数理解析研究所講究録
1087巻 1999年 93-107

Hausdorff dimension and conformal dynamics III: Computation of dimension ～McMullenの論文紹介～

須川 敏幸　　京都大学・理学部
Toshiyuki Sugawa　　Kyoto University

概 要

最近McMullenは共形力学系の極限集合のハウスドルフ次元を幾何学的有限性など比較的緩やかな条件の下で任意の精度で計算する方法について発表した。方法論的にはBowenらにより以前から知られていたことではあるが実際の計算に乗るように定式化したところに意味があると言えるであろう。ここではその方法について紹介する。

1 序

つい最近C. McMullenは
“ Hausdorff dimension and conformal dynamics ”
I: Kleinian groups and strong limits.
II: Geometrically finite rational maps.
III: Computation of dimension.
という3部作の論文をプレプリントとして発表した。特に3つ目の論文は既にAmer. J. Math. **120** (1998), 691–721に発表されている。これらの論文は現在彼のホームページ
http://WWW.MATH.HARVARD.EDU/~ctm/
から入手可能であるが近いうちに残りの2編も出版されるであろう。

この小文ではこれらのうちの第3部についてハウスドルフ次元の計算の原理的な部分についてのみ解説を加えることを目標とする。プレプリントではわずか4ページ余りに書かれていることではあるが解説するとこの程度になった。何かの参考になれば幸いである。ただ、具体的な例についてはあまり触れられなかったので具体的な計算例については上のプレプリントを見て頂きたい。あるいは自分で手を動かしてみるのも悪くはないであろう。McMullenは具体的にある特殊な対称性を持ったSchottky群の極限集合や2次多項式族 z^2+c のうち $c \in [-1, 1/2]$

の部分の Julia 集合、あるいは特殊な形の Blaschke 積の Julia 集合のハウスドルフ次元などを数値的に求めている。このプレプリントによれば、この論文は1984年に書かれた彼によるプレプリント “Calculating the exponent of divergence of the Poincaré series” が元になっているとのことである。

なお、この文章は拙編による研究集会報告集「ハウスドルフ次元〜計算へのアプロチ〜」(1998年) において発表済みのものに、若干の手を加えたものであることをお断りしおく。

2 Markov 分割

この節では共形 (等角) 力学系及びその上の δ 次元不変測度の定義、及びそれらに対する Markov 分割について基本的な事項を述べる。

定義 2.1 n-次元球面 $S^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ 上の**共形力学系** $\mathcal{F}$ とは共形写像（等角写像）

$$f : U(f) \to S^n$$

の集まりとする。ただしここに $U(f)$ は f の定義域で S^n の開集合であるとする。

注意 Liouville の定理としてよく知られているように $n \geq 3$ ならば S^n の局所的な共形写像は Möbius 変換の制限に限る。従って上の定義で $n \geq 3$ ならば写像 f は最初から Möbius 変換（の制限）と思ってよい。(連結成分ごとには違う Möbius 換であるかもしれないが。)

一応共形写像についての復習をしておくと、$f : U \to S^n$ が共形写像であるとは f が C^1 級の局所微分同相写像で球面計量 $\sigma = \frac{2|dx|}{1+|x|^2}$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ の f による引き戻し $f^*\sigma$ が σ と proportional であること、つまりある正値連続函数 $h : U \to (0, +\infty)$ が存在して $f^*\sigma = h\sigma$ となることである。この $h(x)$ は計量に関する f の微分を表す量であるからこれを $|f'(x)|$ と表すことにする。Euclid 計量に関する Jacobian とは異なるので注意して頂きたい。なお、上の注意にもあるように $n \geq 3$ ならば常に $|f'(x)| > 0$ であるが $n = 2$ の場合には U のある離散閉集合の上で $|f'(x)| = 0$ となる場合も許すということに注意してほしい。また、いずれにせよ共形写像は実解析的な滑らかさを持つことにも留意しておいて頂きたい。

定義 2.2 μ が **δ 次元 $\mathcal{F}$-不変測度**であるとは S^n 上の正値有限 Borel 測度であって任意の $f \in \mathcal{F}$ と $f|_E$ が単射であるような Borel 集合 $E \subset U(f)$ に対して

$$\mu(f(E)) = \int_E |f'(x)|^\delta d\mu(x) \tag{2.1}$$

が成り立つものとする。

後に必要となるので若干の予備的な考察を行っておく。(必要になった時点で読んで頂ければいいのでとりあえず飛ばしておいてもらって差し支えない。)

今 U を $U(f)$ のある開集合（または Borel 集合）として $f:U\to W=f(U)$ が同相写像であったとする。$g=(f|_U)^{-1}:W\to U$ と書くことにしよう。ν を g による μ_U の像測度であるとする。つまり $\nu(E)=\mu(g^{-1}(E))=\mu(f(E))$ とする。このとき上の式(2.1) は W 上で

$$d\nu=|f'|^{\delta}d\mu$$

となることを意味する。一方像測度に関する一般論から U 上の任意の正値可測函数 φ に対して $\int_U\varphi d\nu=\int_W\varphi\circ g d\mu$ が成り立つ。従って、これらより $E\subset U$ を Borel 集合として

$$\mu(E)=\int_E|f'|^{-\delta}|f'|^{\delta}d\mu=\int_E|f'|^{-\delta}d\nu=\int_{g^{-1}(E)}|f'|^{-\delta}\circ g d\mu=\int_{g^{-1}(E)}|g'|^{\delta}d\mu \tag{2.2}$$

が成り立つ。この式は後で用いることになるであろう。

さらに ρ を S^n の別のリーマン計量として新たに測度 μ_ρ を

$$d\mu_\rho=\left(\frac{\rho}{\sigma}\right)^{\delta}d\mu=h^{\delta}d\mu$$

によって定める。ここに $h=\rho/\sigma$ は S^n 上の滑らかな正値函数である。するとこのこの ρ に関して測った微分

$$|f'(x)|_\rho=\frac{f^*\rho}{\rho}=\frac{f^*(h\sigma)}{h\sigma}=\frac{h\circ f}{h}|f'(x)|$$

に関して(2.1) と同様の式が成立する。つまり $f|_E$ が単射であれば

$$\mu_\rho(f(E))=\int_E|f'(x)|_\rho^{\delta}d\mu_\rho(x) \tag{2.3}$$

が成り立つ。実際、E が上記のような U に入っているとしてよいから

$$\begin{aligned}\int_E|f'|_\rho^{\delta}d\mu_\rho&=\int_E\left(\frac{h\circ f}{h}\right)^{\delta}|f'|^{\delta}\cdot h^{\delta}d\mu=\int_E(h\circ f)^{\delta}d\nu\\&=\int_{g^{-1}(E)}(h\circ f)^{\delta}\circ g d\mu=\int_{f(E)}h^{\delta}d\mu=\mu_\rho(f(E))\end{aligned}$$

と計算出来る。

例えば幾何学的有限な Klein 群や双曲的有理函数の力学系についてはその極限集合に台を持つ標準的な不変測度の存在が知られている。これらは Patterson-Sullivan 測度などと呼ばれている。詳しくは [3], [2] などを参照のこと。性質の良い力学系だとこのような標準的測度の次元が極限集合の Hausdorff 次元と一致す

ることなどが知られている。従って、実際問題としてはこのような測度の存在が分かっている時、その次元を何らかの方法で求めることが重要になる。

以下では単に $(\mathcal{F},\mu)$ と書けばこれは共形力学系とその上の δ 次元不変測度との組を表すとしておく。

定義 2.3 $(\mathcal{F},\mu)$ に対する **Markov 分割**とは S^n の連結コンパクト集合 P_i と $f_i \in \mathcal{F}$ で $P_i \subset U(f_i)$ を満たすものの組からなる空でない集合 $\mathcal{P} = \langle (P_i, f_i); i \in I\rangle$ で次の条件を満たすものとする。

(1) $f_i(P_i) \supset \bigcup_{i\mapsto j} P_j$.（ここに $i \mapsto j$ は $\mu(f_i(P_i)\cap P_j) > 0$ を意味するものとする。）すなわち

$$\mu(f_i(P_i)\cap P_j) > 0 \Rightarrow f_i(P_i) \supset P_j.$$

(2) $i \mapsto j$ ならば f_i は $R_{ij} := P_i \cap f_i^{-1}(P_j)$ の近傍から S^n の中への同相写像である。

(3) 任意の $i \in I$ に対して $\mu(P_i) > 0$.

(4) $i \neq j$ ならば $\mu(P_i \cap P_j) = 0$.

(5) $\mu(f_i(P_i)) = \mu(\bigcup_{i\mapsto j} P_j) = \sum_{i\mapsto j} \mu(P_j)$.

ここで各 P_i をこの Markov 分割の**ブロック**と呼ぶ。

注意 (a) 条件 (1),(3) より $i \mapsto j \Leftrightarrow f_i(P_i) \supset P_j$ であることが分かる。従ってこの時は $f_i(R_{ij}) = P_j$ であり条件 (2) より $f_i : R_{ij} \to P_j$ は同相写像でありしかも近傍にまで同相に拡張出来る。この逆写像を $g_{ij} : P_j \to R_{ij}$ と書くことにする。また、このことから特に f_i は各 R_{ij} の近傍で正則単葉だからその微分は零点を持たない。つまり R_{ij} 上では $|f_i'(x)| > 0$ でなければならない。

(b) また式(2.1) と条件 (3), (6) より $\mu(f_i(P_i)) > 0$ であるから条件 (5) より任意の $i \in I$ に対してある $j \in I$ が存在して $i \mapsto j$ であることが分かる。

以下では常に $\# I < \infty$ と仮定する。

Markov 分割 $\mathcal{P}$ が **ξ-拡大的**とは S^n 上のある滑らかな共形計量 ρ と定数 $\xi > 1$ に対して任意の $x \in R_{ij}$ に対して

$$|f_i'(x)|_\rho := \frac{f_i^*\rho}{\rho}(x) > \xi$$

が成り立つことを言う。これは g_{ij} を用いて言えば P_j 上で $|g_{ij}'| < \xi^{-1}$ が成り立つことと同値である。

例 2.1 (Schottky 群) ここでは簡単のために次のような古典的 Schottky 群を考える。まず $D_1, D_{-1}, \cdots, D_g, D_{-g}$ を互いに交わらない複素平面内の $2g$ 個の閉円板とし、D_j と D_{-j} の半径は等しいものとする。$D_j = \{z; |z-a_j| \le r_j\}, D_{-j} =$

$\{z; |z-b_j| \le r_j\}$ としたとき、Möbius 変換 A_j を

$$A_j(z) = \frac{\zeta_j r_j^2}{z-a_j} + b_j$$

によって定める。ただしここに ζ_j は絶対値 1 の複素定数とする。すると A_j は D_j° を D_{-j} の外部に写し、∂D_j が A_j の等長円 (isometric circle) になっている。すなわち $\partial D_j = \{z; |A_j'(z)| = 1\}$ である。同様に ∂D_{-j} は A_j^{-1} の等長円になっている。

するとこれらによって生成された群 $G = \langle A_1, \cdots, A_g \rangle$ は Schottky 群となる。これは幾何学的有限だから Patterson-Sullivan 測度が存在するとは一般論から分かる。その次元 δ は極限集合の Hausdorff 次元に等しい。

さて等角力学系 G の Markov 分割を実際に構成してみよう。$I = \{1, -1, \cdots, g, -g\}$ として各 $i \in I$ に対して $P_i = D_i$ と定義する。また $i \in I$ を $i = \varepsilon(i)|i|$ と書いた時 $f_i = A_{|i|}^{\varepsilon(i)}$ と定める。

すると容易に分かるようにこれは Markov 分割を与える。また、各 R_{ij} は等長円 P_j に真に含まれているコンパクト集合なのである定数 $\xi > 1$ が存在して Euclid 計量に関して $|f_i'| > \xi$ が成り立つ。よってこれは拡大的 Markov 分割である。

Markov 分割 $\mathcal{P}$ の細分 $\mathcal{R}(\mathcal{P})$ とは $I_1 = \{(i,j) \in I^2; i \mapsto j\}$ として $\langle (R_{ij}, f_i); (i,j) \in I_1 \rangle$ によって定義されるものとする。これについてまず次のことが成り立つことに注意しておく。

補題 2.1 $(i,j), (i',j') \in I_1$ **に対して** $(i,j) \mapsto (i',j')$ **となる必要十分条件は** $i' = j$ **が成り立つことであり、このとき** $j \mapsto j'$ **が成り立つ。**

Proof. $(i,j) \mapsto (i',j')$ と仮定する、つまり $\mu(f_i(R_{ij}) \cap R_{i'j'}) > 0$ とする。すると $R_{i'j'} \subset P_{i'}$ であるから

$$f_i(R_{ij}) \cap R_{i'j'} = P_j \cap R_{i'j'} \subset P_j \cap P_{i'}$$

となる。この測度が正なのだから $\mathcal{P}$ の性質 (4) より $i' = j$ でなければならないことが分かる。$j' \mapsto j$ は $(j,j') = (i',j') \in I_1$ なのだから明らか。逆に $i' = j$ と仮定してみると $f_i(R_{ij}) \cap R_{i'j'} = P_j \cap R_{jj'} = R_{jj'}$ である。以下の (3) でみるように $\mu(R_{jj'}) > 0$ であるからこれより $(i,j) \mapsto (i',j')$ を得る。 ■

主張 $\mathcal{R}(\mathcal{P})$ は $(\mathcal{F}, \mu)$ に対する Markov 分割となる。

実際、先の注意 (a) より任意の $(i,j) \in I_1$ に対して $f_i : R_{ij} \to P_j$ は同相写像であるから R_{ij} も連結コンパクト集合である。以下条件 (1) ～ (6) が成り立つことを順次見ていくことにする。

(1) $(i,j) \mapsto (i',j')$ とすると上の補題から $i' = j$ である。従って $R_{i'j'} \subset P_{i'} = P_j = f_i(R_{ij})$ が得られる。

(2) 明らか。

(3) $(i,j)\in I_1$ に対して

$$0<\mu(P_j)=\mu(f(R_{ij}))=\int_{R_{ij}}|f_i'(x)|^\delta d\mu(x)$$

だから $\mu(R_{ij})>0$ でなければならない。

(4) $(i,j)\neq(i',j')$ とする。まず $i\neq i'$ なら $\mu(R_{ij}\cap R_{i'j'})\leq\mu(P_i\cap P_{i'})=0$ より OK。$i=i'$ とする。このときは $j\neq j'$ でなければならない。$R_{ij}\cap R_{ij'}=f_i^{-1}(P_j\cap P_{j'})\cap P_i$ より

$$0=\mu(P_j\cap P_{j'})=\mu(f_i(R_{ij}\cap R_{ij'}))=\int_{R_{ij}\cap R_{ij'}}|f_i'(x)|^\delta d\mu(x).$$

よって $R_{ij}\cap R_{ij'}$ 上 a.e. に $|f_i'|=0$ である。一方注意 (a) より R_{ij} 上では $|f_i'|>0$ なのだからこれより $\mu(R_{ij}\cap R_{ij'}=0$ が従う。

(5) $(i,j)\in I_1$ に対して $f_i(R_{ij})=P_j$ であることと上の補題より

$$\bigcup_{(i,j)\mapsto(i',j')}R_{i'j'}=\bigcup_{j\mapsto j'}R_{jj'}=(f_j|_{P_j})^{-1}\left(\bigcup_{j\mapsto j'}P_{j'}\right)$$

であることに注意すると

$$f_i(R_{ij})\backslash\bigcup_{(i,j)\mapsto(i',j')}R_{i'j'}=P_j\backslash(f_j|_{P_j})^{-1}\left(\bigcup_{j\mapsto j'}P_{j'}\right)=(f_j|_{P_j})^{-1}\left(f_j(P_j)\backslash\bigcup_{j\mapsto j'}P_{j'}\right)$$

が得られる。$\mathcal{P}$ に関する性質 (5) よりこの最後の括弧の中の μ-測度は 0 である。よって式(2.1) と性質 (6) からこの集合の測度も 0 である。よって $\mathcal{R}(\mathcal{P})$ についても (5) が成り立つことが分かった。

(6) これも自明である。

$\mathcal{P}$ が Markov 分割ならば細分 $\mathcal{R}(\mathcal{P})$ も Markov 分割であることが分かった。さらにこれを細分したものを $\mathcal{R}^2(\mathcal{P})$ と表すことにする。同様にして $\mathcal{R}^n(\mathcal{P})$ も定義されるがこれについて次のことが分かる。

命題 2.2 $\mathcal{P}$ を ξ-拡大的な Markov 分割（$\xi>1$）とすると $\mathcal{R}^n(\mathcal{P})$ のブロックの直径は $O(\xi^{-n})$ である。

Proof. $\mathcal{P}$ は計量 ρ に関して ξ-拡大的であるとする。このとき各 R_{ij} 上で $|f_i'(x)|_\rho>\xi$ だから $|f_i'|$ の連続性からある近傍 $R_{ij}\subset V_{ij}\subset U(f_i)$ が存在してこの V_{ij} の上で $|f_i'|_\rho\geq\xi$ と出来る。$j\in I$ を固定して V_j を $\cap_{i\mapsto j}f_i(V_{ij})$ の P_j を含む連結成分とすると I は有限集合だからこれは開集合となる。P_j はコンパクトだからある定数 $L>0$ が存在して任意の $x,y\in P_j$ に対してこの 2 点をつなぐ V_j 内の曲線 γ で ρ に関する長さ $\ell_\rho(\gamma)$ が L 以下となる。（これより特に ρ に関する直径は $\mathrm{diam}_\rho(P_j)\leq L$ とな

る。) I は有限集合だから L は j にもよらないとしてよい。ここで $\gamma_i = g_{ij}(\gamma)$ とすれば仮定より $\ell_\rho(\gamma_i) \leq \xi^{-1}\ell_\rho(\gamma) \leq \xi^{-1}L$ が言える。従って特に $\mathrm{diam}_\rho(R_{ij}) \leq \xi^{-1}L$ を得る。

これを繰り返せば $\mathcal{R}^n(\mathcal{P})$ の各ブロックの ρ に関する直径は常に $\xi^{-n}L$ 以下であることが分かる。ρ は球面計量 σ に比較可能であるからこれより主張を得る。■

注意 I の元の個数を $\#I = N$ とすれば、$\#I_1 \leq N^2$ となるが、さらに補題 2.1 により $\#I_2 \leq N^3$ となる。一般には $\#I_n \leq \#I_{n-1} \cdot \#I_{n-2}$ だから N の指数が Fibonacci 数列で表せる程度の量で評価される。

3 固有値アルゴリズム

この節で具体的に測度の次元を求めるアルゴリズムを述べ、その正当性の証明を行う。以下では非負値行列の議論が必要になるが、それについては次の付録の節で必要事項を説明しておいた。記号や言葉の意味についてはそちらを随時参照して頂きたい。

S^n 上の共形力学系 $\mathcal{F}$ とそれに関して不変な δ 次元共形測度 μ が与えられているとする。$\mathcal{P} = \langle (P_i, f_i); i \in I \rangle$ をそれに対する Markov 分割とする。(I は有限集合とし元の個数を m としておく。)

まずサンプル点 $x_i \in P_i$ を任意に選んで固定しておく。そこで次のように逐次 $\alpha_n = \alpha(\mathcal{R}^n(\mathcal{P}))$ を計算していく。

[1] 各 $i \mapsto j$ に対して $y_{ij} = g_{ij}(x_j) \in P_i$ とおく。

[2] 遷移行列 $T = (T_{ij})$ を

$$T_{ij} = \begin{cases} |g'_{ij}(x_j)| = |f'_i(y_{ij})|^{-1} & (i \mapsto j \text{ の時}), \\ 0 \quad (\text{そうでない時}) \end{cases}$$

と定義する。

[3] 次の方程式の解 $\alpha = \alpha(\mathcal{P}) \geq 0$ を求める：

$$\lambda(T^\alpha) = 1.$$

ただし、ここに T^α は通常の行列のべきではなく T^α_{ij} を成分に持つような行列とし、$\lambda(T)$ は行列 T のスペクトル半径を表すとする。つまり行列 T の固有値の絶対値の最大値である。

[4] $\alpha(\mathcal{P})$ を δ の近似値として出力する。

[5] $\mathcal{P}$ を $\mathcal{R}(\mathcal{P})$ で置き換えて新しいサンプル点として $y_{ij} \in R_{ij}$ を採用する。そしてステップ [1] に戻る。

注意 宍倉氏のご教示によれば、写像 $\alpha \mapsto \log\lambda(T^\alpha)$ は熱力学形式における (topological) pressure を近似するものだとのことである。

一般に T を複素数係数の m 次正方行列とする。T を $\mathbb{C}^m$ 上の線型変換とみなした時の作用素ノルムを $\|T\| = \sup_{x\in\mathbb{C}^m} |Tx|/|x|$ とする。(ここで $|x|^2 = |x_1|^2 + \cdots + |x_m|^2$ である。) このときよく知られているように $\lambda(T) = \lim_{k\to\infty} \|T^{\circ k}\|1/k$ である。ただしここで $T^{\circ k}$ は T の k 回合成を表す。

定理 3.1 **$(\mathcal{F}, \mu)$ を δ 次元不変測度を持つ共形力学系とし $\mathcal{P}$ をその上の ξ-拡大的 Markov 分割（$\xi > 1$）とする。このとき**

$$\alpha(\mathcal{R}^n(\mathcal{P})) \to \delta \quad (n \to \infty)$$

が成り立つ。また δ を N 桁の精度で求めるには N のオーダーで分割を繰り返せばよい。

Proof. 最初に $\mathcal{P} = \langle (P_i, f_i); i \in I \rangle$ が球面計量 σ に関して ξ-拡大的であるとする。$i \mapsto j$ の時

$$S_{ij} = \min_{x\in P_j} |g'_{ij}(x)|, \quad U_{ij} = \max_{x\in P_j} |g'_{ij}(x)|$$

とし、そうでない i, j については $S_{ij} = U_{ij} = 0$ として正方行列 $S = (S_{ij}), U = (U_{ij})$ を定める。仮定より

$$S_{ij} \le T_{ij} \le U_{ij} < \xi^{-1} < 1$$

である。従って特に $\lambda(T^\alpha)$ は α に関して狭義単調減少で $\alpha \to \infty$ の時 0 に収束する。(付録の補題 4.2 参照)。また前節の注意 (b) よりベクトル $\boldsymbol{u} = (1, \cdots, 1) \in \mathbb{C}^m$ について $T^0\boldsymbol{u}$ の各成分は 1 以上であるから特に $\|T^0\| \ge 1$ である。従って、$\alpha(\mathcal{P}) \ge 0$ であることが分かる。よって中間値の定理により $\lambda(T^\alpha) = 1$ となる $\alpha \ge 0$ がただ一つ存在する。

次に $m_i = \mu(P_i)$ としてベクトル $\boldsymbol{m} = (m_i)$ を考える。これについて

$$S^\delta \boldsymbol{m} \le \boldsymbol{m} \le U^\delta \boldsymbol{m} \tag{3.1}$$

が成り立つ。実際、式(2.1) 及び性質 (5) より

$$0 = \mu(f_i(P_i) \setminus \cup_{i\mapsto} P_j) = \int_{P_i \setminus \cup_{i\mapsto j} g_{ij}(P_j)} |f'_i|^\delta d\mu$$

であるから、性質 (6) より $\mu(P_i \setminus \cup_{i\mapsto j} g_{ij}(P_j)) = 0$ が成り立つ。ここで式(2.2) を用いると

$$m_i = \mu(P_i) = \sum_{i\mapsto j} \mu(g_{ij}(P_j)) = \sum_{i\mapsto j} \int_{P_j} |g'_{ij}|^\delta d\mu \ge \sum_j S_{ij}^\delta \mu(P_j) = (S^\delta \boldsymbol{m})_i$$

を得る。逆向きの不等式も同様である。

式(3.1) と付録の定理 4.4 を用いると

$$\lambda(S^\delta) \le 1 \le \lambda(U^\delta)$$

が結論できる。(式(3.1) より $\|U^\delta\| \geq 1$ が分かるから $1 \leq \lambda(U^\delta)$ は明らかであるが、他方の不等式には非負値行列の一般論を用いる必要がある。)

さて、f は C^2 級であるから $i \mapsto j$ に対して

$$U_{ij}/S_{ij} = 1 + O(\max_{i\in I} \mathrm{diam}_\sigma(P_i))$$

となる。従って、定数 $\beta > 0$ を $\xi^\beta S^\delta \geq U^\delta$ となるように取ることが出来るが、ここで $\xi^\beta = e^{\beta \log \xi} = 1 + \beta \log \xi + O(\beta^2)$ だから $\beta = O(\max_i \mathrm{diam}_\sigma(P_i))$ に取れることに注意しておく。

ここで $T_{ij} \leq \xi^{-1}$ だから

$$T^{\delta-\beta} \geq \xi^\beta T^\delta \geq \xi^\beta S^\delta \geq U^\delta$$

が得られる。よって付録の補題 4.1 より $\lambda(T^{\delta-\beta}) \geq \lambda(U^\delta) \geq 1$ が言える。一方、

$$T^{\delta+\beta} \leq \xi^{-\beta} T^\delta \leq \xi^{-\beta} U^\delta \leq S^\delta$$

だから同様に $\lambda(T^{\delta+\beta}) \leq \lambda(S^\delta) \leq 1$ が言える。この二つの不等式から $\delta + \beta \leq \alpha \leq \delta - \beta$ を得る。従って

$$|\alpha(\mathcal{P}) - \delta| \leq \beta = O(\max_i \mathrm{diam}_\sigma(P_i))$$

が得られる。この最後の評価から、$\mathcal{P}$ の代わりに $\mathcal{R}^n(\mathcal{P})$ を適用すれば命題 2.2 から $|\alpha_n - \delta| = O(\xi^{-n})$ であることも従う。

次に一般に σ ではなく滑らかな計量 ρ に関して ξ-拡大的である場合に示す。このときは上の T_{ij} の代わりに

$$\widetilde{T}_{ij} = |g'_{ij}(x_i)|_\rho = |f'_i(y_{ij})|_\rho^{-1} = \frac{\rho}{\sigma}(y_{ij})\frac{\sigma}{\rho}(x_j)T_{ij}$$

を適用すれば式(2.3) が成り立つことに注意すると先と同様の議論が出来るので $\tilde{\alpha}(\mathcal{P})$ を $\lambda(\widetilde{T}^\alpha) = 1$ の解とすればこれにいて同様に $|\tilde{\alpha}(\mathcal{P}) - \delta| = O(\max_i \mathrm{diam}_\sigma(P_i))$ という評価が得られる。一方、分割が細かくなれば $y_{ij} \approx x_i$ (正確に言えば n 回目の分割に対しては $y_{ij} = x_i + O(\xi^{-n})$) となるので M を m 次の対角行列で対角成分 $M_{ii} = \rho/\sigma(x_i)$ を持つものとすると $\widetilde{T} \approx MTM^{-1}$ となる。これより $\alpha = \alpha(\mathcal{P})$ に対して

$$\lambda(\widetilde{T}^\alpha) = \lambda(M^\alpha T^\alpha M^{-\alpha}) + O(\xi^{-n}) = \lambda(T^\alpha) + O(\xi^{-n}) = 1 + O(\xi^{-n})$$

が得られる。$\widetilde{T}_{ij} < \xi^{-1}$ だからこのことから $\tilde{\alpha}(\mathcal{R}^n(\mathcal{P})) = \alpha(\mathcal{R}^n(\mathcal{P})) + O(\xi^{-n})$ が従う。よって $\alpha(\mathcal{R}^n(\mathcal{P}))$ も同様に n について指数オーダーで δ に収束することが分かる。

注意　実際に計算に必要となるテクニックについていくつか指摘しておく。

(a) まず、実際の計算ではいくつかサンプル点 x_i を決めて後は f_i や $|f_i'|$ の値を計算していくだけでよい。ブロック全体をデータ化する必要はない。

(b) 応用上は遷移行列 T が primitive, つまりある整数 k に対して $T^{\circ k} > 0$ となることが多い。この場合は Perron-Frobenius 理論（定理 4.3）から任意のノルム 1 の正値ベクトル $\boldsymbol{x} > 0$ に対して T^α を施して正規化するという操作を繰り返せば最大固有値に対応する固有ベクトルに収束していく。従ってこれにより固有値の近似値が得られる。近似の程度がどのくらい良いかは付録の系 4.4 が判断材料となるであろう。後は $\lambda(T^\alpha) = 1$ を求めるには Newton 法や補間を用いればよい。

(c) 計算の効率はブロックのサイズがだいたい同じである時にほぼ最大となると思われるのでブロックはそのように選ぶのが望ましい。

(d) 実際上は $P_i \subset \mathbb{R}^n$ となるように出来ることが多いので、この場合は上の証明の最後にも示唆されているように球面計量でなく通常の Euclid 計量での Jacobian を用いて計算してよい。

4 付録：非負値行列について（Perron-Frobenius 理論入門）

この節では本文中で必要であった非負値行列に関する結果について簡単に紹介しておく。参考書として [1] を挙げておくが、ここでは適当にアレンジして必要最小限のことを証明付きで述べておくことにしよう。

$A = (A_{ij})$ を m 行 l 列行列とする。ここでは各成分 A_{ij} が非負値であるときにこの行列 A を**非負値**であると言うことにし、これを $A \geq 0$ で表す。また、各成分が正値であるときにこの行列を**正値**であると言い、これを $A > 0$ で表す。（通常の 2 次形式の理論における用語とは異なることに注意せよ。）

一般に同じサイズの実行列 A, B について $A - B$ が非負値または正値であるときに $A \geq B$ または $A > B$ と表すことにする。複素数値行列 $C = (C_{ij})$ に対して $C^+ = (|C_{ij}|)$ と表記することにする。また、全ての成分が 1 であるような m 行 l 列の行列を特に $\mathbf{1}_{ml}$ と表し $\mathbf{1}_m = \mathbf{1}_{mm}$ と略記する。m 次正方単位行列は $E = E_m$ で表す。

また非負値 m 次正方行列 $A = (A_{ij})$ 及び実数 $\alpha \geq 0$ に対して A^α は A_{ij}^α を成分に持つ行列とする。通常の行列の積に関するべきはここでは $A^{\circ k}$ のように表すことにする。

まず次の簡単な補題を示しておく。

補題 4.1 正方行列 $0 \leq A \leq B$ に対して $\lambda(A) \leq \lambda(B)$ が成り立つ。また任意のスカラー c に対して $\lambda(cA) = |c|\lambda(A)$ が成り立つ。

Proof. まず仮定より $0 \leq A^{\circ k} \leq B^{\circ k}$ だから $\|A^{\circ k}\| \leq \|B^{\circ k}\|$ が任意の自然数 k について成り立つ。よってスペクトル半径の表示式 $\lambda(T) = \lim_{k\to\infty} \|T^{\circ k}\|^{1/k}$ より前

半の主張は明らかである。後半の主張は自明。 ■

補題 4.2 **$\xi > 1$ を定数として O でない m 次正方行列 A が $0 \le A \le \xi^{-1}\mathbf{1}_m$ を満たしているとするとスペクトル半径 $\lambda(A^\alpha)$ は $\alpha \ge 0$ に関して狭義単調減少函数であり $\alpha \to \infty$ の時 $\lambda(A^\alpha) \to 0$ となる。**

Proof. $\beta = \alpha + \varepsilon > \alpha$ とすると $A^\beta \le \xi^{-\varepsilon} A^\alpha$ だから先の補題より $\lambda(A^\beta) \le \xi^{-\varepsilon}\lambda(A^\alpha) < \lambda(A^\alpha)$ を得る。この評価より結論が従う。 ■

ここで少し記号を導入しておく。$C = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m \setminus \{\mathbf{0}\}; \boldsymbol{x} \ge 0\}, C^\circ = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m; \boldsymbol{x} > 0\}$ とする。また $S = \{\boldsymbol{x} \in C; |\boldsymbol{x}| = 1\}, S^\circ = S \cap C^\circ$ とおいておく。また m 次正方非負値行列 A と $\boldsymbol{x} = (x_i) \in C$ に対して $r_{\boldsymbol{x}}$ 及び $r^{\boldsymbol{x}}$ を $A\boldsymbol{x} \ge \rho\boldsymbol{x}$ 及び $A\boldsymbol{x} \le \rho\boldsymbol{x}$ を満たす数 $\rho \ge 0$ の最大値及び最小値とする。すなわち $I(\boldsymbol{x}) = \{1 \le i \le m; x_i > 0$ または $(A\boldsymbol{x})_i > 0\}$ として

$$r_{\boldsymbol{x}}(A) = r_{\boldsymbol{x}} = \min_{i \in I(\boldsymbol{x})} \frac{(A\boldsymbol{x})_i}{x_i}, \quad r^{\boldsymbol{x}}(A) = r^{\boldsymbol{x}} = \max_{i \in I(\boldsymbol{x})} \frac{(A\boldsymbol{x})_i}{x_i}$$

と定める。作り方から明らかに $0 \le r_{\boldsymbol{x}} \le r^{\boldsymbol{x}} \le \infty$ である。また $0 \le A \le B$ ならば $r_{\boldsymbol{x}}(A) \le r_{\boldsymbol{x}}(B), r^{\boldsymbol{x}}(A) \le r^{\boldsymbol{x}}(B)$ などにも注意しておこう。

次の定理は主に Perron によって示されたものだが、その後 Frobenius によって irreducible な非負値行列についても同様に成り立つことが示された。

定理 4.3 (Perron (1907)) **A を m 次正方正値行列とする。このとき**

$$\lambda(A) = \max_{\boldsymbol{x} \in C} r_{\boldsymbol{x}} = \min_{\boldsymbol{x} \in C} r^{\boldsymbol{x}} \tag{4.1}$$

が成り立つ。さらに $\lambda = \lambda(A)$ は実際に A の simple な固有値であり固有ベクトルは正値ベクトルに取ることが出来る。しかも非負値の固有ベクトルはこの定数倍以外には存在せず、任意の非負値ベクトル $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ に対して $A^{\circ k}\boldsymbol{x}/|A^{\circ k}\boldsymbol{x}|$ は λ に対応する唯一つの正規化された正値固有ベクトルに収束する。またさらに λ 以外の固有値の絶対値は λ より真に小さい。

Proof. まず $r^{\boldsymbol{x}}$ に最小値が存在することを示す。($r_{\boldsymbol{x}}$ についても同様なのでこちらは省略する。若干同様にいかないところもあるが、そういうところは A の転置行列を考えることによってだいたいうまくいく。[1] にはこちらについて詳しく書いてあるので参照して頂きたい。) まず函数 $r^{\boldsymbol{x}}$ は $\boldsymbol{x}$ を正数倍しても変わらないから最初から S で考えて差し支えない。S はコンパクトだから最小値の存在を言うにはこの上で $r^{\boldsymbol{x}}$ が連続であることが言えればいいが、残念ながら $S \setminus S^\circ$ においては一般には連続ではない。しかし、次のことに注意すれば最小値の存在が言える。まず A は正値だから $\mathbf{0}$ でない任意の非負値ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ は必ず正

値になる。よって$A(S) \subset C^\circ$である。一方、任意の$\boldsymbol{x} \in C$に対して$A\boldsymbol{x} \leq r^{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{x}$だから、この両辺に$A$を掛ければ$A(A\boldsymbol{x}) \leq r^{\boldsymbol{x}}A\boldsymbol{x}$だからこれより

$$r^{A\boldsymbol{x}} \leq r^{\boldsymbol{x}} \tag{4.2}$$

が従う。よって$A(S)$での$r^{\boldsymbol{x}}$の下限はSでの下限以下となり従って$A(S)$での下限がC全体での下限に等しくなる。一方、$r^{\boldsymbol{x}}$はC°においては連続だからコンパクト集合$A(S)$で最小値を取る。従ってこれがCにおける最小値となる。

さてρを$r^{\boldsymbol{x}}$の最小値として$\boldsymbol{x}_1 \in S$を最小値を達成するベクトルとすると、実はこれはρを固有値に持つ固有ベクトルとなっている。実際、もしそうでないとすれば$\rho\boldsymbol{x}_1 - A\boldsymbol{x}_1$は$\mathbf{0}$でない非負値ベクトルである。従って両辺に$A$を掛ければ$\rho A\boldsymbol{x}_1 - A(A\boldsymbol{x}_1) > 0$であることが分かり、特に$r^{A\boldsymbol{x}_1} < \rho$であることが言える。これは$\rho$の最小性に反する。従って$A\boldsymbol{x}_1 = \rho\boldsymbol{x}_1$でなければならない。$A\boldsymbol{x}_1 > 0$であるから特に$\boldsymbol{x}_1 \in S^\circ$でなければならないことも分かる。

次にμをAのλ以外の固有値とする。転置行列A'も同じ固有値を持つから対応するA'の固有ベクトルを$\boldsymbol{y}$としよう。このとき、$A'\boldsymbol{y} = \mu\boldsymbol{y}$より$|\mu|\boldsymbol{y}^+ \leq A'\boldsymbol{y}^+$となる。ここで$\boldsymbol{x}_1$との内積を考える。

$$\rho\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}^+ \rangle = \langle A\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}^+ \rangle = \langle \boldsymbol{x}_1, A'\boldsymbol{y}^+ \rangle \geq |\mu| \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}^+ \rangle \tag{4.3}$$

だからこれより$|\mu| \leq \rho$を得る。よってρは$\lambda = \lambda(A)$に他ならないことが分かった。よって(4.1)（の半分）が示された。

さらにもし$|\mu| = \rho$であるならば不等式(4.3)において等号が成り立たなければならない。従って$|\mu|\boldsymbol{y}^+ = (A\boldsymbol{y})^+ = A\boldsymbol{y}^+$でなければならないがこれは$\boldsymbol{y}$が$\boldsymbol{y}^+$の定数倍でなければ起こり得ない。よって特に$\mu = \rho$である。もし$\lambda = \rho$に対応する固有空間が2次元以上あれば適当な一次結合を作って、ある成分が0であるような固有ベクトル$\boldsymbol{y}$を構成出来る。するとこの考察から$\boldsymbol{y}^+$もρに対応する非負値固有ベクトルになるが、これは先に述べたように正値でなければならないがこれは$\boldsymbol{y}^+$のある成分が0であるということに反する。よって$\lambda = \rho$に対応するA'の固有空間は1次元であることが分かる。

また、もし$\boldsymbol{y}$が最初から非負値のベクトルとして取ることが出来るのであれば上の不等式(4.3)は$\boldsymbol{y}^+$を$\boldsymbol{y}$に替えて等号で成り立つはずである。従って$\mu = \rho = \lambda$でなければならない。

これらの考察はA'に対して行ったものだが、AとA'の役割を交換してやれば同様のことがAに対しても成り立つことが分かる。特に非負値の固有ベクトルの方向は一つしか存在しないので、その正値固有ベクトルを長さ1に正規化しておけば唯一つに定まる。それを以下では$\boldsymbol{x}_1$と書くことにしよう。

λに対応する固有空間が1次元であることは分かったが、実際にλが単純 (simple) であることを言うためにはλに対応する弱固有空間の次元が1であることを言わなければならない。これは次のような考察から直観的に理解できるであろう。もしそうでないとしてみよう。つまりAの固有多項式$F_A(t)$がλを重根に持つとする。するとAに収束する正値行列の列A_nで固有多項式がともにλに近づくよう

な相異なる2つの実根の組 λ_n, μ_n を持つものが取れる。固有多項式、従ってその根は行列の係数に関して連続に動くから $\lambda(A_n) \to \lambda$ であることに注意する。従って $\lambda_n = \lambda(A_n)$ としてもよい。λ_n, μ_n に対応する長さ1の実固有ベクトルを $\boldsymbol{y}_n, \boldsymbol{z}_n$ としよう。$\boldsymbol{y}_n$ は正値に取っておける。すると $\boldsymbol{y}_n$ と $\boldsymbol{z}_n$ で張られた部分ベクトル空間は A の固有値 λ に対応する弱固有空間のある部分ベクトル空間に収束するとしてよいが、この固有空間が縮退していることから、$\boldsymbol{y}_n$ と $\boldsymbol{z}_n$ とは同じ直線上に収束していくはずである。ここで $\boldsymbol{y}_n$ は正値ベクトル $\boldsymbol{x}_1$ に収束していくので $\boldsymbol{z}_n$ または $-\boldsymbol{z}_n$ もいずれは正値ベクトルになるはずである。ところが、上に見たように正値な固有ベクトルは高々1次元しか存在しないのでこれは矛盾である。(以上は直観的な証明だが、代数的には A の固有多項式の導函数に λ を代入したものが実際に0にならないことを直接見てやればよい。これについては [1] を参照のこと。)

最後に $\boldsymbol{x}$ を任意の正値ベクトルとして $\boldsymbol{y}_k = A^{\circ k}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}_k = \boldsymbol{y}_k/|\boldsymbol{y}_k|$ として $\boldsymbol{z}_k \to \boldsymbol{x}_1$ となることを示す。まず $r_k = r^{\boldsymbol{y}_k} = r^{\boldsymbol{z}_k}$ としよう。すると(4.2) より $r_1 \geq r_2 \geq \cdots$ である。そこで $r_\infty = \lim_k r_k$ とおこう。$\boldsymbol{z}_k \in A(S)$ であり $A(S)$ はコンパクトであることに注意する。$\boldsymbol{z}_k$ の極限点の一つを $\boldsymbol{z}$ として $\boldsymbol{z} = \lim_{j\to\infty} \boldsymbol{z}_{k_j}$ とする。(ここに k_j は $\mathbb{N}$ の部分列とする。) すると構成の仕方から明らかに $r^{A\boldsymbol{z}} = r^{\boldsymbol{z}} = r_\infty$ である。従って特に $r_\infty \boldsymbol{z} - A\boldsymbol{z} \geq 0$ が成り立つ。ここでもしこれが等号でなければ A は正値行列だから両辺に A をかければ $r_\infty A\boldsymbol{z} > A(A\boldsymbol{z})$ を得る。これより $r^{A\boldsymbol{z}} < r_\infty$ が従うが、これは矛盾である。よって $A\boldsymbol{z} = r_\infty \boldsymbol{z}$ でなければならない。正値の固有ベクトルの一意性から $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}_1$ が従う。極限点が $\boldsymbol{x}_1$ のみということはすなわち $\lim_k \boldsymbol{z}_k = \boldsymbol{x}_1$ であるということである。よって主張が示された。 ■

注意 上記で $\boldsymbol{z}_k$ の $\boldsymbol{x}_1$ への近づき方であるが以下に見るように指数オーダーで近づく。つまり $\boldsymbol{x} \in S$ に対して $\boldsymbol{z} = A\boldsymbol{x}/|A\boldsymbol{x}|$ を対応させる写像 $F : S \to S$ と書けば $\boldsymbol{x}_1$ が一般には吸引的不動点になっている。実際にはもう少し弱く、F の何回かの逐次合成について $\boldsymbol{x}_1$ が吸引的不動点になることが示される。多様体 S の点 $\boldsymbol{x}_1$ における接空間は自然に $H = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m; \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_1 \rangle = 0\}$ と同一視される。すると直接計算から分かるように F の点 $\boldsymbol{x}_1$ における微分は

$$L(\boldsymbol{x}) = d_{\boldsymbol{x}_1}F(\boldsymbol{x}) = \lim_{t\to 0} \frac{F(\boldsymbol{x}_1 + t\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x}_1}{t} = \frac{1}{\lambda}(A\boldsymbol{x} - \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_1 \rangle \boldsymbol{x}_1)$$

となる。一般に $L : H \to H$ の作用素ノルムが1よりも小さいかどうかは分からないが、少なくとも十分大きな n を取れば $\|L^{\circ n}\| < 1$ であることが分かる。実際、もし A が対角化可能であるときは A の固有値を $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ としてそれぞれに対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_m$ とする。ここで $j > 1$ に対しては $|\lambda_j| < \lambda$ であることに注意せよ。すると任意の $\boldsymbol{x} \in H$ は $\boldsymbol{x} = t_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + t_m\boldsymbol{x}_m$

(ただし $t_j \in \mathbb{C}$) と書ける。よって

$$\begin{aligned} d_{\boldsymbol{x}_1} F^{\circ n}(\boldsymbol{x}) &= \frac{1}{\lambda^n}(A^{\circ n}\boldsymbol{x} - \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_1 \rangle \boldsymbol{x}_1) \\ &= t_1\boldsymbol{x}_1 + \sum_{j=2}^{m} t_j(\lambda_j/\lambda)^n \boldsymbol{x}_j - t_1\boldsymbol{x}_1 - \sum_{j=2}^{m} t_j(\lambda_j/\lambda)^n \langle \boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{x}_1\rangle \boldsymbol{x}_1 \\ &= \sum_{j=2}^{m} t_j(\lambda_j/\lambda)^n (\boldsymbol{x}_j - \langle \boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{x}_1\rangle \boldsymbol{x}_1) \end{aligned}$$

となりこれは $n \to \infty$ としたとき $|\boldsymbol{x}| = 1$ の範囲では一様に $\mathbf{0}$ に収束する。よって十分大きな n に対して $\|L^{\circ n}\| < 1$ と出来る。

一般に対角化可能でない場合には Jordan 標準形を用いて同様の議論を行えばよい。ただし、その場合は少なくとも固有値 λ に対応するブロックはべき零

次に一般に非負値の行列に関する結果を述べよう。

定理 4.4 **A を O でない非負値 m 次正方行列とする。これに対して**

$$\lambda = \lambda(A) = \max_{\boldsymbol{x} \in C} r_{\boldsymbol{x}} = \inf_{\boldsymbol{x} \in C^\circ} r^{\boldsymbol{x}}$$

が成り立つ。またこの λ は実際に A の固有値であり固有ベクトルは非負値に取ることが出来る。

Proof. まず例えば $A_n = A + \varepsilon_n \mathbf{1}_m, \varepsilon_n \to +0$ などを考えて A を正値行列で上から近似する。固有多項式は行列の成分に関して連続であるから $\lambda(A_n) \to \lambda(A)$ となっている。ここで $\boldsymbol{x}_n \in S^\circ$ を A_n の一意的な正値固有ベクトルとする。S はコンパクトだから適当な部分列を取れば $\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x}_0$ と出来る。この $\boldsymbol{x}_0$ は明らかに $\lambda = \lambda(A)$ に対応する非負値固有ベクトルである。ここで $\boldsymbol{x} \in C^\circ$ を固定すると、$n \to \infty$ の時明らかに $r^{\boldsymbol{x}}(A_n) \to r^{\boldsymbol{x}}(A)$ が成り立つ。定理 4.3 より $\lambda(A_n) \le r^{\boldsymbol{x}}(A_n)$ だから $\lambda \le r^{\boldsymbol{x}}(A)$ を得る。一方、$A < A_n$ だから $r^{\boldsymbol{x}}(A) \le r^{\boldsymbol{x}}(A_n)$ が従う。よって $\boldsymbol{x} \in C^\circ$ について下限を取れば $\inf_{C^\circ} r^{\boldsymbol{x}}(A) \le \lambda(A_n)$ を得る。ここで $n \to \infty$ とすれば $\inf_{C^\circ} r^{\boldsymbol{x}}(A) \le \lambda$ が言える。これにて $r^{\boldsymbol{x}}$ に関する主張が示された。

次に $r_{\boldsymbol{x}}$ に関する式を示そう。まず $A < A_n$ より $r_{\boldsymbol{x}}(A) \le r_{\boldsymbol{x}}(A_n)$ であるからこれより容易に $\sup r_{\boldsymbol{x}}(A) \le \lambda = \lambda(A)$ が得られる。一方、λ に対してある $\boldsymbol{x} \in C$ が存在して $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ となるからこの $\boldsymbol{x}$ について $r_{\boldsymbol{x}}(A) = \lambda$ となっている。よって実際に等号が成り立つ。 ■

系 4.5 **特に任意の $\boldsymbol{x} = (x_i) \in C^\circ$ に対して評価式**

$$\min_i \frac{(A\boldsymbol{x})_i}{x_i} \le \lambda(A) \le \max_i \frac{(A\boldsymbol{x})_i}{x_i} \tag{4.4}$$

が成り立つ。

注意 定理 4.4 において上限及び下限での範囲 C 及び C° をそれぞれ C° 及び C にすることは一般には出来ない。例えば $0 < \mu < \lambda$ として行列

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

を考えれば $\lambda(A) = \lambda$ であるが $\inf_{\boldsymbol{x} \in C} r^{\boldsymbol{x}} = \sup_{\boldsymbol{x} \in C^\circ} r_{\boldsymbol{x}} = \mu < \lambda$ となり上の式は成り立たない。

参考文献

[1] Grantmacher, F. R. *The Theory of Matrices, volume II*, Chelsea (1959).

[2] McMullen, C. Hausdorff dimension and conformal dynamics II: Geometrically finite rational maps, preprint (1997).

[3] Sullivan, D. Entropy, Hausdorff measures new and old and limit sets of geometrically finite Kleinian groups, *Acta Math.*, **153** (1984), 259–277.