

ON AN INHOMOGENEOUS DIOPHANTINE APPROXIMATION PROBLEM OF e

三重大教育 小松 尚夫 (TAKAO KOMATSU)

1. 序論

θ を無理数、 ϕ を実数とし、 $q\theta - \phi$ がどんな整数 q を取っても整数にならないものとする。
このようなペア θ, ϕ に対して 非斉次近似定数

$$\mathcal{M}(\theta, \phi) = \liminf_{|q| \rightarrow \infty} |q| \|q\theta - \phi\|$$

を定義する。また、補助定数として

$$\mathcal{M}_+(\theta, \phi) = \liminf_{q \rightarrow +\infty} q \|q\theta - \phi\|$$

及び

$$\mathcal{M}_-(\theta, \phi) = \liminf_{q \rightarrow +\infty} q \|q\theta + \phi\| = \liminf_{q \rightarrow -\infty} |q| \|q\theta - \phi\|.$$

を定義しておく。すなわち、 $\mathcal{M}(\theta, \phi) = \min(\mathcal{M}_+(\theta, \phi), \mathcal{M}_-(\theta, \phi))$ である。(これらの逆数であるLagrange定数を研究している者もいる。) $\mathcal{M}(\theta, \phi)$ や $\mathcal{M}_+(\theta, \phi)$ の値については、1950年代にCassels [1], Descombes [4], Sós [11]などによりその評価が研究されてきたが、その後殆ど進展がなく、具体的なペア θ, ϕ (例えば $\theta = \sqrt{2}, \phi = 1/2$)に対して $\mathcal{M}(\theta, \phi)$ の値がどうなるかは全く知られることがなかった。しばらくして1994年に、Cusickなど[2]が Sósのアルゴリズムを用いて、具体的な $\mathcal{M}(\theta, \phi)$ の値を求め、 $\theta = (1 + \sqrt{5})/2 = [1; 1, 1, 1, \dots]$ のときに $\mathcal{M}(\theta, 1/2) = 1/(4\sqrt{5})$, $\mathcal{M}(\theta, 1/\sqrt{5}) = 1/(5\sqrt{5})$ 等を示した。しかしこの論文では、アルゴリズムと $\mathcal{M}(\theta, \phi)$ との関係が明確ではなく、gapが多かった。更に1997年には著者[5]によって、 $\min \|q\theta + \phi\|$ を考えることにより $\mathcal{M}(\theta, \phi)$ の値を求める方法が与えられ、 $\theta = (\sqrt{a^2 + 4} - a)/2 = [0; a, a, a, \dots]$ のときに $\mathcal{M}(\theta, 1/2) = 1/(4\sqrt{a^2 + 4})$, $\mathcal{M}(\theta, 1/\sqrt{a^2 + 4}) = 1/((a^2 + 4)\sqrt{a^2 + 4})$, $\mathcal{M}(\theta, 1/a) = 1/(a^2\sqrt{a^2 + 4})$ 等が示された。しかし、この方法は求め方があまりに煩雑なばかりか、異なるパターンの連分数展開をもつ θ (例えば $\theta = \sqrt{3} = [1; 1, 2, 1, 2, \dots]$ など) に対しては、全く応用がきかなかった。

最近になって、著者[6]は西岡塩川田村のアルゴリズム[9]により $\mathcal{M}(\theta, \phi)$ の値が比較的簡単に求められることを発見した。これにより、例えば $\theta = (\sqrt{ab(ab + 4)} - ab)/(2a) = [0; a, b, a, b, \dots]$ のときに $\mathcal{M}(\theta, 1/2) = b/(4\sqrt{D})$ (a, b とも奇数で $a > b$); $a/(4\sqrt{D})$ (それ以外), $\mathcal{M}(\theta, 1/\sqrt{D}) = a/(D\sqrt{D})$, $\mathcal{M}(\theta, 1/d) = a/(d^2\sqrt{D})$ (d は1以外の a の約数) 等が示された。ここで $D = ab(ab + 4)$ としている。そればかりか、この方法によれば、 θ が実2次無理数で $\phi \in \mathbb{Q}(\theta)$ であるどんなペア θ, ϕ に対しても $\mathcal{M}(\theta, \phi)$ の値が実際に求められるのである。(このような θ の連分数展開は循環節をもち、 ϕ の θ による表現も循環することが知られている[7].)

それでは、連分数展開が循環しないような θ については、 $\mathcal{M}(\theta, \phi)$ を求めることができないのだろうか？実は、循環しなくても e のように擬似循環すれば、[6]で得た方法により計算が可能である。その事実を、具体例により幾つか見てみたいと思う。

2. 西岡-塩川-田村のアルゴリズム

まず最初に、西岡-塩川-田村のアルゴリズムと $\mathcal{M}_-(\theta, \phi)$ との関係を見てみよう。
 $\theta = [a_0; a_1, a_2, \dots]$ を単純連分数展開として、

$$\begin{aligned} \theta &= a_0 + \theta_0, & a_0 &= [\theta], \\ 1/\theta_{n-1} &= a_n + \theta_n, & a_n &= [1/\theta_{n-1}] \quad (n = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

によって生成されるものとする。 θ の k 次近似 $p_k/q_k = [a_0; a_1, \dots, a_k]$ は、漸化式

$$\begin{aligned} p_k &= a_k p_{k-1} + p_{k-2} \quad (k = 0, 1, \dots), & p_{-2} &= 0, & p_{-1} &= 1, \\ q_k &= a_k q_{k-1} + q_{k-2} \quad (k = 0, 1, \dots), & q_{-2} &= 1, & q_{-1} &= 0 \end{aligned}$$

によって与えられる。そして、数列 $\{\theta_0, \theta_1, \dots\}$ による ϕ の表現 (非斉次連分数展開)
 $\phi = [b_0; b_1, b_2, \dots,]$ を

$$\begin{aligned} \phi &= b_0 - \phi_0, & b_0 &= [\phi], \\ \phi_{n-1}/\theta_{n-1} &= b_n - \phi_n, & b_n &= [\phi_{n-1}/\theta_{n-1}] \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

によって与える。すると ϕ は

$$\begin{aligned} \phi &= b_0 - b_1 \theta_0 + b_2 \theta_0 \theta_1 - \dots + (-1)^k b_k \theta_0 \theta_1 \dots \theta_{k-1} - (-1)^k \theta_0 \theta_1 \dots \theta_{k-1} \phi_k \\ &= b_0 - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k b_{k+1} \theta_0 \theta_1 \dots \theta_k = b_0 - \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+1} D_k \end{aligned}$$

と表される。ここで $D_k = q_k \theta - p_k = (-1)^k \theta_0 \theta_1 \dots \theta_k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) としている。
 以上のアルゴリズムと $\mathcal{M}_-(\theta, \phi)$ との関係として次のことが知られている [6]。

定理A.

$$\mathcal{M}_-(\theta, \phi) = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \min(B_n \|B_n \theta + \phi\|, B_n^* \|B_n^* \theta + \phi\|),$$

ここで $B_n = \sum_{k=1}^n b_k q_{k-1}$ 及び $B_n^* = B_n - q_{n-1}$ 。

注. 更に $B_n \|B_n \theta + \phi\| = B_n |D_{n-1}| \phi_n$ 及び $B_n^* \|B_n^* \theta + \phi\| = (B_n - q_{n-1}) |D_{n-1}| (1 - \phi_n)$ である事実から、 $\mathcal{M}_+(\theta, \phi) = \mathcal{M}_-(\theta, 1 - \phi)$ と合わせて $\mathcal{M}(\theta, \phi)$ が求められる。

3. $\theta = e$ の場合

θ の連分数展開が擬似循環して、

$$\theta = [c_0; c_1, \dots, c_n, \overline{Q_1(k), \dots, Q_p(k)}]_{k=1}^{\infty},$$

と表される場合、 θ を Hurwitzian number であるという。ここで、 c_0 は整数、 c_1, \dots, c_n は正の整数、 $Q_1(k), \dots, Q_p(k)$ は有理係数をもつ多項式で、 $k = 1, 2, \dots$ に対して正整数値を取り、少なくとも1つの多項式は定数ではないものとする。 $Q_1(k), \dots, Q_p(k)$ は擬似循環節と呼ばれる ([3], [8], [10]等を参照)。

最も典型的な Hurwitzian number である

$$e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, \dots] = [2; \overline{1, 2k, 1}]_{k=1}^{\infty}$$

を取り上げてみよう。このとき、

$$a_{3n-2} = a_{3n} = 1, \quad a_{3n-1} = 2n \rightarrow \infty \quad (n = 1, 2, \dots \rightarrow \infty)$$

及び

$$\theta_{3n-2} = [0; 2n, 1, 1, 2n+2, 1, 1, 2n+4, \dots] \rightarrow 0$$

$$\theta_{3n-1} = [0; 1, 1, 2n+2, 1, 1, 2n+4, 1, \dots] \rightarrow \frac{1}{2} \quad (n = 1, 2, \dots, \rightarrow \infty).$$

$$\theta_{3n} = [0; 1, 2n+2, 1, 1, 2n+4, 1, 1, \dots] \rightarrow 1$$

に注意する。

次に $\phi = 1/4$ と取ってみると、西岡-塩川-田村のアルゴリズムにより、

$$\frac{1}{4} = \theta \left[1; 2, 3, 2, 2, 4, 1, 1, \frac{3a_{12k-4} - 2}{4}, 1, \right. \\ \left. 1, \frac{3}{4}a_{12k-1}, 2, 1, \frac{a_{12k+2} - 6}{4}, 1, 1, \frac{1}{4}a_{12k+5}, 2 \right]_{k=1}^{\infty}$$

と表される。また

$$\begin{aligned} \phi_0 &= \frac{3}{4}, & \phi_1 &= \frac{5 - 3\theta_1}{4}, & \phi_2 &= \frac{5(1 - \theta_2)}{4}, \\ \phi_3 &= 2 - \frac{5}{4}\theta_3, & \phi_4 &= \frac{5}{4} - 2\theta_4, & \phi_5 &= 1 - \frac{5}{4}\theta_5, \end{aligned}$$

かつ $n = 1, 2, \dots \rightarrow \infty$ に対して

$$\begin{aligned} \phi_{12n-6} &= \frac{5}{4} - \theta_{12n-6} \rightarrow \frac{1}{4}, & \phi_{12n-5} &= \frac{3 - 5\theta_{12n-5}}{4} \rightarrow \frac{3}{4}, \\ \phi_{12n-4} &= \frac{3}{4}(1 - \theta_{12n-4}) \rightarrow \frac{3}{8}, & \phi_{12n-3} &= 1 - \frac{3}{4}\theta_{12n-3} \rightarrow \frac{1}{4}, \\ \phi_{12n-2} &= \frac{3}{4} - \theta_{12n-2} \rightarrow \frac{3}{4}, & \phi_{12n-1} &= 1 - \frac{3}{4}\theta_{12n-1} \rightarrow \frac{5}{8}, \\ \phi_{12n} &= \frac{7}{4} - \theta_{12n} \rightarrow \frac{3}{4}, & \phi_{12n+1} &= \frac{1 - 7\theta_{12n+1}}{4} \rightarrow \frac{1}{4}, \\ \phi_{12n+2} &= \frac{1}{4}(1 - \theta_{12n+2}) \rightarrow \frac{1}{8}, & \phi_{12n+3} &= 1 - \frac{1}{4}\theta_{12n+3} \rightarrow \frac{3}{4}, \\ \phi_{12n+4} &= \frac{1}{4} - \theta_{12n+4} \rightarrow \frac{1}{4}, & \phi_{12n+5} &= 1 - \frac{1}{4}\theta_{12n+5} \rightarrow \frac{7}{8} \end{aligned}$$

となる。実際に値を計算するために、次の事実を使う。

補助定理. e の連分数展開

$$e = [2; \overline{1, 2k, 1}]_{k=1}^{\infty}$$

において

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} q_{3n} |D_{3n-1}| &= \frac{1}{2}, & \lim_{n \rightarrow \infty} q_{3n-1} |D_{3n-1}| &= \frac{1}{2}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} q_{3n+1} |D_{3n}| &= 1, & \lim_{n \rightarrow \infty} q_{3n} |D_{3n}| &= \frac{1}{2}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} q_{3n+2} |D_{3n+1}| &= 1, & \lim_{n \rightarrow \infty} q_{3n+1} |D_{3n+1}| &= 0 \end{aligned}$$

が成り立つ。

証明.

$$\frac{q_{3n-2}}{q_{3n-1}} = \frac{1}{2n + q_{3n-3}/q_{3n-2}} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

であるから、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} q_{3n+2} |D_{3n+1}| &= \lim_{n \rightarrow \infty} q_{3n-1} |D_{3n-2}| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \theta_{3n-1} q_{3n-2}/q_{3n-1}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \cdot 0} = 1 \end{aligned}$$

故に $q_{3n-1} |D_{3n-1}| = q_{3n-1} |D_{3n-2}| \theta_{3n-1} \rightarrow 1 \cdot 1/2 = 1/2 \quad (n \rightarrow \infty)$. また、

$$\frac{q_{3n-1}}{q_{3n}} = \frac{1}{1 + q_{3n-2}/q_{3n-1}} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty)$$

であることから、

$$q_{3n} |D_{3n}| = \frac{1}{(1 + \theta_{3n+1}) + q_{3n-1}/q_{3n}} \rightarrow \frac{1}{1 + 0 + 1} = \frac{1}{2} \quad (n \rightarrow \infty)$$

それ故 $q_{3n} |D_{3n-1}| = q_{3n} |D_{3n}| / \theta_{3n} \rightarrow 1/2 \cdot 1 = 1/2$ である。最後に

$$q_{3n+1} |D_{3n+1}| = \frac{1}{2n+2} (q_{3n+2} |D_{3n+1}| - q_{3n} |D_{3n}| \theta_{3n+1}) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

及び

$$q_{3n+1} |D_{3n}| = \frac{1}{1 + \theta_{3n+1} \cdot q_{3n}/q_{3n+1}} \rightarrow \frac{1}{1 + 0} = 1 \quad (n \rightarrow \infty)$$

がいえる。□

さて、 $n = 0, 1, 2, \dots$ に対して

$$\begin{aligned} B_{12n-6} &= 2q_0 + 3q_1 + 2q_2 + 2q_3 + 4q_4 + q_5 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(q_{12i-6} + \frac{3a_{12i-4} - 2}{4} q_{12i-5} \right. \\ &\quad \left. + q_{12i-4} + q_{12i-3} + \frac{3}{4} a_{12i-1} q_{12i-2} + 2q_{12i-1} + q_{12i} \right. \\ &\quad \left. + \frac{a_{12i+2} - 6}{4} q_{12i+1} + q_{12i+2} + q_{12i+3} + \frac{1}{4} q_{12i+4} + 2q_{12i+5} \right) \\ &= q_6 + \frac{5}{4} q_5 - \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} \left(q_{12i+6} + \frac{5}{4} q_{12i+5} - q_{12i-6} - \frac{5}{4} q_{12i-7} \right) \\ &= q_{12n-6} + \frac{5}{4} q_{12n-7} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

であるから、補助定理より

$$\begin{aligned} B_{12n-6} \|B_{12n-6}\theta + \phi\| &= B_{12n-6} \phi_{12n-6} |D_{12n-7}| \\ &= \left(q_{12n-6} |D_{12n-7}| + \frac{5}{4} q_{12n-7} |D_{12n-7}| - \frac{1}{2} |D_{12n-7}| \right) \phi_{12n-6} \\ &\rightarrow \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot 0 \right) \cdot \frac{1}{4} = \frac{9}{32} \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

及び

$$\begin{aligned} B_{12n-6}^* \|B_{12n-6}^*\theta + \phi\| &= (B_{12n-6} - q_{12n-7})(1 - \phi_{12n-6}) |D_{12n-7}| \\ &= \left(q_{12n-6} |D_{12n-7}| + \frac{1}{4} q_{12n-7} |D_{12n-7}| - \frac{1}{2} |D_{12n-7}| \right) (1 - \phi_{12n-6}) \\ &\rightarrow \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot 0 \right) \left(1 - \frac{1}{4} \right) = \frac{15}{32} \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

が成り立つ。また補助定理を使って

$$\begin{aligned} B_{12n-5} \|B_{12n-5}\theta + \phi\| &= (B_{12n-6} + q_{12n-6}) \phi_{12n-5} |D_{12n-6}| \\ &= \left(\frac{5}{4} q_{12n-5} |D_{12n-6}| + \frac{3}{4} q_{12n-6} |D_{12n-6}| - \frac{1}{2} |D_{12n-6}| \right) \phi_{12n-5} \\ &\rightarrow \left(\frac{5}{4} \cdot 1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot 0 \right) \cdot \frac{3}{4} = \frac{39}{32} \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

を得る。\$B_{12n-5}^* = B_{12n-5} - q_{12n-6} = B_{12n-6}\$ であるから、

$$B_{12n-5}^* \|B_{12n-5}^*\theta + \phi\| = B_{12n-6} \|B_{12n-6}\theta + \phi\| \rightarrow \frac{9}{32} \quad (n \rightarrow \infty)$$

が言える。同様にして、

$$\begin{aligned} B_{12n-4} \|B_{12n-4}\theta + \phi\| &= B_{12n-3}^* \|B_{12n-3}^*\theta + \phi\| \rightarrow \frac{9}{32}, \\ B_{12n-4}^* \|B_{12n-4}^*\theta + \phi\| &\rightarrow \frac{15}{32}, \quad B_{12n-2} \|B_{12n-2}\theta + \phi\| \rightarrow \frac{33}{32}, \\ B_{12n-3} \|B_{12n-3}\theta + \phi\| &= B_{12n-2}^* \|B_{12n-2}^*\theta + \phi\| \rightarrow \frac{7}{32}, \\ B_{12n-1} \|B_{12n-1}\theta + \phi\| &\rightarrow \frac{15}{32}, \quad B_{12n-1}^* \|B_{12n-1}^*\theta + \phi\| \rightarrow \frac{9}{32}, \\ B_{12n} \|B_{12n}\theta + \phi\| &= B_{12n+1}^* \|B_{12n+1}^*\theta + \phi\| \rightarrow \frac{33}{32}, \\ B_{12n}^* \|B_{12n}^*\theta + \phi\| &\rightarrow \frac{7}{32}, \quad B_{12n+1} \|B_{12n+1}\theta + \phi\| \rightarrow \frac{15}{32}, \\ B_{12n+2} \|B_{12n+2}\theta + \phi\| &= B_{12n+3}^* \|B_{12n+3}^*\theta + \phi\| \rightarrow \frac{1}{32}, \\ B_{12n+2}^* \|B_{12n+2}^*\theta + \phi\| &\rightarrow \frac{7}{32}, \quad B_{12n+4} \|B_{12n+4}\theta + \phi\| \rightarrow \frac{9}{32}, \\ B_{12n+3} \|B_{12n+3}\theta + \phi\| &= B_{12n+4}^* \|B_{12n+4}^*\theta + \phi\| \rightarrow \frac{15}{32}, \\ B_{12n+5} \|B_{12n+5}\theta + \phi\| &\rightarrow \frac{7}{32}, \quad B_{12n+5}^* \|B_{12n+5}^*\theta + \phi\| \rightarrow \frac{1}{32} \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

を求めることができる。以上より、 $\mathcal{M}_-(\theta, \phi) = \mathcal{M}_-(e, 1/4) = 1/32$ が得られる。

一方、 $1 - \phi = 3/4$ は

$$\frac{3}{4} = \theta[1; 1, 2, 1, 1, 3, 2, 2, 7, 2, 1, 1, 2, 1, \overline{\frac{3a_{12k+2} - 2}{4}}, 1, 1, \frac{3}{4}a_{12k+5}, 2, \overline{1, \frac{a_{12k+8} - 6}{4}, 1, 1, \frac{1}{4}a_{12k+11}, 2}]_{k=1}^{\infty}$$

と表され、同様にして

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_+(\theta, \phi) &= \mathcal{M}_-(e, \frac{3}{4}) = \lim_{n \rightarrow \infty} B_{12n+8} |D_{12n+7}| \phi_{12n+8} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_{12n+8} |D_{12n+7}| + q_{12n+7} |D_{12n+7}|}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot (1 - \theta_{12n+8}) \\ &= \frac{1+0}{4} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{32} \end{aligned}$$

を得る。従って次の結果がわかる。

定理 1.

$$\mathcal{M}(e, \frac{1}{4}) = \frac{1}{32}$$

以上と同様な方法で、

$$\mathcal{M}(e, \frac{1}{2}) = \frac{1}{8}, \quad \mathcal{M}(e, \frac{1}{3}) = \frac{1}{18}, \quad \mathcal{M}(e, \frac{1}{5}) = \frac{1}{50}, \quad \mathcal{M}(e, \frac{1}{6}) = \frac{1}{72}$$

なども次々と求められる。従って、次のように予想するのはごく自然である。

予想 1. 2以上の任意の整数 l に対して

$$\mathcal{M}(e, \frac{1}{l}) = \frac{1}{2l^2}.$$

しかし、各 l に対して ϕ の θ による表現（非斉次連分数展開）のパターンがかなり異なるため、簡単には一般化できない。よって、証明は思っているほど容易にはできそうにない。

4. e 以外の HURWITZIAN NUMBER

2以上の整数 s に対して

$$e^{1/s} = [1; s-1, 1, 1, 3s-1, 1, 1, 5s-1, 1, 1, \dots] = [1; \overline{(2k-1)s-1, 1, 1}]_{k=1}^{\infty}$$

も、よく知られている Hurwitzian number の一つである。このとき、

$$a_{3n-1} = a_{3n} = 1, \quad a_{3n-2} = (2n-1)s-1 \rightarrow \infty \quad (n = 1, 2, \dots \rightarrow \infty)$$

及び $n = 1, 2, \dots, \rightarrow \infty$ に対して

$$\theta_{3n-2} = [0; 1, 1, (2n+1)s-1, 1, 1, (2n+3)s-1, \dots] \rightarrow \frac{1}{2}$$

$$\theta_{3n-1} = [0; 1, (2n+1)s-1, 1, 1, (2n+3)s-1, 1, \dots] \rightarrow 1$$

$$\theta_{3n} = [0; (2n+1)s-1, 1, 1, (2n+3)s-1, 1, 1, \dots] \rightarrow 0$$

に注意する。更に、上記の補助定理に対応するものとして、次の補助定理*が成り立つ。

補助定理*. $e^{1/s}$ の連分数展開

$$e^{1/s} = [1; \overline{(2k-1)s-1, 1, 1}]_{k=1}^{\infty}$$

において

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} q_{3n-1} |D_{3n-2}| &= \frac{1}{2}, & \lim_{n \rightarrow \infty} q_{3n-2} |D_{3n-2}| &= \frac{1}{2}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} q_{3n} |D_{3n-1}| &= 1, & \lim_{n \rightarrow \infty} q_{3n-1} |D_{3n-1}| &= \frac{1}{2}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} q_{3n+1} |D_{3n}| &= 1, & \lim_{n \rightarrow \infty} q_{3n} |D_{3n}| &= 0 \end{aligned}$$

が成り立つ。

そこで、 $\theta = e$ の場合と同様にして $\theta = e^{1/s}$ についても、 $\phi = 1/2, 1/3, 1/4, \dots$ と次々に $\mathcal{M}(e^{1/s}, \phi)$ の値を計算していくと、次のことが自然に予想される。

予想2. 2以上の任意の整数 l に対して

$$\mathcal{M}(e^{1/s}, \frac{1}{l}) = \frac{1}{2l^2} \quad \text{or} \quad 0.$$

ただし、どんなときに値が0になるかの予想は難しい。参考までに、 $l \leq 30$ についての結果を記しておく。 l が偶数のときは、0になる場合は見つからなかった (勿論 $l > 30$ については、確かめられていない)。

l	$\{s \pmod{l} : \mathcal{M}(e^{1/s}, 1/l) = 0\}$
3	2
5	3
7	1,3,4,5
9	5
11	1,3,5,6,8
13	1,3,4,5,6,7,9,11
15	8
17	4,5,6,8,9,11
19	5,6,8,9,10,11,12,18
21	5,8,11,17
23	2,5,6,10,11,15,16,19,21
25	3,8,18
27	5,14
29	5,16,19,25,27

また、 $e^{1/s}$ の派生である次のような値 ($e^{1/s}$ の方がこれらの値の派生である、というべきかもしれない。Cf. [10]) を θ として取ることも考えた。

$$\frac{e^{1/s} - 1}{e^{1/s} + 1} = [0; 2s, 6s, 10s, \dots] = [0; \overline{(4k-2)s}]_{k=1}^{\infty} \quad (s \text{ は } 2 \text{ 以上の整数})$$

または

$$\frac{e^{2/s} - 1}{e^{2/s} + 1} = [0; s, 3s, 5s, \dots] = [0; \overline{(2k-1)s}]_{k=1}^{\infty} \quad (s \text{ は } 3 \text{ 以上の奇数}).$$

これらの θ に対して、筆者は次の結果を得ている。

定理 2.

$$\mathcal{M}\left(\frac{e^{1/s}-1}{e^{1/s}+1}, \frac{e^{1/s}}{e^{1/s}+1}\right) = \frac{1}{4}, \quad \mathcal{M}\left(\frac{e^{1/s}-1}{e^{1/s}+1}, \frac{1}{2}\right) = \mathcal{M}\left(\frac{e^{1/s}-1}{e^{1/s}+1}, \frac{1}{3}\right) = 0,$$

$$\mathcal{M}\left(\frac{e^{2/s}-1}{e^{2/s}+1}, \frac{e^{2/s}}{e^{2/s}+1}\right) = \mathcal{M}\left(\frac{e^{2/s}-1}{e^{2/s}+1}, \frac{1}{2}\right) = \mathcal{M}\left(\frac{e^{2/s}-1}{e^{2/s}+1}, \frac{1}{3}\right) = 0.$$

REFERENCES

- [1] J. W. S. Cassels, *Über $\lim_{x \rightarrow +\infty} x|\vartheta x + \alpha - y|$* , Math. Ann. **127** (1954), 288–304.
- [2] T. W. Cusick, A. M. Rockett and P. Szűsz, *On inhomogeneous Diophantine approximation*, J. Number Theory **48** (1994), 259–283.
- [3] C. S. Davis, *On some simple continued fractions connected with e* , J. London Math. Soc. **20** (1945), 194–198.
- [4] R. Descombes, *Sur la répartition des sommets d'une ligne polygonale régulière non fermée*, Ann. Sci. École Norm Sup. **73** (1956), 283–355.
- [5] T. Komatsu, *On inhomogeneous continued fraction expansion and inhomogeneous Diophantine approximation*, J. Number Theory **62** (1997), 192–212.
- [6] ———, *On inhomogeneous Diophantine approximation and the Nishioka-Shiokawa-Tamura algorithm*, Acta Arith. (to appear).
- [7] ———, *Substitution invariant inhomogeneous Beatty sequences*, Tokyo J. Math. (to appear).
- [8] K. R. Matthews and R. F. C. Walters, *Some properties of the continued fraction expansion of $(m/n)e^{1/q}$* , Proc. Cambridge Philos. Soc. **67** (1970), 67–74.
- [9] K. Nishioka, I. Shiokawa and J. Tamura, *Arithmetical properties of a certain power series*, J. Number Theory **42** (1992), 61–87.
- [10] O. Perron, *Die Lehre von den Kettenbrüchen*, Chelsea reprint of 1929 edition.
- [11] V. T. Sós, *On the theory of Diophantine approximations, II*, Acta Math. Acad. Sci. Hung. **9** (1958), 229–241.

TAKAO KOMATSU
 FACULTY OF EDUCATION
 MIE UNIVERSITY
 514-8507 JAPAN
 komatsu@edu.mie-u.ac.jp

Abstract and Appendix

We consider the value $\mathcal{M}(\theta, \phi) = \liminf_{|q| \rightarrow \infty} |q| \|q\theta + \phi\|$ by using the algorithm of Nishioka, Shiokawa and Tamura (the NST algorithm) for a class of pairs θ, ϕ . It is known that the exact value of $\mathcal{M}(\theta, \phi)$ can be calculated if θ is a positive quadratic irrational and $\phi \in \mathbb{Q}(\theta)$. For example, $\mathcal{M}(\theta, 1/2) = b/(4\sqrt{D})$ (a and b are odd with $a > b$); $a/(4\sqrt{D})$ (otherwise), $\mathcal{M}(\theta, 1/\sqrt{D}) = a/(D\sqrt{D})$, $\mathcal{M}(\theta, 1/d) = a/(d^2\sqrt{D})$ (d is a divisor of a with $d > 1$), where $\theta = (\sqrt{ab(ab+4)} - ab)/(2a) = [0, a, b, a, b, \dots]$ and $D = ab(ab+4)$.

This paper reveals that the exact value of $\mathcal{M}(\theta, \phi)$ can be found even if θ is not a quadratic irrational but a Hurwitzian number, namely the continued fraction expansion of θ is $\theta = [c_0; c_1, c_2, \dots, c_n, \overline{Q_1(k), \dots, Q_p(k)}]_{k=1}^{\infty}$, where c_0 is an integer, c_1, \dots, c_n are positive integers, Q_1, \dots, Q_p are polynomials with rational coefficients which take positive integral values for $k = 1, 2, \dots$ and at least one of the polynomials is not constant. For example, $e = [2; \overline{1, 2k, 1}]_{k=1}^{\infty}$, $e^{1/s} = [1; \overline{(2k-1)s-1, 1, 1}]_{k=1}^{\infty}$ where s is an integer with $s > 1$, $(e^{1/s} - 1)/(e^{1/s} + 1) = [0; \overline{(4k-2)s}]_{k=1}^{\infty}$ where s is an integer with $s > 1$, $(e^{2/s} - 1)/(e^{2/s} + 1) = [0; \overline{(2k-1)s}]_{k=1}^{\infty}$ where s is odd with $s > 1$, or $\theta = [0; 1, 2, 3, \dots] = [0; \overline{k}]_{k=1}^{\infty}$.

Indeed, $\mathcal{M}(e, 1/2) = 1/8$, $\mathcal{M}(e, 1/3) = 1/18$, $\mathcal{M}(e, 1/4) = 1/32$, $\mathcal{M}(e, 1/5) = 1/50$, $\mathcal{M}(e, 1/6) = 1/72$, $\mathcal{M}(e, 1/7) = 1/98, \dots$ can be obtained. So, it is natural to conjecture $\mathcal{M}(e, 1/l) = 1/(2l^2)$ for any integer $l > 1$. In a similar manner, one can find that $\mathcal{M}(e^{1/s}, 1/l) = 1/(2l^2)$ if l is even with $l \leq 30$; $\mathcal{M}(e^{1/s}, 1/l) = 0$ or $1/(2l^2)$ if l is odd with $1 < l \leq 30$. It is conjectured that these facts are true for $l > 30$ too.

It is also obtained that $\mathcal{M}((e^{1/s} - 1)/(e^{1/s} + 1), e^{1/s}/(e^{1/s} + 1)) = 1/4$, $\mathcal{M}((e^{1/s} - 1)/(e^{1/s} + 1), 1/2) = \mathcal{M}((e^{1/s} - 1)/(e^{1/s} + 1), 1/3) = 0$, $\mathcal{M}((e^{2/s} - 1)/(e^{2/s} + 1), e^{2/s}/(e^{2/s} + 1)) = \mathcal{M}((e^{2/s} - 1)/(e^{2/s} + 1), 1/2) = \mathcal{M}((e^{2/s} - 1)/(e^{2/s} + 1), 1/3) = 0$, and $\mathcal{M}(\theta, (\theta + 1)/2) = \mathcal{M}(\theta, 1/2) = \mathcal{M}(\theta, 1/3) = 0$ when $\theta = [0; 1, 2, 3, \dots]$. But $\mathcal{M}(\theta, (\theta + 1)/2) = 1/4$ and $\mathcal{M}(\theta, 1/2) = \mathcal{M}(\theta, 1/3) = 0$ when $\theta = [0; 2, 4, 6, \dots]$.