数理解析研究所講究録
1091 巻 1999 年 175-188

Universality について

名古屋大学大学院多元数理科学研究科
松本耕二 (Kohji Matsumoto)

複素変数 $s=\sigma+it$ に対し，Riemann ゼータ関数を $\zeta(s)$，帯領域 $\{\frac{1}{2}<\sigma<1\}$ を D で表わす。ロシアの数学者 S. M. Voronin が 1975 年に発表した $\zeta(s)$ の universality theorem とは，次の主張である：K を連結な補集合をもつ D の compact subset，$f(s)$ を K 上連続で non-zero かつ K の内部 K° で正則な関数とすれば，$\forall\varepsilon>0$ に対し，

$$(1)\quad \liminf_{T\to\infty} \nu_T\left(\sup_{s\in K}|\zeta(s+i\tau)-f(s)|<\varepsilon\right)>0.$$ (注1)

これは一種の関数近似定理であるが，Weierstrass のよく知られた多項式近似定理と比較すると，近似する側の関数が単独の $\zeta(s)$ という関数（の平行移動）だけで済んでいるところが驚異的である。そのため多くの数学者がこの定理に注目し，一般化や別証明などを試みてきた（Reich[22][23]，Gonek[4]，

(注1) 但し，m で Lebesgue 測度を表わすとして，$\nu_T(\cdots)=\frac{1}{T}m\{\tau\in[0,T] \mid \cdots\cdots\}$ である。この ---- には τ の満たすべき何らかの性質が入るものとする。Voronin の原論文[24] における主張は実はもう少し弱いものであったが，ここでは上の形で述べておく。この形の定式化は A. Reich (1977) による。

Good[5], Bagchi[1][2], Laurinčikas[10]-[12])。最近になって再び，Laurinčikasを中心とするリトアニア学派によってその研究は再燃している([3],[8],[13]-[19])。こうした研究によって，DirichletのL関数，Dedekind, Hurwitz, Lerchのゼータ関数やさらにより一般の種々のゼータ関数について，universalityが示されてきた。

さて$F(z)$を$SL(2,\mathbb{Z})$に関する重さκの正則cusp形式で，正規化されたHecke eigenformとし，そのFourier展開を$\sum_{n=1}^{\infty} c(n) e^{2\pi i n z}$とする。この$F$に付随するDirichlet級数$\varphi(s,F)=\sum_{n=1}^{\infty} c(n) n^{-s}$が，$\sigma > \frac{\kappa+1}{2}$で絶対収束し，全平面に解析接続できることはよく知られている。本稿の主目的は，この$\varphi(s,F)$についてもuniversalityが成立していることが証明できたことを報告することにある。この結果はA. Laurinčikas氏との共同研究である。

<u>定理([LM])</u>　D_1を帯領域$\{\frac{\kappa}{2} < \sigma < \frac{\kappa+1}{2}\}$，$K$を連結な補集合をもつ$D_1$のcompact subset，$f(s)$を$K$上連続でnon-zeroかつ$K^{\circ}$で正則な関数とすると，$\forall \varepsilon > 0$に対し

$$(2)\qquad \liminf_{T\to\infty} \nu_T\left(\sup_{s\in K} |\varphi(s+i\tau,F) - f(s)| < \varepsilon\right) > 0.$$

この定理は，Bagchi[1]による$\zeta(s)$のuniversalityの別証明のアナロジーとして証明が構成されるが，その際に難点が一ヶ所存在する。以下本稿では，$\zeta(s)$の場合のBagchiの証明のア

ウトラインを述べ，最後に $\varphi(s, F)$ へ一般化する時の難点をいかに克服するかについて手短かに指摘することにする。(注2)

しかしその前に，値分布論の研究の歴史を H. Bohr にまでさかのぼってみる。Bohr は1915年，$\forall\sigma\in(\frac{1}{2},1)$ に対し，集合 $\{\zeta(\sigma+it) \mid t\in\mathbb{R}\}$ が $\mathbb{C}$ 内で dense であることを発見した。そしてその精密な version として，彼は1930-32年に B. Jessen との共著で，$\mathbb{C}$ 内の（辺が座標軸に平行な）任意の長方形 R と $\forall\sigma>\frac{1}{2}$ に対し，極限値 $\lim_{T\to\infty}\nu_T(\log\zeta(\sigma+i\tau)\in R)$ が存在することを証明した。(注3) 現代的な用語法では，この Bohr-Jessen の limit theorem は次のように述べられる。一般に空間 S の Borel 集合全体のなす family を $\mathcal{B}(S)$ と書こう。すると

$$P_{T,\sigma}(A)=\nu_T(\zeta(\sigma+i\tau)\in A) \qquad A\in\mathcal{B}(\mathbb{C})$$

は $\mathbb{C}$ 上の確率測度を定める。このとき，Bohr-Jessen の定理は，$T\to\infty$ のとき，$P_{T,\sigma}$ が $\mathbb{C}$ 上のある確率測度 P_σ に弱収束(注4)する，という形に定式化できるのである。

ところが，universality の自然な舞台は関数空間であるので，

(注2) $\varphi(s, F)$ の universality は Kačenas-Laurinčikas [8] や Laurinčikas [18] においてはじめて扱われたが，彼らの論文においては上述の「難点」を，単にそれを回避するような条件を仮定することで済ませてしまっており，従ってある非常に強い（成り立たないかもしれない）条件の下で(2)を得た，という結果になっている。上述の今回の結果はもちろん unconditional である。

(注3) Bohr-Jessen の定理の定量的精密化については，[6][7] などを参照されたい。

(注4) 一般に任意の有界連続実関数 f に対して $\int_{\mathbb{C}} f\,dP_T \to \int_{\mathbb{C}} f\,dP$ $(T\to\infty)$ のとき，P_T は P に弱収束するといい，$P_T\Rightarrow P$ と書く。同値ないいかえとして，任意の open subset G に対し，$\liminf_{T\to\infty} P_T(G)\geq P(G)$ が成り立つ，と言ってもよい。

limit theorem についても，$\mathbb{C}$ 上から関数空間上に持ち上げておくのが望ましい。そのような命題を述べるために，記号を少し準備しよう。$H(D)$ を D 上の正則関数全体のなす空間（位相は compact 一様収束位相）とする。$\gamma=\{s\in\mathbb{C} \mid |s|=1\}$ とし，$\Omega=\prod_p \gamma_p$ とおく。但し p はすべての素数にわたり，各 p に対し $\gamma_p=\gamma$ である。Ω は直積位相により compact 位相アーベル群であるので，全測度が 1 の Haar 測度 m_H が存在する。そして $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$ は確率空間になる。Ω の元 ω の γ_p への射影を $\omega(p)$ とし，

$$\zeta(s,\omega)=\prod_p\left(1-\omega(p)p^{-s}\right)^{-1}$$

と定義する。これは D 上 a.a.（= almost all）ω に対して収束し，$H(D)$-値 random element となる。P_ζ をその分布，即ち

$$P_\zeta(A)=m_H(\zeta^{-1}(A)) \qquad A\in\mathcal{B}(H(D))$$

で定まる確率測度とする。一方，

$$P_T(A)=\nu_T(\zeta(s+i\tau)\in A) \qquad A\in\mathcal{B}(H(D))$$

もやはり $H(D)$ 上の確率測度となるが，このとき，

<u>補題 1</u>（Bagchi [1]）　$P_T \Rightarrow P_\zeta$ $(\text{as } T\to\infty)$.（注5）

証明を4つのステップに分けて略述しよう。

<Step 1> まず $\zeta(s)$, $\zeta(s,\omega)$ をそれぞれ近似する関数

$$\zeta_n(s)=\sum_{m=1}^{\infty} m^{-s}\exp\left(-\left(\frac{m}{n}\right)^{\sigma}\right),\quad \zeta_n(s,\omega)=\sum_{m=1}^{\infty}\omega(m)m^{-s}\exp\left(-\left(\frac{m}{n}\right)^{\sigma}\right)$$

（注5）この定理は Bagchi 自身もっと一般的な枠組で扱っている。最近になって Laurinčikas [15][16] によってさらに広いゼータ関数のクラスに一般化されている。

(但し a はパラメーター，また $m=p_1^{\alpha_1}\cdots p_r^{\alpha_r}$ のとき $\omega(m)=\prod_{1\le j\le r}\omega(p_j)^{\alpha_j}$ と定める)を導入し，$A\in\mathcal{B}(H(D))$ に対し

$$P_{T,n}(A)=\nu_T(\zeta_n(s+i\tau)\in A),\quad Q_{T,n}(A)=\nu_T(\zeta_n(s+i\tau,\omega)\in A)$$

とおく。さらに $\zeta_n(s)$, $\zeta_n(s,\omega)$ を有限で切りおとして

$$\zeta_{n,N}(s)=\sum_{m=1}^{N}m^{-s}\exp\left(-\left(\frac{m}{n}\right)^a\right),\quad \zeta_{n,N}(s,\omega)=\sum_{m=1}^{N}\omega(m)m^{-s}\exp\left(-\left(\frac{m}{n}\right)^a\right)$$

とおき，測度 $P_{T,n,N}$ と $Q_{T,n,N}$ を同様に定義する。すると，$\zeta_{n,N}(s)$ と $\zeta_{n,N}(s,\omega)$ はもはや有限和なので，$P_{T,n,N}$ と $Q_{T,n,N}$ についてはその特性関数(Fourier 変換)が explicit に計算でき，そのことから

$$P_{T,n,N}\Rightarrow P_{n,N},\quad Q_{T,n,N}\Rightarrow P_{n,N}\quad (T\to\infty)$$

となる測度 $P_{n,N}$ の存在が困難なく示される。

<Step 2> 族 $\{P_{n,N}\}_{N=1}^{\infty}$ は tight であることが証明できる。即ち，$\forall\varepsilon>0$ に対して，$P_{n,N}(K)>1-\varepsilon$ ($\forall N$) となるような compact subset $K\subset H(D)$ の存在を示せるのである。よく知られた Prokhorov の定理は，測度の族が tight であることと収束する部分列を含むことが同値であることを主張する。よって，ある測度 P_n に収束するような $\{P_{n,N}\}_{N=1}^{\infty}$ の部分列が存在する。この P_n に対し，

$$P_{T,n}\Rightarrow P_n,\quad Q_{T,n}\Rightarrow P_n\quad (T\to\infty)$$

であることを示すことができる。

<Step 3> 今度は族 $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ がまた tight になることを示し，再び Prokhorov の定理を用いて，この族の部分列の極限測度 P の存在をいう。すると

$$P_T\Rightarrow P,\quad Q_T\Rightarrow P\quad (T\to\infty)$$

が証明できる。但しここに Q_T は，$\xi(s,\omega)=\sum_{m=1}^{\infty}\omega(m)m^{-s}$ として，

$$Q_T(A)=\nu_T(\xi(s+i\tau)\in A)\qquad A\in\mathcal{B}(H(D))$$

で定義される測度である。

<Step 4> そこで後は，この P が P_ζ と一致することを証明すればよい。そのためにエルゴード理論を援用する。A を P に対する continuity set (注6)とし，

$$\theta(\omega)=\begin{cases}1 & \text{if } \xi(s,\omega)\in A\\ 0 & \text{if } \xi(s,\omega)\notin A\end{cases}$$

とおくと，その期待値は

$$E(\theta)=\int_\Omega\theta\,dm_H=m_H\{\omega\mid\xi(s,\omega)\in A\}=P_\zeta(A)\tag{3}$$

となる。一方，$\tau\in\mathbb{R}$ に対し，$\varphi_\tau(\omega)=\prod_p p^{-i\tau}\omega(p)$ で Ω 上の変換 φ_τ を定義すると，

(注6) $A\in\mathcal{B}(H(D))$ が continuity set とは，$P(\partial A)=0$ であること。

変換の1-パラメーター族 $\{\varphi_\tau \mid \tau\in\mathbb{R}\}$ は ergodic(注7) であることが示せる。そのことから $\theta(\varphi_\tau(\omega))$ が ergodic process であることが従う。ここでは ergodic process の定義は述べないが，とにかくこの事実により，エルゴード理論における Birkhoff-Khinchin の定理を用いることができて，

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \theta(\varphi_\tau(\omega))\,d\tau = E(\theta) \qquad (\text{for a.a. } \omega\in\Omega)$$

となる。ところが

$$\frac{1}{T}\int_0^T \theta(\varphi_\tau(\omega))\,d\tau = \nu_T(\xi(s+i\tau,\omega)\in A) = Q_T(A)$$

であるから，$\lim_{T\to\infty} Q_T(A) = E(\theta)$ であり，これと (3) から $Q_T \Rightarrow P_\xi$ $(T\to\infty)$ を得る。(注8) $Q_T\Rightarrow P$ であったから $P = P_\xi$ が証明された。（証明終）

補題1は，"functional" limit theorem とでも呼ぶべきものであろう。Bagchi の理論の骨格となっているのは，この結果と，もうひとつ，次の "denseness lemma" である。

補題2（Bagchi [1]） $s\in D$ と $a_p\in\gamma$ に対し，$f_p(s) = -\log\left(1-\frac{a_p}{p^s}\right)$ と書くと，$\sum_p f_p(s)$ の形の，$H(D)$ で収束する級数全体のなす集合は，$H(D)$ で dense である。

この補題の証明は後でスケッチする。ところで本稿の冒頭で，universality theorem と Weierstrass の近似定理との類似性に言及したが，実は Weierstrass の定理の複素版ともいうべき，次の定理が知られている。

補題3（Mergelyan の定理，1951） K を連結な補集合をもつ $\mathbb{C}$ の compact subset，$f(s)$ を K 上連続かつ K° 上正則な関数とすると，

(注7) 即ち，$A\in\mathcal{B}(\Omega)$ が $m_H(A\,\Delta\,\varphi_\tau(A)) = 0$ をみたすなら $m_H(A)=0$ または 1 になるという性質．ここに $A\,\Delta\,B = (A\cap B^c)\cup(A^c\cap B)$ である．

(注8) 任意の continuity set A に対して $Q_T(A)\to P_\xi(A)$ なら $Q_T\Rightarrow P_\xi$ であることによる．

$\forall\varepsilon>0$ に対し多項式 $P(s)$ で，$\sup_{s\in K}|f(s)-P(s)|<\varepsilon$ を満たすものが存在する。

この定理の証明については，例えば Walsh [25] を見られたい。この結果と universality theorem との類似性は明らかであるが，また universality の証明中でもこの結果は重要な役割を演じる。実際，上述した3つの補題から，universality theorem はもはやさほどの困難なく導出されるのである。

その議論をスケッチしよう。まず，

〈Case 1〉 $f(s)$ が D 全体に non-zero に接続される場合．

$$G=\{g\in H(D)\mid \sup_{s\in K}|g(s)-f(s)|<\varepsilon\}$$

とおくと G は open である．補題1により $P_T\Rightarrow P_\zeta$ だから，

$$(4)\qquad \liminf_{T\to\infty} P_T(G)\geqq P_\zeta(G)$$

である（(注4)を参照)．一方補題2から，Hurwitz の定理などを用いることにより，P_ζ の support (注9) が

$$S=\{\varphi\in H(D)\mid \varphi \text{ は } D \text{ で non-zero，または } \varphi\equiv 0\}$$

であることを示すことができる。仮定により $f\in S$ だから $f\in(\text{Support of } P_\zeta)$，従って，$f$ の近傍 G に対し $P_\zeta(G)>0$ である．他方，G の定義により

$$P_T(G)=\nu_T(\zeta(s+i\tau)\in G)=\nu_T(\sup_{s\in K}|\zeta(s+i\tau)-f(s)|<\varepsilon)$$

なので，これらのことと (4) から，universality の結論 (1) を得る．

〈Case II〉 一般の場合には，補題3によって $f(s)$ を近似する多項式 $P(s)$ をとる。$P(s)$ はもちろん D 全体で定義されるから $H(D)$ の元であり，$P(s)$ からさらに $H(D)$ の non-zero な元を作ることができて，Case I に帰着される．(証明終)

そこで後は，補題2を証明すればよい。そのために Bagchi は，次に述べるもうひとつの "denseness lemma" を示した。その証明は Hardy 空間 H^2 の理論や Hilbert 空間論を用いるもの

(注9) 測度 P_ζ の support $=\{\varphi\in H(D)\mid \varphi$ の任意の近傍 G に対し $P_\zeta(G)>0\}$.

であるが，ここでは一切省略せざるを得ない。

<u>補題4</u>　Dを$\mathbb{C}$の単連結subsetとする。$H(D)$の元の列$\{f_m\}$が次の3つの条件を満足するとする：

(a) $\mathbb{C}$上のBorel測度(注10) μで，そのsupportがcompactでDに含まれ，かつ $\sum_{m=1}^{\infty}\left|\int_{\mathbb{C}} f_m\, d\mu\right| < \infty$ を満たすものに対し，$\int_{\mathbb{C}} s^r\, d\mu(s) = 0$ (for $r = 0, 1, 2, \cdots$) となる。

(b) $\sum_{m=1}^{\infty} f_m$ は$H(D)$で収束する。

(c) 任意のcompact subset $K \subset D$に対し $\sum_{m=1}^{\infty} \sup_{s\in K} |f_m(s)|^2 < \infty$.

すると，$\sum_{m=1}^{\infty} a_m f_m$，$|a_m| = 1$ の形の収束級数全体のなす集合は，$H(D)$でdenseである。

この補題を，$\{f_m\}$として$\{g_p\}$，$g_p(s) = -\tilde{a}_p \log(1 - p^{-s})$，$\tilde{a}_p \in \gamma$ に対して適用することで，補題2が従う。そこで補題4の条件(a)〜(c)をcheckすればいいことになるが，(b), (c)を$D = \{\frac{1}{2} < \sigma < 1\}$と列$\{g_p\}$に対してcheckすることは困難ではない。問題は(a)であるが，これは次の補題に帰する：

<u>補題5</u>　$z \in \mathbb{C}$ に対し，$\rho(z) = \int_{\mathbb{C}} e^{-sz}\, d\mu(s)$ とおく（ここにμは補題4の(a)に述べたような測度）。このとき，もし

$$(5) \qquad \limsup_{r\to\infty} r^{-1} \log|\rho(r)| > -1$$

が成り立てば，$\sum_p |\rho(\log p)| = \infty$ である。

(注10) $\mathbb{C}$上の測度μが，$\mathcal{B}(\mathbb{C})$の任意の元に対して値が定まり，かつcompact集合に対する値が有限のとき，Borel測度という。

(補題5 $\Rightarrow$ (a) の証明のスケッチ) (a) の仮定より $\sum_p \left| \int_{\mathbb{C}} g_p \, d\mu \right| < \infty$ だから, $h_p = \tilde{a}_p p^{-s}$ とおくと $\sum_p \left| \int_{\mathbb{C}} h_p \, d\mu \right| < \infty$ が容易に導かれる。即ち

(6) $\quad \sum_p |\rho(\log p)| < \infty$

である。一方, $\rho(z)$ は exponential type の整関数(注11) であることが示される。
→次頁
測度 μ の support が半平面 $\{\sigma < \sigma_0\}$ に含まれるような任意の σ_0 に対し, 整関数論の一結果により, $\rho(z) \not\equiv 0$ なら

$$\limsup_{r \to \infty} r^{-1} \log |\rho(r)| > -\sigma_0$$

である。我々の場合 $\sigma_0 = 1$ ととれるので, $\rho(z) \not\equiv 0$ なら (5) が成り立ち, 従って補題5 により $\sum_p |\rho(\log p)| = \infty$ となる。これは (6) に矛盾する。ゆえに

$$\rho(z) = \int_{\mathbb{C}} e^{-sz} \, d\mu(s) \equiv 0$$

でなければならない。この両辺を z について r 回 ($r = 0, 1, 2, \cdots$) 微分してから $z = 0$ とおくと,

$$\int_{\mathbb{C}} s^r \, d\mu(s) = 0 \qquad (r = 0, 1, 2, \cdots)$$

が得られ, 条件 (a) が check された。 (証明終)

こうして残されたのは補題5の証明だけになった。この証明に, 素数分布論において知られている事実

(7) $\quad \displaystyle\sum_{p \le x} \frac{1}{p} = \log \log x + c_1 + O\left(e^{-c_2 \sqrt{\log x}}\right)$

(c_1, c_2 は定数) を用いる。

(補題5の証明) 結論を否定して, $\sum_p |\rho(\log p)| < \infty$ とする。$\beta > 0$ とし,

$$\mathfrak{M} = \{ m \in \mathbb{N} \mid \exists r \in ((m - \tfrac{1}{4})\beta, (m + \tfrac{1}{4})\beta),\ |\rho(r)| \le e^{-r} \}$$

と定めて, $\mathfrak{M}$ の元を小さい方から順に $a_1, a_2, \cdots, a_m, \cdots$ と書くことにする。すると

$$\infty > \sum_p |\rho(\log p)| \ge \sum_{m \notin \mathfrak{M}} \sum\nolimits_m |\rho(\log p)| \ge \sum_{m \notin \mathfrak{M}} \sum\nolimits_m p^{-1}$$

を得る。但し $\sum_m$ は $(m - \frac{1}{4})\beta < \log p < (m + \frac{1}{4})\beta$ をみたす素数 p にわたる和である。(7) を用いると

$$\sum\nolimits_m p^{-1} = \frac{1}{2m} + O\left(\frac{1}{m^2}\right)$$

がわかるので, 上式から $\sum_{m \notin \mathfrak{M}} m^{-1} < \infty$ を得る。従って殆んどすべての $m \in \mathbb{N}$ が $\mathfrak{M}$ に属し, とくに $\lim_{m \to \infty} (a_m / m) = 1$ であることがわかる。各 $a_m \in \mathfrak{M}$

に対し，$\mathfrak{M}$ の定義により

$$\exists \lambda_m \in \left(\left(a_m - \tfrac{1}{4}\right)\beta,\ \left(a_m + \tfrac{1}{4}\right)\beta\right),\quad |\rho(\lambda_m)| \leq e^{-\lambda_m}.$$

よって $\lim_{m\to\infty}(\lambda_m/m)=\beta$ かつ

$$\limsup_{m\to\infty} \lambda_m^{-1} \log|\rho(\lambda_m)| \leq -1$$

である。このことから，整関数論の Bernstein の定理を用いると，

$$\limsup_{r\to\infty} r^{-1} \log|\rho(r)| \leq -1$$

が導かれる。これは仮定(5)に矛盾するので，補題5 は示された。（証明終）

以上，Bagchi による $\zeta(s)$ の universality の証明の story を追ってきた。Bagchi[1] は Thesis であって残念ながら未発表(注12)であるが，本質的なアイデアのかなりの部分は[2]の中にも述べられている。Laurinčikas は最近出版したテキスト[14]の Chapter 5 と Chapter 6 において，Bagchi のアイデアの詳細な解説を与えた。本稿で上述したのはこの Laurinčikas の教科書の，ダイジェストな紹介に他ならない。(注13)

さて上述した Bagchi の証明を cusp 形式の L 関数 $\varphi(s, F)$ の場合に焼き直そうとすると，(7) に対応するものとして，和 $\sum_{p\leq x} \frac{|C_p|}{p}$ （但し $C_p = C(p)\cdot p^{-\frac{\kappa-1}{2}}$） に対する，(7) と同じく

(注11)(前頁) 角領域 $|\arg s| \leq \theta_0$ $(0<\theta_0\leq\pi)$ で正則な関数 $f(s)$ が exponential type であるとは，$|\theta|\leq\theta_0$ なる θ について一様に，

$$\limsup_{r\to\infty} r^{-1}\log|f(re^{i\theta})| < \infty$$

が成り立つことである。我々の今の場合には $\theta_0 = \pi$ ととればよい。

(注12) Bagchi[1] のコピーが筆者の手元にはあるので，興味のある読者は御一報されたい。

(注13) Laurinčikas のこの本は比較的読みやすいが，ミスプリントが散見する。筆者にとって最も気になるミスプリントは，文献表中で，筆者の名前がなぜか "R. Matsumoto" になっていることである。

らいに精密な漸近式が必要となる。しかし Fourier 係数 c_p の挙動は今も謎に包まれたままなので，現状ではそのような精密な結果を得ることは不可能に近い。つまりストレートな焼き直しの試みはここで挫折するので，何らかの工夫が要求される。今回我々はこの難点を，Rankin [21] による結果

$$(8) \qquad \sum_{p \leq x} c_p^2 = \frac{x}{\log x}(1+o(1)) \quad (x \to \infty)^{(注14)}$$

と (7) とを組みあわせた議論によって切り抜けたのである。

$\varphi(s, F)$ に対して Bagchi の証明のアナロジーをすすめると，(6) に対応して

$$(9) \qquad \sum_p |c_p||\rho(\log p)| < \infty$$

が出てくる。 $0<\mu<1$ なる μ に対して $\mathcal{P}_\mu$ を $|c_p|>\mu$ なる素数 p 全体の集合とすると，(9) から

$$\sum_{p \in \mathcal{P}_\mu} |\rho(\log p)| < \infty$$

を得る。これは (6) と比べると p が $\mathcal{P}_\mu$ に制限されてしまっているが，Rankin の (8) によって $\mathcal{P}_\mu$ が正の lower density を持つことがわかるので，この制限は実はあまり強い制限とはならない。このような状況を，(補題5の証明中の $\sum_m$ が定めるような) 短い区間において正確に定式化してやることで，証明がうまく進行するのであるが，技術的な詳細は [LM] にゆずらねばならない。

(注14) この誤差項 $o(1)$ はもっと改良されている (Perelli [20]) が，ここでの目的には (8) で十分である。

Universality の理論における現在のひとつの大問題は，これがどれほど一般的な性質なのかを見極めることである。今回の我々の結果をさらに一般化しようとすると，まず合同部分群の場合への拡張は容易であろう。Non-holomorphic な場合については，[LM] における Ramanujan-Petersson 予想（= Deligne の評価）を用いる箇所(注15)に対応する部分の処理が問題となる。より一般の $GL(n)$ の保型 L 関数についてはどうであろうか。おそらく，いわゆる Selberg class のゼータ関数について考えてみるのが，現時点でのひとつの適切な問題設定かもしれない。Linnik - Ibragimov の予想は，すべての Dirichlet 級数が（trivial な例外は除くのであろうが）universality の性質を持つことを主張している。今までに公表された universality の証明はすべて，何らかの数論的事実を用いているが，universality が真に数論的な命題なのか，それとも関数論に含まれるべき性質であるのか，現段階ではいまだ不明であると言うことしかできない。

なお，Hilbert が問題にしたゼータ関数の "algebraic-differential independence" に関する結果は，universality から簡単に導けることを最後に注意しておく（Laurinčikas [14] の 6 章参照）。

(注15) 講演後に質問をうけて，「そのような箇所はない」と口走ってしまいましたが，誤りでした。おわびして訂正致します。

文　献(注16)

[1] B. Bagchi, The statistical behaviour and universality properties of the Riemann zeta function and other allied Dirichlet series. Ph. D. Thesis, Indian Statistical Institute, 1981.
[2] ——, A joint universality theorem for Dirichlet L-functions, Math. Z. 181 (1982) 319-334.
[3] R. Garunkštis, The universality theorem with weight for the Lerch zeta-function, in "Analytic and Probabilistic Methods in Number Theory. Proc. 2nd Intern. Conf. in Honour of J. Kubilius, Palanga, Lithuania 1996", New Trends in Probab. and Statist. vol. 4, A. Laurinčikas et al. (eds.), VSP / TEV, 1997, pp. 59-67.
[4] S.M. Gonek, Analytic properties of zeta and L-functions, Ph. D. Thesis, University of Michigan, 1979.
[5] A. Good, On the distribution of the values of Riemann's zeta-function, Acta Arith. 38 (1981) 347-388.
[6] G. Harman - K. Matsumoto, Discrepancy estimates for the value-distribution of the Riemann zeta-function IV, J. London Math. Soc. (2) 50 (1994) 17-24.
[7] T. Hattori - K. Matsumoto, A limit theorem for Bohr-Jessen's probability measures of the Riemann zeta-function, J. Reine Angew. Math., to appear.
[8] A. Kačėnas - A. Laurinčikas. On Dirichlet series related to certain cusp forms, LMJ 38 (1998) 64-76.
[9] A. A. Karatsuba - S.M. Voronin, The Riemann Zeta-Function, Walter de Gruyter, 1992.(注17)
[10] A. Laurinčikas, Distribution des valeurs de certaines séries de Dirichlet, C. R. Acad. Sci. Paris 289 (1979) 43-45.
[11] ——, Distribution of values of generating Dirichlet series of multiplicative functions. LMJ 22 (1982) 56-63.
[12] ——, The universality theorem I・II, LMJ 23 (1983) 283-289; ibid. 24 (1984) 143-149.
[13] ——, On the universality of the Riemann zeta-function, LMJ 35 (1995) 399-402.
[14] ——, Limit Theorems for the Riemann Zeta-Function, Kluwer, 1996.

(注16) 以下の文献表中, LMJ とあるのは Lithuanian Mathematical Journal の略. これは Lietuvos Matematikos Rinkinys のロシア語からの英訳である.
(注17) この本の7章に, Voronin の原論文に沿った, universality の解説がある.

[15] A. Laurinčikas, Limit theorems for the Matsumoto zeta-function, J. Théorie des Nombres de Bordeaux 8 (1996) 143-158.
[16] ———, On limit distribution of the Matsumoto zeta-function I·II, Acta Arith. 79 (1997) 31-39 ; LMJ 36 (1996) 371-387.
[17] ———, The universality of the Lerch zeta-function, LMJ 37 (1997) 275-280.
[18] ———, On the Matsumoto zeta-function, Acta Arith. 84 (1998) 1-16.
[19] ———, On the Lerch zeta-function with rational parameters, LMJ 38 (1998) 89-97.
[20] A. Perelli, On the prime number theorem for the coefficients of certain modular forms, in "Elementary and Analytic Theory of Numbers", Banach Center Publ. vol. 17, H. Iwaniec (ed.), PWN-Polish Scientific Publishers, 1985, pp. 405-410.
[21] R. A. Rankin, An Ω-result for the coefficients of cusp forms, Math. Ann. 203 (1973) 239-250.
[22] A. Reich, Universelle Wertverteilung von Eulerprodukten, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen II Math.-Phys. Kl. (1977) nr. 1, 1-17.
[23] ———, Zur Universalität und Hypertranszendenz der Dedekindschen Zetafunktion, Abh. Braunschweig. Wiss. Ges. 33 (1982) 197-203.
[24] S. M. Voronin, Theorem on the "universality" of the Riemann zeta-function, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 39 (1975) 475-486 (in Russian) = Math. USSR Izv. 9 (1975) 443-453.
[25] J. L. Walsh, Interpolation and Approximation by Rational Functions in the Complex Domain, Amer. Math. Soc. Coll. Publ. vol. 20, 1960.

[LM] A. Laurinčikas - K. Matsumoto, The universality of zeta-functions attached to certain cusp forms, submitted.