数理解析研究所講究録
1091巻 1999年 298-307

3次のテータ・ワイル和

(A CANDIDATE FOR CUBIC THETA-WEYL SUMS)

中井喜信 (山梨大学教育人間科学部)
(Yoshinobu Nakai (Y.-N. Nakai))

Waringの問題その他で登場するWeyl和(及び指数和)について、実2次多項式のWeyl和については、ϑ-級数との比較をしつつ、Poissonの和公式から(あるいはEulerの和公式から)得られるvan der Corputの方法により、数論的に明示的な表示が得られる。([7-1], [7-4]の第2章, [1]など)。当然、3次以上の多項式について、何らかのϑ-級数的な性質が取り出せないかとの試みは、古来、散発的にあるいは、ある一定の性格をもつ方向に、あるいは、困難さを示唆するものとして、現れてきた。([6], [8]; [3], [4], [9]; [5], [7-6], [11]など)。指数和を扱う3通りの方法(Hardy-Littlewood-Weyl, van der Corput, I.M. Vinogradovの方法)のうち、van der Corputの方法は、まだ、高次の多項式には開発が不十分でその方向を追求すべき旨を[7-3]で示唆した。筆者は、[7-9]([7-5], [7-7])において、「3次のテータ・ワイル和」と称すべきものを見出したが、変換$\begin{pmatrix}1&-a\\0&1\end{pmatrix}$ $(a\in\mathbb{Z})$に対応する形は、どれを採用すべきか、背後にあるものがまだ見えず、ここで中間報告を行

うことにする。([7−8]). 後述の式の中の $+O_\alpha(X^{-1})$ や $+O_{\alpha,\varepsilon,k}(X^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$ 等の implied constant は，最終的にはすべて明示的にすべきであるが，すべて routine works の範囲内の事にて趣旨は御理解いただけるであろう。([7-2] の時の下計算の手法)

1° $\underline{\text{3次の連分数展開}}$ ([7-5], [7-7])

良く知られているように，実数の正則連分数展開は，通常のテータ級数，つまり2次式の(あるいは2次形式の)指数和に対応するものと見て，今から述べる連分数展開を"3次の"連分数展開と呼ぼう。後述の3次のテータ・ワイル和の変換から3次の展開は，他の形は期待できない。(なお，ここでは [7-5] に書いた時の形のまま述べるが，[7-1] のように $\alpha'>2$，$\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} = a' + \varepsilon''\alpha''^{-1}$ ($a'\in\mathbb{N}$, $\varepsilon''=\pm1$, $\alpha''>2$) の形で書く方が良い。)

実数 $\alpha\in\mathbb{R}$ に対し，初期変形として

$$\alpha = a_{-1}+\varepsilon_{-1}\alpha_0 \quad (\varepsilon_{-1}=\pm1,\ a_{-1}\in\mathbb{Z},\ \tfrac{1}{2}>\alpha_0>0)$$

として，以下，α_0 から

$$\frac{1}{\sqrt{2\alpha_n}} = a_n + \varepsilon_{n+1}\alpha_{n+1} \quad (\varepsilon_{n+1}=\pm1,\ a_n\in\mathbb{N},\ \tfrac{1}{2}>\alpha_{n+1}>0)$$

を作り (今は途中で終る場合は述べない) (ここで ε_{-1} の代りに $\varepsilon_0=1$ になおれと思う)

$$\alpha_0 = \cfrac{1}{2\left(a_0+\cfrac{\varepsilon_1}{2\left(a_1+\cfrac{\varepsilon_2}{2\left(a_2+\cdots+\cfrac{\varepsilon_{n-1}}{2\left(a_{n-1}+\cfrac{\varepsilon_n}{2(a_n+\varepsilon_{n+1}\alpha_{n+1})^2}\right)^2}\right)^2}\right)^2}\right)^2}$$

$$= \cfrac{1}{2\left((\varepsilon_1 a_0) + \cfrac{1}{2\left((\varepsilon_2 a_1) + \cdots + \cfrac{1}{2\left((\varepsilon_k a_{k-1}) + \cfrac{1}{2\left((\varepsilon_{k+1} a_k) + \alpha_{k+1}\right)^2}\right)^2}\right)^2}\right)^2}$$

として

$$\cfrac{1}{2\left(x_0 + \cfrac{1}{2\left(x_1 + \cdots + \cfrac{1}{2\left(x_{k-1} + \cfrac{1}{2x_k^2}\right)^2}\right)^2}\right)^2} = \frac{p_k(x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}, x_k)}{q_k(x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}, x_k)}$$

$$= \frac{p_k}{q_k}(x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}, x_k)$$

（形式的に通常の分数式に直したものの分母，分子）

により

（$p_k(x_0, x_1, \cdots x_k) = q_{k-1}^2(x_1, \cdots, x_k)$ となる）

$$\frac{p_k}{q_k}(\varepsilon_1 a_0, \varepsilon_2 a_1, \cdots, \varepsilon_k a_{k-1}, \varepsilon_{k+1} a_k)$$

を"近似分数"と呼ぶ。略記のために

$$\frac{p_{0k}}{q_{0k}} = \frac{p_k}{q_k}(\varepsilon_1 a_0, \cdots, \varepsilon_{k+1} a_k) \quad (= \alpha_{0k}), \qquad \frac{p_{jk}}{q_{jk}} = \frac{p_{k-j}}{q_{k-j}}(\varepsilon_{j+1} a_j, \cdots, \varepsilon_{k+1} a_k) \quad (= \alpha_{jk}),$$

$$\hat{q}_{j,k+1} = q_{(k+1)-j}\left(\varepsilon_{j+1} a_j, \cdots, \varepsilon_{k+1} a_k, (\varepsilon_{k+2}\alpha_{k+1})^{-1}\right)$$

とおくと　（[7-5], [7-7] いずれも、細い書き換えによる）

$$\alpha_0 - \frac{p_{0k}}{q_{0k}} = \left((-1)^{k+1} \operatorname{sgn}(\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_{k+1}) \times \left(\frac{\alpha_{k+1}}{8}\right)^{\frac{1}{4}} \times \left(\left(2 \cdot \frac{\prod_{j=1}^{k} 2q_{jk}}{q_{0k}}\right) \cdot \left(2 \frac{\prod_{j=1}^{k+1} 2 \cdot \hat{q}_{j,k+1}}{\hat{q}_{0,k+1}}\right)\right)^{\frac{3}{4}} \times \prod_{j=0}^{k} \sqrt{1 + \frac{1}{16}\sqrt{\left(2 \cdot \frac{p_{jk}}{q_{jk}}\right) \cdot (2\alpha_j)} \times \left(2\alpha_{j+1} - 2 \cdot \frac{p_{j+1,k}}{q_{j+1,k}}\right)^2} \right)$$

及び

$$2\alpha_j \cdot 2\alpha_{j+1} < \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$q_j \longrightarrow +\infty$$

$$\left(\frac{2 \cdot \prod_{j=1}^{k} 2q_{jk}}{q_{0k}}\right) = \prod_{j=1}^{k} 2\alpha_{jk}$$

等が判る。"最良近似"や"3次無理数"との関連などは未考

である。文献[12]の"分岐型連分数"とも関連しているが十分には調べてない。

2° <u>3次のテータ・ワイル和のvan der Corput型の反転関数</u>

Van der Corput の方法そのものは [10] の第4章や [2] に詳しい。いま、実数値関数 $f(x)$ は、C^2-級で、f' は狭義単調とする。y に対し、x_y を $f'(x_y)=y$ で定める。f の van der Corput 型の反転関数を $g(y)=f(x_y)-y\cdot x_y$ で定める。($\frac{d}{dy}g(y) = -x_y$ である)。

例えば、$f(x)=\frac{h-1}{h}\alpha\cdot x^h$ ならば $g(y) = -\frac{h-1}{h}\cdot\frac{y^{\frac{h}{h-1}}}{\sqrt[h-1]{(h-1)\alpha}}$ となり、$h=2$ の時のみ g も y についての2次式になるが、$h\neq 2$ では、そうならず、本来、「3次のテータ級数」を得るのは、素直には出来ない、た次第である。

ここでは、次のように考える。まず $X\in\mathbb{R}$, $X\to\infty$, $0<N\ll X$ とし、$k\in\mathbb{N}$ (induction用)について、k変数の関数 $F(\xi_1,\dots,\xi_k)\in C^\infty(\mathbb{R})$ $\left(|\xi_1|,\dots,|\xi_k|\ll\frac{1}{X}\right)$, $F(0,\dots,0)=1$, $(\xi)=(\xi_1,\dots,\xi_k)$ とし。(Fはkに応じて変化してよく)

次に、和をとるための変数 $x\in\mathbb{N}$ $(X<x\le X+N)$ は、いつも、$x=x'^2+x''$; $x'\in\mathbb{N}$, $x''\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $x'^2\le x'^2+x''<(x'+1)^2$ (i.e. $0\le x''\le 2x'$) と分解し、x' が本物の変数、x'' は x' に附随する局所的変数と見る。実数 $\xi_1,\dots,\xi_k$ を

$|\zeta_j| \ll X$　$(\zeta) = (\zeta_1, \dots, \zeta_k)$ として，実数 α $\left(\frac{1}{2} > \alpha > 0\right)$ につき

$$f(x') = \frac{2}{3}\cdot\alpha\cdot x^{\frac{3}{2}}\cdot F\left(\frac{\zeta_1}{x}, \dots, \frac{\zeta_k}{x}\right) \quad \left(\begin{array}{l} x' \text{が未知の変数} \\ x'', \zeta_1, \dots, \zeta_k \text{はパラメーター扱} \end{array}\right)$$

とおく．一緒に $G((\Xi)) = F((\Xi)) - \frac{2}{3}\cdot\sum_j \Xi_j \cdot \frac{\partial}{\partial \Xi_j} F((\Xi))$ も用意しておく。

[Lemma]　$\frac{\partial}{\partial x'} f(x') = 2\cdot\alpha\cdot x\cdot\sqrt{1-Q}\cdot G((\Xi))$

但し　$x = x'^2 + x''$，$Q = \frac{x''}{x}$，$\Xi_j = \frac{\zeta_j}{x}$．

そこで，y に対し，x'_y を $\left(\frac{\partial}{\partial x'} f(x')\Big|_{x'=x'_y}\right) = y$ で定め，また $x_y = x'^2_y + x''$ とおく．

[定理] (Cubic reciprocal fnct of van der Corput type)

$$\frac{2}{3}\cdot\alpha\cdot x_y^{\frac{3}{2}}\cdot F\left(\frac{(\zeta)}{x_y}\right) - y\cdot x'_y$$
$$= -\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{2\alpha}}\cdot y^{\frac{3}{2}}\cdot\left(\begin{array}{l} \mathrm{tr}\,\frac{1+\sqrt{-1}}{2}\left(1 + \sqrt{-1}\left\{\frac{\alpha x''}{y} + \frac{1}{2}\left(G^2\left(\frac{2\alpha(\zeta)}{y}\right) - 1\right)\right\}\right)^{\frac{3}{2}} \\ -\frac{1}{2}\left(F - G^3\right)\left(\frac{2\alpha(\zeta)}{y}\right) \end{array}\right)$$
$$+ O_{k,\alpha,F}\left(\frac{1}{X}\right)$$

但し　$\mathrm{tr}\,\frac{1+\sqrt{-1}}{2}\left(1+U+\sqrt{-1}V\right)^{\frac{3}{2}} \underset{\mathrm{def}}{=} \frac{1+\sqrt{-1}}{2}\left(1+U+\sqrt{-1}V\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{1-\sqrt{-1}}{2}\left(1+U-\sqrt{-1}V\right)^{\frac{3}{2}}$

となる。

勿論 最終的には $+O_{k,\alpha,F}(\cdots)$ の中の係数は，すべて明示的にする必要がある．又 induction を実行する際に $+O(\cdots)$ の所は，[7-4]の第2章中のように，漸近展開的に表示しておく事も必要ではある。定理の右辺の形が本命と見る ($y = y'^2 + y''$ と分解し y'' が

本当の変数役）べきりのを示唆する。注意として．

$$F = 1 \quad \text{なら} \quad G = 1$$

$$F = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}(1+U+\sqrt{-1}V)^{\frac{3}{2}} \quad \text{なら} \quad G = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}(1+U+\sqrt{-1}V)^{\frac{1}{2}}$$

（U, V は有理関数でよい．$V=0$ なら定理は $+O(\frac{1}{x})$ 不要 $V\neq 0$ なら，本当に $+O(\frac{1}{x})$ が必要）

証明は．体力で3次の項まで展開し両辺を比較するのである が，$F=1$ の時は．$1+\sqrt{-1}\frac{\alpha x''}{y} = r\cdot e^{i\theta}$ と極形式で表す ことにより，両辺（の $+O(\cdots)$ なしの形）の平方を較べると， $\sin 3\theta$ の3倍角公式に帰着することから導くことができ る．これは，チェビシェフの多項式を連想させるがいかがであ ろうか。実は定理の右辺は（$x \doteqdot 0$ のとき）

$$(1+x)^{\frac{3}{2}} = 1 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 + O(x^4)$$

$$\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}(1+\sqrt{-1}x)^{\frac{3}{2}} = 1 - \frac{3}{2}x - \frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 + O(x^4)$$

の比較から見つけた次第です。（$F-G^3=0 \iff F=(1+\text{linear in}(\xi,\eta))^{\frac{3}{2}}$）

3° parabolic な変換 $\begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ($a \in \mathbb{Z}$) については，10年前に見 つけた形のままで，他に自然に解けるものが見つからず，まだ "messy" なままなので，より深く考察を続けたい。が，整理 の後は，次の形のものを扱うべきである。まず相期変形として $\alpha = a_{-1} + \varepsilon_{-1}\alpha_0$ ($a_{-1} \in \mathbb{Z}$, $\varepsilon_{-1} = \pm 1$, $\frac{1}{2} > \alpha_0 > 0$) により $\sum_{x_0'} e(\frac{2}{3}\alpha x_0'^3)$ ($X < x_0' \leq X+U$) を $\sum_{x_0'} e\left(\frac{2}{3}\varepsilon_{-1}\alpha_0 \cdot \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}(x_0'^2 + \sqrt{-1}\,\xi_0)^{\frac{3}{2}}\right) + O(X^{\varepsilon})$ （$\xi_0 = 0$ 又は α で定まる数）（$x_0'' = 0$ と解する）とする。$e(+(\cdots)) = \overline{e(-(\cdots))}$ （但．ここで $\xi_0 = 1$ と置る）なので．$e(\pm(\cdots))$ は，組合せの複素共軛で処理し，また．$e(\cdots)$

の中味が $+O\left(\frac{1}{X}\right)$ となれば $e(\cdots)+O\left(\frac{1}{X}\right)$ のごとくに外へ出して（この時 p5 f l2 の処理を要する）、和の変換公式は、通常の θ-公式や保型形式のように完全な等式で成立する事は期待せずに、いつも "admissible error" 内で公式として考えるわけである。いま、$\langle\!\langle 1+U+\sqrt{-1}V\rangle\!\rangle \equiv$

$= \left(\mathrm{tr}\frac{1+\sqrt{-1}}{2}(1+U+\sqrt{-1}V)^{\frac{3}{2}}\right) - \left(\mathrm{tr}\frac{1+\sqrt{-1}}{2}(1+U+\sqrt{-1}V)^{\frac{1}{2}}\right)^3$ を用意して、α_0 から3次の連分数展開を行って、$\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&-a_n\\0&1\end{pmatrix}$ による変換を k 回まで行ったとき（[7-1]の事を参照）、もし $\left(\prod_{j=0}^{k}\sqrt{2\alpha_j}\right)N \gg 1$ ならば、$(x_k = x_k'^2 + x_k'')$、扱うべきものは、

$$A_k \sum_{x_k'} (x_k')^{-\frac{k}{2}} \sum_{x_k'' \text{ to } x_k'} e\left(\pm\frac{2}{3}\alpha_k\left(\mathrm{tr}\frac{1+\sqrt{-1}}{2}\left(x_k+\sqrt{-1}\left(\mathrm{linear}(\text{in } x_1'',\cdots,x_{k-1}'')+\mathrm{const}_k\right)\right)^{\frac{3}{2}} + \sum_{j=1}^{k}\sum_{h=1}^{4} K_{jh}\langle\cdots\rangle\right)\right)$$

$$+O_{\alpha,k}(\sqrt{X})$$

ただし、 $\left(\prod_{j=0}^{k}\sqrt{2\alpha_j}\right)X < x_k' \leq \left(\prod_{j=0}^{k}\sqrt{2\alpha_j}\right)(X+N)$

$\mathbf{x}_k'' = (x_1'',\cdots,x_k'')$ 　 $0 \leq x_j'' \leq B_j^{(k)}x_k'$ 　 $(B_k^{(k)} = 2)$

A_k, $B_j^{(k)}$, K_{jh} は α_0 の連分数展開から定まる数。

$\langle\cdots\rangle$ は $x_k^{\frac{3}{2}} \times \left\langle\!\!\left\langle 1+\left(\mathrm{linear}(\text{in } x_1'',\cdots,x_j'')+\mathrm{const}_k\right)/x_k + \sqrt{-1}\left(\mathrm{linear}(\text{in } x_1'',\cdots,x_j'')+\mathrm{const}_k\right)/x_k \right\rangle\!\!\right\rangle$ の形

（いずれも induction により定まる）

である。また、$\left(\left(\prod_{j=0}^{k-1}\sqrt{2\alpha_j}\right)N \gg\right) 1 \gg \left(\prod_{j=0}^{k}\sqrt{2\alpha_j}\right)N$ ならば、積分型の van der Corput の lemma（[10] の (Lemma 4.8)）の形に対応するものに持ち込む。勿論 $+O_{\alpha,k}(\cdots)$ は、定数の評価もまち

んと行わねばならない。また、Poisson和公式では、和の区間の端点の項は、適当に重み $(\frac{1}{2})^*$ をつけねばならないので、その処理も要する。ここの $\sum_h^{*} K_{jh}\langle\cdots\rangle$ がまだ "Messy" の形の所である。

固定した x'_k について $x_k'^{-\frac{k}{2}} \sum_{x''_k \,\text{to}\, x'_k} e(\cdots)$ の所は、Hessianの形から $O_{k,\alpha,\varepsilon}(X^{k\varepsilon})$ の形となる（と期待できる）ので、x''達を、x'_kに附随する局所変数と見たいわけである。文献[7–8]

細部まで詰めた完成品を示すのは、まだ何年もかかる（あるいは未完？）と思われるので、中間報告とする次第です。

REFERENCES

[1] H. Fiedler, W. Jurkat & O. Körner; "Asymptotic expansions of finite Theta series", Acta Arith., Vol.32 (1977), 129–146.

[2] S.W. Graham & G. Kolesnik; "Van der Corput's Method of Exponential Sums", London Math. Soc. Lecture Note Series 126, (1991).

[3] J.-I. Igusa;

- "Theta Functions", Grundlehren math. Wiss. Einzel., Bd.194, Springer Verlag (1972).
- "Lectures on forms of higher degree", Tata Inst. Fundamental Research, Bombay (1978).

[4] T. Kubota;

- "On an analogy to the Poisson summation formula for generalized Fourier transformation", J. reine angew. Math., 268/269 (1974), 180-189.

- "A generalized Weil type representation and a function analogous to e^{-x^2}", Bull. Amer. Math. Soc., 81 (1975), 902-907.
- "A complex Airy integral", Nagoya Math. J., 61 (1976), 111-116.
- "On a generalized Fourier transformation", J. Fac. Sci. Tokyo, Sect. IA Math., 24 (1977) no.1, 1-10.

[5] 栗林幸男；「擬Fourier変換について」，数理解析研究所講究録 No.1039，応用函数解析の研究，1998年4月刊，pp 152-164.

[6] W. Maier; "Transformation der kubischen Thetafunktion", Math. A., 111 (1935), 183-196.

[7-1] Y.-N. Nakai; "On a θ-Weyl sum", Nagoya Math. J., 52 (1973), 163-172, 同 Errata, 同J. 60 (1976), 217.

[7-2] 中井喜信；「テータ・ワイル和」，第22回代数学シンポジウム報告集，1976年 於 信州大学，pp 11-30.

[7-3] 中井喜信；「Weyl和とvan der Corputの方法」，数理解析研究所講究録 No.456，1982年，2-17.

[7-4] Y.-N. Nakai; "On Diophantine inequalities of real indefinite quadratic forms of additive type in four variables", Advanced Studies in Pure Mathematics 13, Investigations in Number Theory, 1988年, 25-170.

[7-5] 中井喜信；「3次の連分数展開」，山梨大学教育学部研究報告，第41号第2分冊，1990年，4-6.

[7-6] 中井喜信；「"Fourier変換不変"な関数は実質上2次多項式であることの例証」，同上誌，第43号第2分冊(1992)，1-3.

[7-7] 中井喜信；「3次の連分数展開 II」，同上誌，第44号第2分冊(1993)，1-3.

[7-8] 中井喜信；「3次のテータ・ワイル和（I）」，同上誌第49号第2分冊(1998)，1-4.

[7-9] 中井喜信；（1991年度数学会年会 慶応大学 同時開催での代数学分科会）

[8] W. Raab; "Kubische und biquadratische Thetafunktionen I und II", Sitzungsber. Österreich. Akad. Wiss., Mat-Natur. Kl., 188 (1979), 47-77 und 230-246.

[9] T. Suzuki; "Weil type representation and automorphic forms", Nagoya Math. J., 77 (1980), 145-166.

[10] E.C. Titchmarsh; "The Theory of the Riemann Zeta-Function", Oxford (1951年),

[11] R.C. Vaughan; "Some Remarks on Weyl sums", Colloquia Math. Soc. János Bolyai, 34(II), Topics in classical number theory, Budapest, Hungary (1984年), 1585-1602.

[12] Д.И. Боднар, "Ветвящиеся цепные дроби", Киев Наукова Думка (1986)
(D.I. Bodnar, "Branching continued fractions")