数理解析研究所講究録
1087巻 1999年 21-25

極限集合とジュリア集合の関数論的性質について

東工大・理　志賀　啓成
Hiroshige SHIGA

1　はじめに

クライン群の極限集合と複素力学系におけるジュリア集合がよく似た形状であることは，コンピュータグラフィックスなどによる実験で知られている．ここでは，これらの解析的な性質（Martin コンパクト化と函数論的零集合の性質）に注目して，その類似性を検証する．扱う対象は conical limit set と radial Julia set である．この両者に関しては既に McMullen によって，Hausdorff 次元の研究でその類似性が確認されている．

2　準備

2.1　Martin 境界

まず，Martin コンパクト化について述べる．

R を Green 関数が存在するような Riemann 面とする．$q \in R$ を極に持つ R 上の Green 関数 $G(\cdot, q)$ に対して

$$k(p,q) = \frac{G(p,q)}{G(a,q)}$$

とする．ここに，$a \in R$ は R 内に固定された点である．$k(p,q)$ は q を固定して p の関数と見たとき $R-\{q\}$ で正値調和である．点列 $\{q_n\} \subset R$ が理想境界に収束するとき，($k(a,q_n)=1$ に注意）部分列を取れば $\{k(\cdot,q_n)\}$ は R 上の正値調和函数に収束する．理想境界に収束する点列を $\{k(\cdot,q_n)\}$ の収束先が一致する同値関係で分類して R のコンパクト化を得る．これを R の Martn コンパクト化といい，R^M と書くことにする．また，その境界 $R^M - R$ を Martin 境界といい，$\Delta(R)$ と書くことにする．

境界の各点 $q \in \Delta(R)$ に対して $k_q(\cdot) = k(\cdot, q)$ は R 上の正値調和函数になるが，これが minimal であるような点を minimal point と呼び，そ

の全体を $\Delta_1(R)$ で表す．Martin 境界，及び minimal points の重要性は次の Martin の基本定理にある．

定理 2.1 R 上の任意の正値調和函数 u に対して，$\Delta_1(R)$ 上の測度 μ が一意的に存在して

$$u(p) = \int_{\Delta_1(R)} k_q(p) d\mu(q)$$

が成立する．

また，Martin のコンパクト化は次のようによい性質を持っている．

定理 2.2 R^M は距離付け可能である．単位円板 D の *Martin* コンパクト化 D^M はユークリッド空間での閉包 $\bar{D}$ に等しい．

R が平面領域であるとき，その（平面位相での）境界点 $p \in \partial R$ 上の $\Delta(R)$，$\Delta_1(R)$ の点の個数（濃度）をそれぞれ $\dim \Delta(p)$，$\dim \Delta_1(p)$ とあらわすことにする．

2.2 函数論的零集合

定義 2.1 E を複素平面内の *totally disconnected* なコンパクト集合とする．$\zeta \in E$ が E に関し *weak* であるとは，$\mathbf{C} - E$ で定義された任意の等角写像 f に対し，f が ζ に極限値を持つときをいう．

totally disiconnected なコンパクト集合で各点が weak でないものが存在することが知られている．次のことは容易に分かる．

補題 2.1 $E \subset \mathbf{C}$ に対し $\zeta \in E$ が *weak* ならば，$\mathbf{C} - E$ で定義された任意の擬等角写像 w に対し w は ζ で極限を持つ．

証明． $\mathbf{C}$ 上の Beltrami 微分 μ で $f = w^\mu \circ w$ が $\mathbf{C} - E$ で等角になるものが存在する．ここに，w^μ は μ を Beltrami 係数に持つ $\mathbf{C}$ 上の擬等角写像である．weakness の定義より f は ζ で極限値を持つ．したがって，$w = (w^\mu)^{-1} \circ f$ も ζ で極限値を持つ．

2.3 conical limit set と radial Julia set

記号． Klein 群 Γ に対してその不連続領域を $\Omega(\Gamma)$，極限集合を $\Lambda(\Gamma)$ とかく．また，有理函数 f に対して．Fatou 集合を $F(f)$，ジュリア集合を $J(f)$ とかく．

初めに conical limit point の定義を述べる．

定義 2.2 Γを上半平面$\mathbf{H}$に作用する*Fuchs*群とする．Γの極限点$x \in \Lambda(\Gamma)$が*conical limit point*であるとは，$\mathbf{H}$内の任意の点zに対してxを頂点に持つ$\mathbf{H}$内の*cone* Sが存在して，zのΓ-*orbit*でS内からxに収束するものがとれるときをいう．

例えば，双曲型変換の固定点はconical limit pointではあるが，放物型変換の固定点はconical limit pointではない．

一般に次のことが知られている．

定理 2.3 Γが有限生成*Fuchs*群であるときΓの極限集合$\Lambda(\Gamma)$は放物型変換の固定点と*conical limit points*からなる．

radial limit setの定義を述べる．

定義 2.3 任意の$r > 0$に対して，有理函数fのジュリア集合$J(R)$の点xが$J_{rad}(f, r)$に属するとは，任意の$\epsilon > 0$に対して直径がϵ以下のxの近傍Uと自然数nが存在して，f^nのUの制限がUから$\Delta(f^n(x), r)$の上への同相写像になっているときをいう．ここに，$\Delta(a, r)$は点a中心，半径rの開円板をあらわすものとする．

Rの radial Julia set $J_{rad}(f)$は

$$J_{rad}(f) = \cup_{r>0} J_{rad}(f, r)$$

で定義する．

3 不連続領域のMartin 境界・weakness

リーマン面Rがクライン群の不連続領域であるときに，そのMartin境界を考える．まず，Fuchs群の場合を考える．ΓをFuchs群とする．Γが第一種ならば定理2からその不連続領域のMartinコンパクト化はよく分かっている．したがって，(非初等的) 第二種Fuchs群 の場合が問題である．

定理 3.1 Λを非初等的第二種 *Fuchs*群Γ極限集合とする．$p \in \Lambda$がΓの放物的固定点ならば，$\dim \Delta_1(p) = 2$である．また，pが*conical limit point*ならば，$\dim \Delta(p) = \dim \Delta_1(p) = 1$である．

weaknessに関しては次のことが証明される．

定理 3.2 Λを非初等的第二種 *Fuchs*群Γ極限集合とする．$p \in \Lambda$がΓの*conical limit point*ならばpは*weak*である．

4 Fatou 集合の Martin 境界・weakness

リーマン面 R が有理関数 f の Fatou 集合であるときに，その Martin 境界を考える．

定理 4.1 $J_{rad}(f)$ の任意の点 p に対して $\dim \Delta(p) = 1$ である．

weakness に関しても次が成立する．

定理 4.2 $J_{rad}(f)$ の任意の点 p は $F(f)$ に関して *weak* である．

もっと具体的には次のことが成立している．

定理 4.3 $P_c(z) = z^2 + c$ とする．$c \in \mathbf{C}$ がマンデルブロー集合の外部の点であるとき，P_c の *Fatou* 集合 $F(P_c)$ の *Martin* コンパクト化は $\hat{\mathbf{C}}$ に等しい．更に，任意の擬等角写像 $w : \hat{\mathbf{C}} \to \hat{\mathbf{C}}$ に対して $w|F(P_c)$ は $F(P_c)^M$ から $w(F(P_c))^M$ への同相写像に拡張される．

定理 4.4 前定理において，$P_c(z)$ の代わりに *Julia* 集合が非連結であるような有限 *Blaschke* 積 $B(z)$ を考える．$p \in J(B)$ が B の放物型固定点およびその *bachward orbits* でもないとき，$\dim \Delta(p) = 1$ である．

さらに，一般に $J(B)$ の *linear measure* は 0 である．よって，$J(B)$ の近傍で定義された有界正則函数は $J(B)$ にまで正則に延長される．

5 証明の概略

上記定理達の証明は，Martin 境界については [?] で与えられた判定法を用い，weakness に関しては古典的な modular test による判定法を用いる．いずれも，与えられた境界点に nest するある条件を持った annuli の列の存在を確認することによって証明する．

実際，conical limit point の場合は比較的単純な双曲幾何の論法を用いて存在が示される．

最後の Blaschke 積の部分は，実際に $J(B)$ の調和測度 $\omega_{J(B)}$ が 0 であることを示す．まず，$J(B)$ が backward invariant であることを用いて，$\omega_{J(B)}$ の保型性を導く．するとこれが B の grand orbit の作るリーマン面の有限型部分領域の調和函数と見なせることが確認できる．構成法から，相対境界で 0 になるので，調和函数の最大値の原理から $\omega_{J(B)} = 0$ が結論される．

参考文献

[1] L. Carleson and T. W. Gamelin, *Complex Dynamics*, Springer-Verlag, 1993.

[2] C. Constantinescu and A. Cornea, *Ideale Ränder der Riemannschen Flächen*, Springer, 1963.

[3] S. Segawa, *Martin boundary of Denjoy domains and quasiconformal mappings*, J. Math. Kyoto Univ., 1990, 297–316.