数理解析研究所講究録
1091 巻 1999 年 56-63

Rademacher constant, Atkin's inner product, and zeros of elliptic modular functions.

九大数理学 金子昌信 (Masanobu Kaneko)

H.Rademacher は [1] において，楕円モジュラー関数

$$j(\tau)=\frac{E_4(\tau)^3}{\Delta(\tau)}=\frac{\left(1+240\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{d|n}d^3\right)q^n\right)^3}{q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24}}\quad (q=e^{2\pi i\tau})$$

$$=\frac{1}{q}+744+\sum_{n=1}^{\infty}c_nq^n\quad \left(\begin{array}{l}c_n\in\mathbb{N}\\ c_1=196884,\cdots\end{array}\right)$$

の Fourier 係数の公式 (それは H.Petersson [2] によって 6 年前に全く別の方法で与えられていたが彼はそれを知らなかった。)：

Th. (Petersson(1932) - Rademacher(1938))

$$\forall n\geqq 1,\quad c_n=\frac{2\pi}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{S(n,-1;k)}{k}I_1\left(\frac{4\pi\sqrt{n}}{k}\right),$$

ここに
$$S(n,m;k):=\sum_{\substack{0\le h<k\\(h,k)=1\\hh'\equiv 1\ (k)}}e^{\frac{2\pi i}{k}(nh+mh')}\quad \text{(Kloosterman 和)}$$

$$I_1(x)=\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{(x/2)^{2\ell+1}}{\ell!(\ell+1)!}\quad \text{(第1種変形 Bessel 関数)}$$

を与えたあと，この公式の右辺は $n=0$ でも有限の値 24 に収束することを述べ，それは本来の 744 には合わないが，公式を導く際の議論に $j(\tau)$ の定数項は関与しないから一致を期待する理由もない，と書いている．

定数項が 24 である j-関数，即ち $j(\tau)-720$ は Leech lattice のテータ級数と判別式 $\Delta(\tau)$ の比としても表せる：

$$j(\tau)-720=\frac{\Theta_{Leech}(\tau)}{\Delta(\tau)}.$$

さらに，Atkin の内積（後述）という，Hecke 作用素から canonical に定まるある内積から定まる直交多項式系 $\{A_n(j)\}_{n\geq 0}$ $(j=j(\tau))$ の 1 次の entry $A_1(j)$ が

$$A_1(j(\tau))=j(\tau)-720 .$$

である。このことは，「"正しい j" は $j(\tau)-720$ である」という（意味があるかは分からない）思い込みに 3 番目の根拠を与えるように思えたのであったが，実ははじめの Rademacher とこの Atkin は 2 つにして 1 つであった。（この際 3 つは 1 つと言えないものか）.

講演ではこの（2 つにして 1 つという）観察を述べ，同じこと

が $\Gamma_0(2), \Gamma_0(3), \Gamma_0(4)$ についても成り立っているらしいことを報告したが，その後の Borcherds からの私信によって一般的な様子がわかったので，それを紹介したい。

はじめに Atkin の内積の定義を天下り的に述べる．

$$V := \left\{ f \;\middle|\; \begin{array}{l}\text{上半平面上正則}\\ \infty \text{で有理型}\end{array},\ SL_2(\mathbb{Z})\text{-不変} \right\}$$

$$\simeq \mathbb{C}[j], \quad j = j(\tau).$$

$V \ni f, g$ に対し

$(f, g) := f(\tau)g(\tau)E_2(\tau)$ の $q = e^{2\pi i\tau}$ 展開の定数項．

$$E_2(\tau) = 1 - 24\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{d|n} d\Big)q^n \quad \Big(= q\frac{d}{dq}\log\Delta(\tau)\Big).$$

この内積に関し Hecke 作用素 $\{T_n\}_{n\geq 1}$ は self-adjoint であり $((T_n(f), g) = (f, T_n(g))\ \forall n, \forall f, g)$ （このことと，(f, g) が積 fg にのみ依るということから内積は一意（up to const.）に決まる），$\mathbb{R}[j]$ 上正定値，その直交多項式系 $\{A_n(j)\}_{n\geq 0}$ $(A_n(j) = j^n + \cdots \in \mathbb{Q}[j])$ は標数 p の超特異楕円曲線の j-不変量の標数 0 への持ち上げを与えている．（cf. [3]，又 数研講究録 775, 844, 925 の拙文）

ところで Atkin はどこからこのような内積の定義に到ったか？ 実は彼の Bonn での講演ノート（これが彼が書いたこの内積に関して唯一の文献）にそのよって来たるところが述べられてあり，それは R. Rankin による，Eisenstein 級数の零点に関する論文[4]である。そこで Rankin は，modular form の $\mathfrak{H}$ 上の零点における j-関数の値を留数定理から計算し，量 $(j^n, 1)$ に導かれている。そして，我々の言葉でいうと，内積 $(\ ,\ )$ が $\mathbb{R}[j]$ 上正定値でないと仮定すると，十分大きな k に対しては，Eisenstein 級数

$$E_k(\tau) := \frac{1}{2}\sum_{\substack{c,d\in\mathbb{Z}\\(c,d)=1}}\frac{1}{(c\tau+d)^k}$$

$$= 1-\frac{2k}{B_k}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{d|n}d^{k-1}\Big)q^n \qquad B_k: ベルヌーイ数$$

の基本領域 $\mathfrak{F}=\{\tau\in\mathfrak{H}\mid |\tau|\geqq 1,\ -\frac{1}{2}\leqq \mathrm{Re}(\tau)<\frac{1}{2},\ |\tau|=1\Rightarrow \mathrm{Re}(\tau)\leqq 0\}$ における零点について，それがすべて単位円 $|\tau|=1$ にのることはない，ということを証明している。この零点についてはそのすぐ後，F. Rankin と Swinnerton-Dyer [5] によって，$\mathfrak{F}$ 内の $E_k(\tau)$ の零点はすべて $|\tau|=1$ 上にあることが（実に elementary に）証明された。そこでは Atkin 内積に関係するような議論は何もない。

$\mathcal{F}$内の零点というかわりに j-関数を用いると Rankin, Swinnerton-Dyer の定理は

$$\forall k \geq 4 \text{ に対し, } E_k(\tau_0)=0 \Rightarrow j(\tau_0) \in [0, 1728]$$

ということになる。面白いことに $A_n(j)$ もまた, そのすべての根が区間 $(0, 1728)$ に入る ([6]). 同じ性質をもつ modular form は他にも見つかっているが, 互いの関係や, 何故そのような現象が起こるのかはまだよくわかっていない。

さて Rademacher constant である.

$f \in V$ に対し, その定数項を $c_0(f)$, そして, $n \geq 1$ に対する q^n の係数に対して Petersson-Rademacher の公式と同様の級数を用意し (自分は Rademacher の circle-method を用いた), $n \to 0$ とするとこれはやはり収束するのでその値を $c_0^{(R)}(f)$ とする. このとき,

$$(f, 1) = c_0(f) - c_0^{(R)}(f).$$

(内積は積によらないので $(*, 1)$ ですべてが決まっている)

これは, $c_0^{(R)}(f)$ が f の主要部のみから定まり,

$$f(\tau) = \frac{a_m}{q^m} + \frac{a_{m-1}}{q^{m-1}} + \cdots + \frac{a_1}{q} + c_0(f) + O(q)$$

とすると $C_0^{(R)}(f) = \sum_{j=1}^{m} 24\sigma_1(j) a_j$ と計算される
ことから従う.

ところで S. Norton は [7] で, この $C_0^{(R)}(f)$ の計算は
$SL_2(\mathbb{Z})$ と commensurable な任意の群 Γ に関する任意
の有理型 modular 関数 f (wt 0) に対して適用できて,
それによって, このような関数全体 (群 Γ も動かす) の
空間上の $PSL_2(\mathbb{Q})^+$ 不変な linear functional $f \mapsto C_0^{(R)}(f)$
が (up to const. で一意に) 定まることを証明抜きで
("fairly clear" と) 述べている (一意性は証明され
ている, この $C_0^{(R)}(f)$ を f の Rademacher constant と呼ぶ)
一方 R. Borcherds (私信) は, このような linear functional
が,

$$f \longmapsto \text{“}\int_{\Gamma\backslash\mathfrak{H}} f(\tau)\frac{dx\,dy}{y^2}\text{”} \quad (\tau = x+iy)$$

として定義できることを示した. ここで積分は, まず $\Gamma\backslash\mathfrak{H}$
のある基本領域から cusp と極のまわりの小さな horocycle,
disk を切り取ったものの上で行って, 極限をとる, という
もので, これで well-defined になることが示せるという.
すると一意性からこれが Rademacher constant に (定
数倍を normalize すれば) 等しいことが従う (, $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$

のときはこの積分の計算が[8]に書かれてあって(Borcherds は Lerche-Schellekens-Warner という物理学者の論文を引用している) $(f, 1)$ が出てくることがわかる。又 Hecke 作用素が Atkin 内積に関して self-adjoint になる理由も積分表示乃至は $PSL_2(\mathbb{Q})^+$ 不変性から明瞭となる。

Atkin の内積を合同群に拡張する試みは九大の小池正夫氏や島根大の堤裕之君が行っているが、その場合の Rademacher constant との関係も Borcherds の積分を経由することにすれば Petersson-Rademacher series を計算せずとも導かれる。(これは堤君がいずれ発表すると思う。)

従って、Rademacher constant の話と Atkin 内積の話が実は同じというのは、Norton-Borcherds によってすっきり説明されることになった。ただ問題は一般の場合について、両者とも、特に Norton の言明 ($PSL_2(\mathbb{Q})^+$ 不変な functional の存在)の証明が発表されていない。ここは決して "clear" とは言えない箇所であると思うのであるが。

以下、引用文献のリストです。(引用順)

1. H. Rademacher: The Fourier Coefficients of the Modular Invariant $J(\tau)$, Amer. J. Math. 60 (1938), 501-512.
2. H. Petersson: Über die Entwicklungskoeffizienten der Automorphen Formen, Acta Math. 58 (1932), 169-215.
3. M. Kaneko - D. Zagier; Supersingular j-invariants, Hypergeometric Series, and Atkin's Orthogonal Polynomials, AMS/IP Studies in Advanced Mathematics vol. 7 (1998), 97-126.
4. R. Rankin; The Zeros of Eisenstein Series, Publ. Ramanujan Inst. no. 1 (1969), 137-144.
5. F.K.C. Rankin & H. Swinnerton-Dyer: On the Zeros of Eisenstein Series, Bull. London Math. Soc. 2 (1970), 169-170.
6. M. Kaneko: On the Zeros of Certain Modular Forms, to appear in the Proceedings of the conference at RIMS (1997) on analytic number theory, ed. by S. Kanemitsu, (Kluwer).
7. S. Norton: More on Moonshine, in Computational Group Theory (1984), (Academic Press), 185-193.
8. R. Borcherds: Automorphic Forms with Singularities on Grassmannians, Inv. Math. 132. (1998), 491-562.