数理解析研究所講究録
1091巻 1999年 199-204

An asymptotic formula for a certain mean value in a divisor problem

柳沢直樹 (中央情報開発)
Naoki Yanagisawa

ここでは発表に現われたすべての定理に対して述べるのではなく，それらの内の1つに限って述べることにします．ここで，

$$\sigma_a(n) = \sum_{\mathbb{N} \ni d \mid n} d^a \quad \text{for } a \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$$

とし，$\zeta(s)$はRiemannのzeta関数として

$$(1) \qquad \Delta_a(x) = \sum_{n \le x} \sigma_a(n) - \zeta(1-a)x - \frac{\zeta(1+a)}{1+a} x^{1+a} + \frac{1}{2}\zeta(-a)$$

とします．また，aは$-1 < a < 0$をみたす定数とします．$\sigma_a(n)$の生成関数が$\zeta(s)\zeta(s-a)$であることから，ペロンの公式においてすぐに見てとれる留数を集めて，(1)の右辺の第2〜第4項をMain termと考えて，O-term $\Delta_a(x)$を評価しようという問題は，Dirichletの約数問題と同じく古くから

ら様々な方々により考察されていたようでして，現に1932年にS. Chowlaは，$-1<a<-\frac{1}{2}$であるときは

(2) $$\int_1^X \left(\Delta_a(x)-\frac{1}{2}\zeta(-a)\right)^2 dx$$
$$=\left(\frac{1}{12}\,\frac{\zeta(-2a)\,\zeta(1-a)^2}{\zeta(2-2a)}+\frac{1}{4}\zeta(-a)^2\right)X$$
$$+\,O\left(X^{\frac{3}{2}+a}\log X\right)$$

を証明しています．Chowlaはこれをどうやって示したのかというと，今日Chowla-Walumの関数と呼ばれている

(3) $$G_{a,1}(x)=\sum_{n\le\sqrt{x}} n^a\,\overline{B}_1\!\left(\frac{x}{n}\right)\qquad \left(\overline{B}_1(t)=\{t\}-\frac{1}{2}\right)$$

を使って$\Delta_a(x)$が

(4) $$\Delta_a(x)=-G_{a,1}(x)-x^a G_{-a,1}(x)+O(x^{a/2})$$

と書けることを示しあとは

(5) $$\sum_{\substack{m,n\\ m,n\le\sqrt{X}}}\int_{\max(m^2,n^2)}^{X} m^a n^a\,\overline{B}_1\!\left(\frac{x}{m}\right)\overline{B}_1\!\left(\frac{x}{n}\right)dx$$

のような積分の和の漸近式あるいは評価式をみちびくという方法をとっています．ここで最も困難なのは(5)の処理でして，たとえば$\int\overline{B}_1\!\left(\frac{x}{m}\right)\overline{B}_1\!\left(\frac{x}{n}\right)dx$は，積分区間が長さ$mn$などであまり大きくはならない，きちんといえば

$$\int_0^{[m,n]} \bar{B}_1\left(\frac{x}{m}\right)\bar{B}_1\left(\frac{x}{n}\right)dx = \frac{1}{12}(m,n)$$

となっているのですが，問題は積分区間の長さが $[m,n]$ の倍数でないときは，$[m,n]$ ぐらいの大きさになり得るわけで，こういうものがうまく集まって(2)の O-term になることを示さなければならないという点です．Chowla は Fourier 解析を使い，$\bar{B}_1(t)$ の Fourier 展開 $\sum_n -\frac{1}{\pi n}\sin(2\pi nt)$ を基にしてこれを処理しています．しかしこの展開も条件収束であって，また $\sin(2\pi n_1\frac{x}{m})\sin(2\pi n_2\frac{x}{n})$ $(n_1, n_2 \in \mathbb{N})$ の積分を評価する（$\ll \left|\frac{n_1}{m}-\frac{n_2}{n}\right|^{-1}$ ぐらいでおさえる）ことも含めて，あまり追跡したくないような計算を[1]において実行されております．これには敬意を表せざるを得ません．

さて，この[1]の存在はあまり知られていませんので，私も知る故もなく，[3]において(2)と同等な

$$(6)\quad \int_0^X \Delta_a(x)^2dx = \frac{1}{2\pi^2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sigma_{1+a}(n)}{n}\right)^2\right)X + O(X^{\frac{3}{2}+a}\log X)$$

を，主定理の系として示しました．ここでも(4)が出発点となっている点は同じなのですが，(5)の処理を簡単に行なうことで(6)を示しました．この場合は次を用いました．

Lemma (Yamagisawa [3]) $f(t), g(t)$ を区分的に連続，単調，有界な固定された関数で，しかもこれらは周期

$A(>0)$をもつとする．また

$$\int_0^A f(t)\,dt=0$$

であるとする．このとき，任意の $n\leq\sqrt{X}$ に対して

$$\sum_{m\leq\sqrt{X}}\left|\int_{X_m}^{Y_m} f\left(\frac{x}{m}\right) g\left(\frac{x}{n}\right) dx\right| \ll \sigma_{-1}(n)X\log X$$

が，$0<Y_m-X_m\ll X$ をみたす実数列 $\{X_m\}$, $\{Y_m\}$ についてなりたつ．

この証明には，Fourier解析など用いず，[3] をごらんになればご理解いただけることと存じますが，Abel変換などをくり返し使う程度で片付いております．また，$G_{a,1}(x)$ の係数は全部1なわけですが，実は次が成立しております．

([3], Lemma 5) a; b を $a+b<-1$, $a,b\in(-1,0)$ であるように固定するとき，

$$(7)\qquad \int_0^X \left(\sum_{n\leq\sqrt{x}} a_n\cdot n^a f\left(\frac{x}{n}\right)\right)\left(\sum_{n\leq\sqrt{x}} b_n\cdot n^b f\left(\frac{x}{n}\right)\right)dx$$
$$= CX + O\left(X^{\frac{3}{2}+\frac{a+b}{2}}\log X\right)$$

がなりたつ，ここで a_n, b_n は単に有界なあたえられた実数列とする．

もとのLemmaはもう少し一般の場合も述べておりますが，(7)の a_n, b_n は $\ll 1$ ならば何でもよいという結果でして，$G_{a,1}$

の係数がそろっているのは自乗積分を考えるにはあまり重要でない、というわけで、たとえば a_n をわざと作ったようにとると $\sum_{n\le\sqrt{x}} a_n n^a f(\frac{x}{n}) = \Omega(x^{\frac{1+a}{2}})$ などもなりたちます。Chowla–Walum の予想と呼ばれる $G_{a,1}(x)$ を直接に評価する（この場合 $\ll x^{\varepsilon}$）という問題は、この点から考えても非常に難かしい問題であると思います。

一方で、$-\frac{1}{2}\le a<0$ のときは、Voronoi 公式を用いて、最良なのは Meurman [2] の

$$\int_0^X \Delta_a(x)^2\,dx = \frac{1}{(6+4a)\pi^2}\,\frac{\zeta(\frac{3}{2}-a)\zeta(\frac{3}{2}+a)\zeta(\frac{3}{2})^2}{\zeta(3)}X^{\frac{3}{2}+a} + O(X)$$

for any constant a $(-\frac{1}{2}<a<0)$, and

$$\int_0^X \Delta_{-\frac{1}{2}}(x)^2\,dx = \zeta(\tfrac{3}{2})^2\frac{1}{24\cdot\zeta(3)}X\log X + O(X)$$

である。[2] では

$$\int_0^X \Delta_a(x)^2\,dx = O(X) \qquad (-1<a<-\tfrac{1}{2})$$

も証明されていますが、実は [1] によって (6) がわかっていたわけです。[3] では $\int_0^X \Delta_a(cx)\Delta_b(x)\,dx$ （a, b は定数で $a+b<-1$, $a, b \in (-1,0)$、また c は正の有理数）の漸近式を導いておりますが、重要な系は (6) です。また、この

Chowla-Walum タイプの関数は，たとえば，$-1<a<-\frac{1}{2}$ で

$$\Delta_a(x,\chi)=\sum_{n\le x}\sigma_a(n)\chi(n)-L(0,\chi)L(-a,\chi)$$

（χ は原始指標）の自乗積分を考える際にも使えまして，ベルヌーイ多項式 $\overline{B}_1(t)$ の代わりに

$$P(t,\chi)=-\sum_{n\le t}\chi(n)-\frac{1}{q}\sum_{m=1}^{q}\chi(m)m$$

（q は χ の conductor）を使って

$$G_{a,1}(x,\chi)=\sum_{n\le\sqrt{x}}n^a P(\frac{x}{n},\chi)$$

を考えることで，[3] において $\int_0^X|\Delta_a(x,\chi)|^2dx$ の漸近式が求まっております．

(1998. 12. 29)

References

[1] S. Chowla, Contributions to the analytic theory of numbers, Math. Z. 35 (1932), 279-299

[2] T. Meurman, The mean square of the error term in a generalization of Dirichlet's divisor problem, Acta Arith. 76 (1996), 351-364.

[3] N. Yanagisawa, An asymptotic formula for a certain mean value in a divisor problem, Journal of Number Theory 73 (1998), 339-358.