to \mathbf{P}(3,1,1,1,1,1)[6,2]^{1,129}$ では、genus 2 の曲線上の ruled surface が曲線につぶれ、これが smoothing される。II_Bモジュライ空間は、そのコンパクト化が$\mathbf{P}^2\widetilde{(2,1,1)}$で行わる。そこには$x=0, y=0$ の他に、二つ discriminant の成分, $(1-x)^2 - x^2y = 0,\ 1-y=0$ を見ることができる。基本周期の振舞いをみると、$w_0(x,y) \to w_0(x)\ (y \to 1)$ が確かめられる。

C) 二次扇を用いたコンパクト化$\overline{\mathcal{M}}(X_{\Delta^{*}})$ の、non-toric 因子. 例えば、contraction + smoothing $\mathbf{P}(3,1,1,1,1)[7]^{2,122} \to \mathbf{P}(4,1,1,1,1)[8]^{1,149}$では、28 個の $\mathbf{P}^1$がそれぞれ点につぶれる。II_Bモジュライ空間を見ると、そのコンパクト化は$\mathbf{P}^2\widetilde{(2,1,1)}$で行われる。二つの discriminant が接する点が見出され、これを normal crossing にするために blow up を行う。このときの no-toric 因子が II_Bでの境界となる。このことは具体的に、blow up する座標を$\xi = \frac{x^3y}{2(1-4x)4}$ とし基本周期について $(1-4x)^{1/2}w_0(x,y) \to w_0(\xi)\ (x \to 1/4, y \to 0)$ であることから確かめられる。

以上、例証することを手がかりに解析を行なった結果に過ぎないが、一般性を持った定式化を期待している。

References

[Bat] V. Batyrev,J. Algebraic Geometry 3 (1994) 493.

[BIKMSV] M.Bershadsky, K.Intriligator, S.Kachru, D.Morrison, V.Sadov and C.Vafa, *Geometric Singularities and Enhanced Gauge Symmetries*, hep-th/9605200.

[Cox] D.Cox, *The homogeneous coordinate ring of a toric variety*, J.Algebraic Geom.

[Ful] W. Fulton, *An introduction to toric varieties*, Princeton Univ. Press 1993.

[GKZ] I.M.Gel'fand, A.V.Zelevinsky and M.M.Kapranov, Funct. Anal. Appl.**28**(1989)94.

[GY] *Mirror Symmetry II*, Eds. B. Greene and S.-T.Yau, AMS/International Press 1996.

[HKTY] S.Hosono, A.Klemm, S.Theisen and S.-T.Yau, Commun. Math. Phys. 167 (1995) 301; Nucl. Phys. B433 (1995) 501.

[HLY] S. Hosono, B. Lian and S.T.-Yau, *GKZ-Generalized Hypergeometric Systems in Mirror Symmetry of Calabi-Yau Hypersurfaces*, alg-geom/9511001, Commun.Math.Phys. 182 (1996)535; *Maximal Degeneracy of GKZ Hypergeometric Systems*, alg-geom/9603014, to be published in J.AMS.

[Oda] T. Oda, *Convex Bodies and Algebraic Geometry*, Springer-Verlag 1988.

[Saito] K. Saito, *On the periods of Primitive Integrals (Harvard Lecture Notes, 1980); Publ. RIMS, Kyoto University 19 (1983) 1231.*

[Wil] 例えば P.M.H.Wilson, in ref.[GY].