

非常に深い二層流体中を伝播する孤立波の二次元的相互作用

九大応力研 辻 英一 (Hidekazu TSUJI)
九大応力研 及川正行 (Masayuki OIKAWA)

1 はじめに

成層流体中の非線形波動については、今までにさまざまな研究がなされている¹⁾。特に、安定に伝わる内部孤立波については実験(観測)および理論の両面から注目されてきた。本研究では、簡単な鉛直構造を持つ二層流体に注目し、一層が(伝わる波の波長に比べ)浅い一方でもう一層が無限遠まで伸びている、という場合を考える。これは大気や海洋で二層をなしている界面が地表あるいは海表面に非常に近い場合に対応している。

この場合、長波長・弱非線形の波(以後このような波を取り扱うことにする)を記述する方程式として Benjamin-Ono(BO) 方程式^{2),3)}

$$\frac{\partial u}{\partial T} + u \frac{\partial u}{\partial X} + \mathcal{H} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} \right] = 0, \quad \left(\mathcal{H}[f(X)] \equiv \frac{1}{\pi} \text{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(X')}{X' - X} dX', \right)$$

が提案されている (u は界面変位)。BO 方程式は可積分であり、数学的に非常に詳しく調べられている⁴⁾。例えば、二つの孤立波の追い抜き相互作用は BO 方程式の 2 ソリトン解によって表すことができるが、それによると相互作用の前後で位相ずれが生じない、つまり孤立波自体が相互作用後も個性を保つだけでなく位置についても相互作用の影響が見られない、という性質がある事がわかる。

BO 方程式は水平一次元であるが、二次元的な波動についてもいくつかの研究がなされている。及川⁵⁾ は峰が直線である一次元的な二つの波の相互作用を調べた(最近松野⁶⁾ によってさらに詳しい解析が行われた)。それによると、波の進行方向がある程度違っている場合、すなわち二つの波の方向ベクトルを $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ と置いて $1 - \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 \simeq O(1)$ の時、最低次の近似では、BO 方程式をそれぞれの方向で満たす二つの波の足し合わせとなり、位相のずれや振幅の変化などの相互作用は次のオーダーになる。しかしこの解は波の方向の成す角度が小さい場合、つまり $\epsilon = \text{振幅}/\text{鉛直スケール}$ として $1 - \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 \simeq O(\epsilon)$ となる場合に、相互作用をあらわす項が非常に大きくなってしまい適当でない。この時、二つの波はほとんど同じ方向に進むので、その向きに直角の方向で、変化のスケールが緩やかな座標 Y を考えて定式化を行うと、波の時間発展を表す方程式が、以下のような二次元方程式(以後 2D-BO 方程式)

$$\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial u}{\partial T} + u \frac{\partial u}{\partial X} + \mathcal{H} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} \right] \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} = 0, \quad (1)$$

として導かれる。

2D-BO 方程式は、水面波あるいは二層が共に浅い二層流体中の内部波として同じような性質の波を調べる時に導かれる Kadomtsev-Petviashvili(KP) 方程式⁷⁾

$$\frac{\partial}{\partial \bar{X}} \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{T}} + u \frac{\partial u}{\partial \bar{X}} + \frac{\partial^3 u}{\partial \bar{X}^3} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{Y}^2} = 0, \quad (2)$$

と見た目の形は良く似ている（空間、時間座標はスケールの違いのために前と異なる）。しかし、KP 方程式に関しては可積分性があるため詳しく解析がなされている一方、2D-BO 方程式はおそらく可積分性を持たないこともあって、その性質は明らかにされていない。

本研究の目的は、先に述べた特徴を持つ二層流体中での、ほとんど同じ方向に伝播する非線形波動—特に孤立波—の相互作用を、2D-BO 方程式を数値的に解くことによって明らかにすることである。

2 定式化

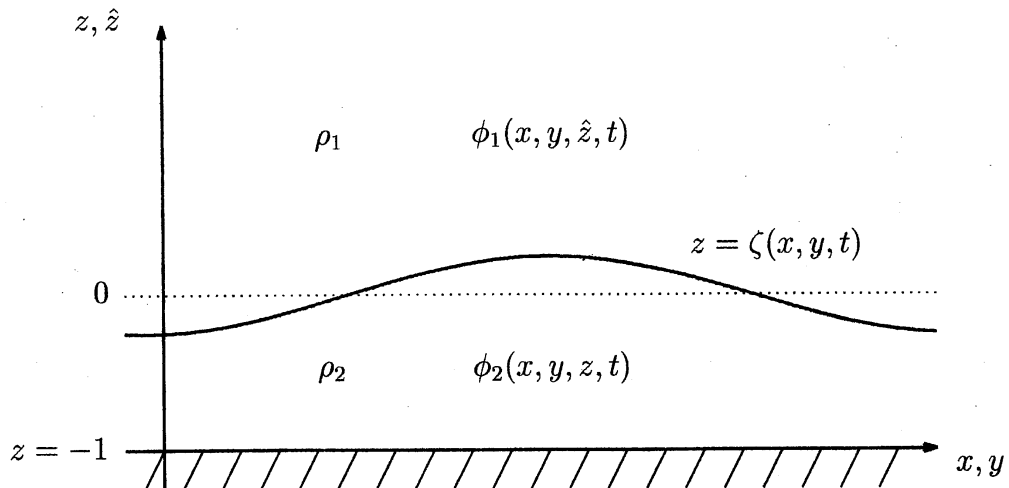


図1：二層流体。

図1のような二層流体を考える。流体は非粘性、非圧縮とする、また初期に波がないと仮定すると、流れは渦なしであるため速度ポテンシャルを導入できる。密度、速度ポテンシャルをそれぞれ ρ_i , ϕ_i ($i=1$:上層, $i=2$:下層) で表す。

基礎方程式および境界条件は次のようになる。

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi_1 + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \hat{z}^2} &= 0 \quad (\hat{z} > \epsilon \delta \zeta), & \delta^2 \nabla^2 \phi_2 + \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial z^2} &= 0 \quad (-1 < z < \epsilon \zeta), \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \epsilon \delta \nabla \zeta \cdot \nabla \phi_1 &= \frac{\partial \phi_1}{\partial \hat{z}} \quad (\hat{z} = \epsilon \delta \zeta), & \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \epsilon \nabla \zeta \cdot \nabla \phi_2 &= \frac{1}{\delta^2} \frac{\partial \phi_2}{\partial z} \quad (z = \epsilon \zeta), \\ \frac{\Delta \delta}{1 + \Delta} \frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\Delta \epsilon \delta^2}{1 + \Delta} (\nabla \phi_1)^2 + \zeta &= \Delta \frac{\partial \phi_2}{\partial t} + \frac{1}{2} \Delta \epsilon (\nabla \phi_2)^2 + (1 + \Delta) \zeta \quad (\hat{z} = \epsilon \delta \zeta), \end{aligned}$$

$$\nabla\phi_1 = \frac{\partial\phi_1}{\partial\hat{z}} = 0 \quad (\hat{z} \rightarrow \infty), \quad \frac{\partial\phi_2}{\partial z} = 0 \quad (z = -1).$$

ここで, lx, ly は水平座標 (l は水平スケール) である. 鉛直座標は, 二層の鉛直スケールがそれぞれ違うので, 上層では $l\hat{z}$, 下層については hz とする. h は下層の厚さであり, 底面の位置は $z = -1$ と表す. $a\zeta(x, y, t)$ は二層の境界面 (a は変位のスケール) であり, 波が無い時の位置を $\zeta = 0$ とする. $aV\phi_1$ ($aVl/h\phi_2$) は上層 (下層) の速度ポテンシャル, $(l/V)t$ は時間である (V は線形長波長極限の位相速度). $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$, $\Delta = (\rho_2 - \rho_1)/\rho_1$ であり, また系の代表スケールは次のような関係だとする.

$$\epsilon \equiv \frac{a}{h} \ll 1, \quad \delta \equiv \frac{h}{l} \ll 1.$$

まず下層について, 速度ポテンシャルは境界条件を考えると次のように表せる.

$$\phi_2(x, y, z, t) = f(x, y, t) - \frac{1}{2}\delta^2(z+1)^2\nabla^2 f(z, y, t) + \dots$$

ここで $f(x, y, t)$ は下層底面での速度ポテンシャル $\phi_2(z = -1)$ である. $\epsilon \simeq \delta$ とし, ϵ, δ の二次以上を微小として落とすと, 方程式系は次のようになる:

$$\nabla^2\phi_1 + \frac{\partial^2\phi_1}{\partial\hat{z}^2} = 0 \quad (\hat{z} > 0), \quad \frac{\partial\zeta}{\partial t} = \frac{\partial\phi_1}{\partial\hat{z}} \quad (\hat{z} = 0),$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} + \epsilon\nabla\zeta \cdot \nabla f = -(\epsilon\zeta + 1)\nabla^2 f,$$

$$\delta\frac{\partial\phi_1}{\partial t} = (1 + \Delta) \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\epsilon(\nabla f)^2 + \zeta \right] \quad (\hat{z} = 0), \quad \nabla\phi_1 = \frac{\partial\phi_1}{\partial\hat{z}} = 0 \quad (\hat{z} \rightarrow \infty).$$

本研究では, 二つの波がほぼ同じ方向 (x の正の向きとする) に伝わる波を考慮するので, y 方向の変化は小さい. このことなどを考慮に入れ, 次のような座標変換を行う:

$$\xi = x - t, \quad \eta = \epsilon^{1/2}y, \quad \tau = \epsilon t.$$

さらに, $\phi_1 = \phi_1^{(0)} + \epsilon\phi_1^{(1)} + \dots$ のように ϕ_1, ζ および f を展開する.

最初のオーダーで

$$\frac{\partial^2\phi_1^{(0)}}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\phi_1^{(0)}}{\partial\hat{z}^2} = 0 \quad (\hat{z} > 0), \quad -\frac{\partial\zeta^{(0)}}{\partial\xi} = \frac{\partial\phi_1^{(0)}}{\partial\hat{z}} \quad (\hat{z} = 0),$$

$$-\frac{\partial\zeta^{(0)}}{\partial\xi} = -\frac{\partial^2 f^{(0)}}{\partial\xi^2}, \quad (1 + \Delta) \left[-\frac{\partial f^{(0)}}{\partial\xi} + \zeta^{(0)} \right] = 0 \quad (\hat{z} = 0),$$

$$\left(\frac{\partial\phi_1^{(0)}}{\partial\xi}, \frac{\partial\phi_1^{(0)}}{\partial\hat{z}} \right) = 0 \quad (\hat{z} \rightarrow \infty).$$

これを解くと,

$$\phi_1^{(0)}|_{\hat{z}=0} = \mathcal{H}[\zeta^{(0)}], \quad \frac{\partial f^{(0)}}{\partial\xi} = \zeta^{(0)}.$$

次のオーダーでは,

$$-\frac{\partial \zeta^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \zeta^{(0)}}{\partial \tau} + \frac{\partial \zeta^{(0)}}{\partial \xi} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \xi} = -\frac{\partial^2 f^{(1)}}{\partial \xi^2} - \zeta^{(0)} \frac{\partial^2 f^{(0)}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 f^{(0)}}{\partial \eta^2},$$

$$-\frac{\delta}{\epsilon} \frac{\partial \phi_1^{(0)}}{\partial \xi} \Big|_{z=0} = (1 + \Delta) \left[-\frac{\partial f^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f^{(0)}}{\partial \xi} \right)^2 + \zeta^{(1)} \right],$$

から, 1次の量や $\phi_1^{(0)}$, $f^{(0)}$ を消去して

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \zeta^{(0)}}{\partial \tau} + \frac{3}{2} \zeta^{(0)} \frac{\partial \zeta^{(0)}}{\partial \xi} + \frac{\delta}{2\epsilon(1+\Delta)} \mathcal{H} \left[\frac{\partial^2 \zeta^{(0)}}{\partial \xi^2} \right] \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \zeta^{(0)}}{\partial \eta^2} = 0,$$

と, 2D-BO 方程式が導かれる. 簡単のため次のスケール変換をおこなう:

$$u = 3^{2/3} \left(\frac{(1+\Delta)\delta}{2\epsilon} \right)^{1/3} \zeta^{(0)}, \quad X = 2 \cdot 3^{1/3} \left(\frac{(1+\Delta)\delta}{2\epsilon} \right)^{2/3} \xi,$$

$$Y = 2\sqrt{3} \left(\frac{(1+\Delta)\delta}{2\epsilon} \right)^{1/2} \eta, \quad T = 3^{2/3} \left(\frac{(1+\Delta)\delta}{2\epsilon} \right)^{1/3} \tau.$$

すると

$$\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial u}{\partial T} + u \frac{\partial u}{\partial X} + \mathcal{H} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} \right] \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} = 0. \quad (3)$$

以後 2D-BO 方程式をこの形で取り扱う.

3 数値計算法

2D-BO 方程式を数値的に解く方法として, Wineberg らによって提案されたもの⁸⁾で, 擬スペクトル法に一種の反復を入れた Crank-Nicholson 法を組み合わせた方法を用いた. この方法は, われわれが以前にやはり内部波の研究として, KP 方程式に3次の非線形性がついている方程式を数値的に解いた⁹⁾時に使った方法でもある.

2D-BO 方程式は Hilbert 変換 \mathcal{H} の入った項を含む. この項を数値的に近似する際, 物理空間では積分をしなくてはならないが, フーリエ波数空間に移ると簡単な計算によって求められる. そのため, 周期境界条件を採用してフーリエスペクトル法を用いると速くしかも精度良く計算できる.

初期条件は X 方向に L_X , Y 方向に L_Y の周期を持つ 2D-BO 方程式の定常進行周期解

$$u = \frac{A}{1 - B \cos \left[\frac{\pi}{L_X} \left(X + \frac{L_X}{L_Y} Y - \lambda T \right) \right]},$$

$$A \equiv \frac{8\pi^2}{aL_X}, \quad B \equiv \sqrt{1 - \left(\frac{4\pi}{aL_X} \right)^2}, \quad \lambda \equiv \frac{a}{4} + \left(\frac{L_X}{L_Y} \right)^2,$$

を方向を変えて二つ重ねあわせた

$$u = \frac{A}{1 - B \cos \left[\frac{\pi}{L_X} \left(X + \frac{L_X}{L_Y} Y \right) \right]} + \frac{A}{1 - B \cos \left[\frac{\pi}{L_X} \left(X - \frac{L_X}{L_Y} Y \right) \right]},$$

を用いる。ここで、 a は波の形を決めるパラメータ（孤立波解での振幅に対応するもの）、 L_X はメッシュの幅と X 方向の計算点数の積であり、以後示す結果では $a = 1$, $L_X = 0.1 \cdot 2048$ としている。BO 方程式の孤立波解は両側でゆっくりと（代数的に）値が小さくなるため、波の両側に十分に広く計算領域を取らないと、周期解で孤立波を近似していることにならなくなってしまう。このため、かなり多くの計算点数が必要となる、

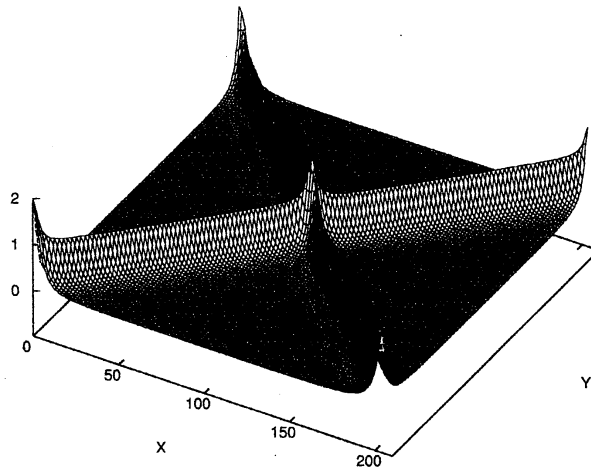


図2：初期に与える波（ Y 方向の座標は各計算で異なる）。

図2に具体的な形を示す。計算の点数が非常に多いので、各方向それぞれ128点を選び、そこでの値をプロットしている（以後の図も同様）。十分に領域を広く取ってあるので、初期条件はほぼ孤立波の重ね合わせの状態とみなせる。なお、これは2D-BO方程式を厳密に満たす解ではない事に注意する。 Y 方向にも同じ計算点数（2048点）を取るが、 L_Y はメッシュの幅を変える事によって、さまざまな値に設定する、これにより、二つの波の進行方向の成す角度を変えて時間発展を計算し、相互作用の様子を調べる。

4 計算結果

計算結果を進行方向の成す角度が大きい物（ $\tan \theta \equiv L_X/L_Y$ が大きい）から小さい物の順に示す。全ての結果は領域が正方形であるようにスケールが変換してある。

まず $\tan \theta = 2$ の場合の結果を示す（図3）。この場合、相互作用する孤立波はそれぞれ独立に進むように見える。すなわち二つの波が出会った後、元の形をした波が現れ、結果

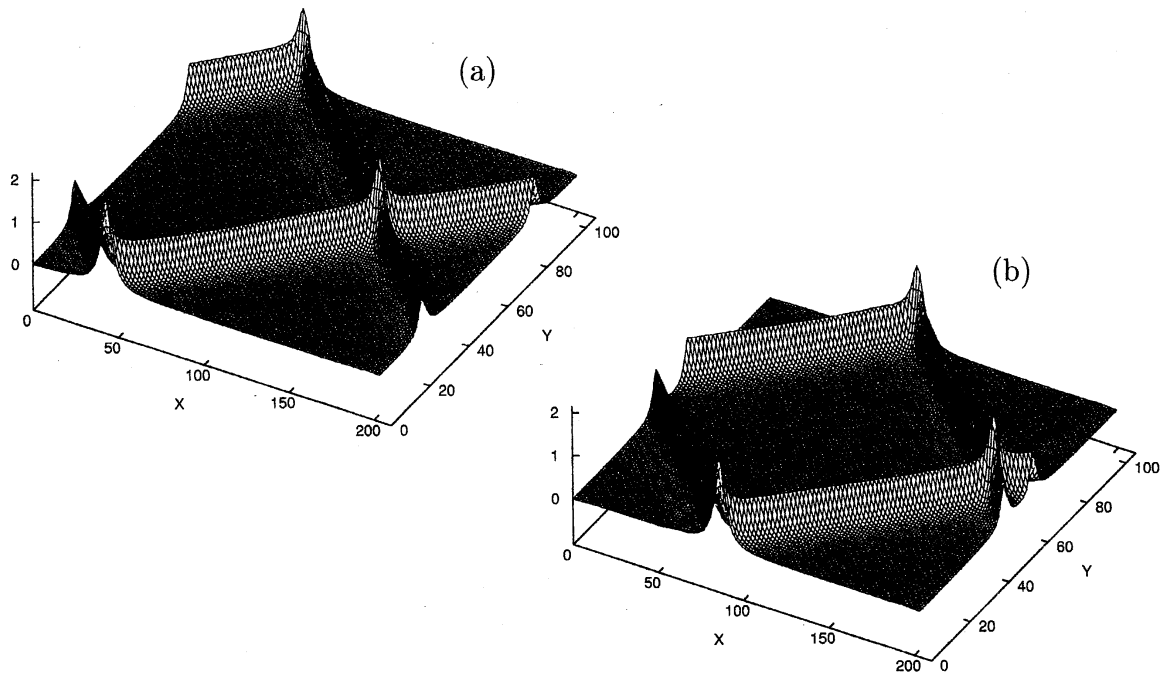


図 3 : $\tan \theta = 2$ の結果. (a) $T = 10$, (b) $T = 20$.

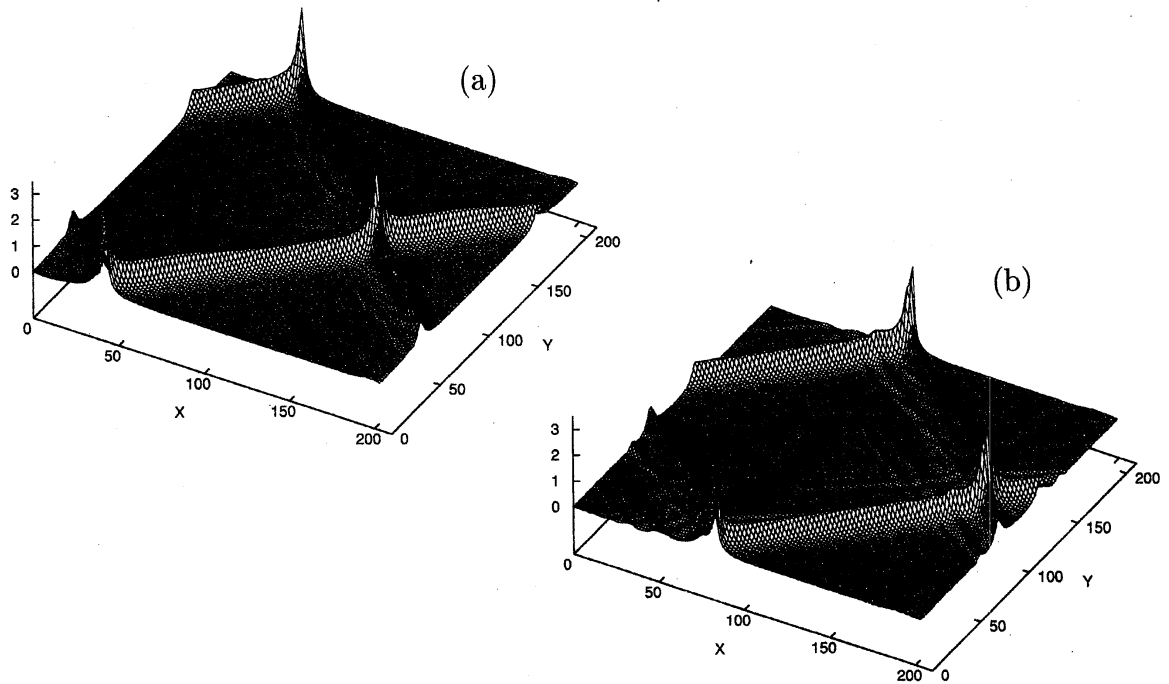


図 4 : $\tan \theta = 1$ の結果. (a) $T = 30$, (b) $T = 60$.

としてパターン全体が形を大きく変えずに動いていく。二つの孤立波が相互作用する場所は、初期に波の2倍の高さを持った盛り上がりであったが、その高さは2.0-2.1程度とわずかな変化にとどまっている。また相互作用前後で孤立波の位相のずれはほとんど見られない。このように進行方向がある程度異なる場合に相互作用が小さくなるという結果は、前に述べた波の進行方向が大きく違っている場合の及川の解析結果と矛盾無くつながっているように思われる。

図4に $\tan \theta = 1$ の場合の結果を示す。まず時間が進むにつれ、stemの後ろに小さな波が出てくる。これらの波は、峰が直線的に伸びており、元の孤立波と同様一次元性を持つ。しかし波の伸びている方向はわずかに元の波と違い、その振幅は相互作用する場所に近づくにつれ大きくなっている。また図でははっきりしないが、二つの孤立波が相互作用する場所では振幅が大きくY方向に幅を持った波が生成される(以後この波をstemと呼ぶ)。stemの幅は最初時間と共に増加していくが、ある程度の時間がたつと伸びは止まりstemはそのまま進むようになる。相互作用後の孤立波はstemの端から伸びているため、位相のずれもstemの成長に応じて増加し最後には一定値となる。

図5は $\tan \theta = 2/3$ の場合の結果である。 $\tan \theta = 1$ の場合と同じように相互作用する場所により大きな振幅のstemが生成される。しかしこの場合は、相互作用が進んでもY軸方向への峰の伸びが止まらず、今回計算できた時間の範囲では一定になることが無かった。相互作用した後の孤立波の振幅は $\tan \theta = 1$ の時に比べてかなり小さくなっている一方、stemの下流側にできる波の振幅はかなり大きくなっている。

最後に $\tan \theta = 0.5$ の場合の結果をしめす(図6)。さらに相互作用は強くなりstemがかなり目立つ。また、 $\tan \theta = 2/3$ の時にははっきりしなかったが、stemの端からは相互作用した前と後の波が見えているだけでなくさらにもう一つの波が相互作用前の孤立波の峰にほぼ沿って後ろに伸びている。その振幅は相互作用後の波の振幅と同程度の大きさである。なお、(b)でstemが中心でくぼんでいるようにみえるが、プロットする点の個数が少ないためであり、実際には初期に置いた孤立波が消えて相互作用が終わるまで中心の部分がむしろ高くなっている。

5 検討・今後の課題

以上の結果を、性質の良くわかっているKP方程式(2)の場合と比較する。今考えている孤立波の相互作用については、2ソリトン解

$$u = 12 \frac{\partial^2}{\partial \bar{X}^2} \ln f, \quad f = 1 + e^{2\eta_1} + e^{2\eta_2} + Ae^{2(\eta_1 + \eta_2)}, \quad \eta_i = p_i \bar{X} + q_i \bar{Y} - \omega_i \bar{T},$$

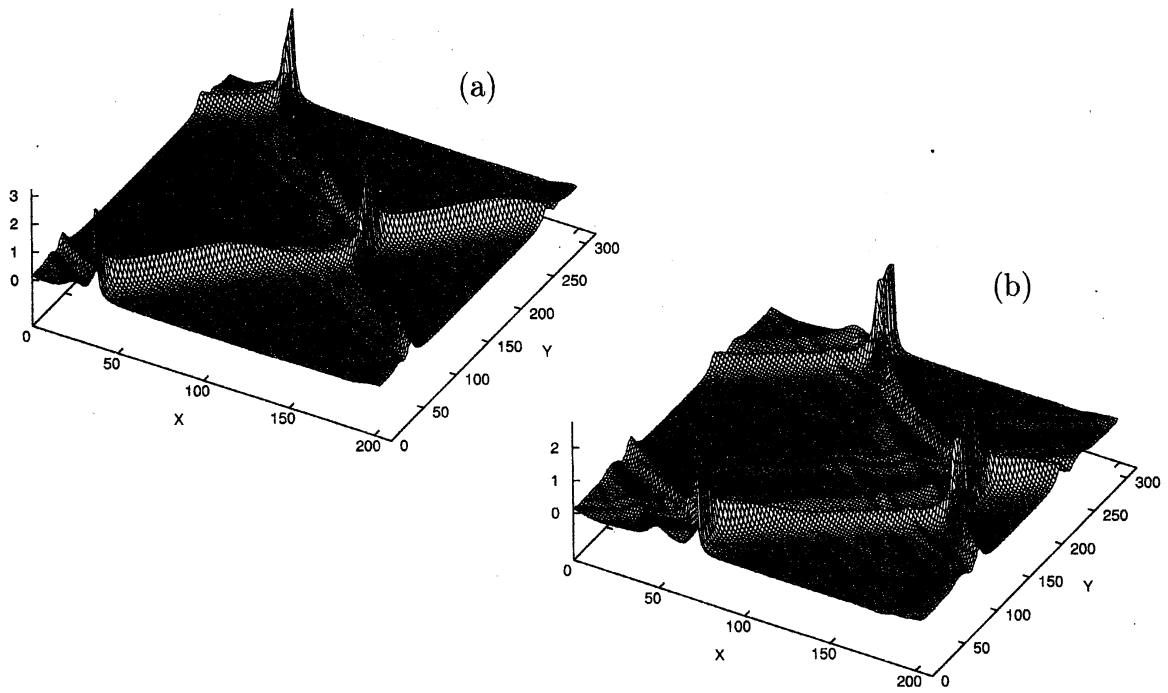


図 5 : $\tan \theta = 2/3$ の結果. (a) $T = 37.5$, (b) $T = 75$.

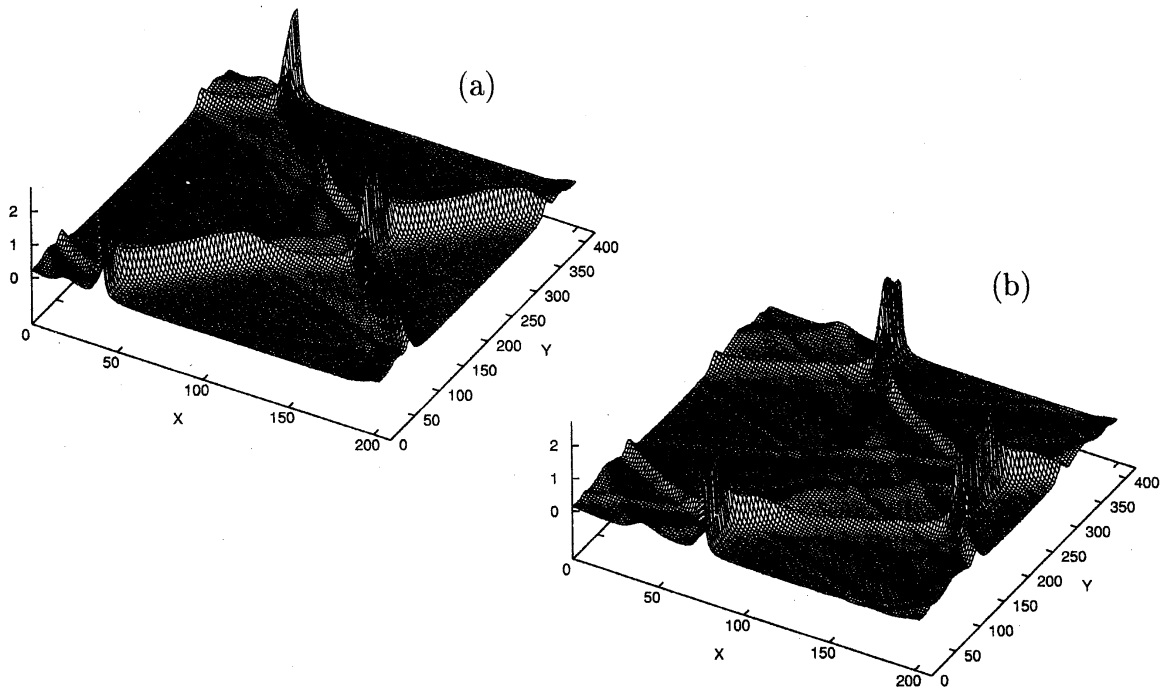


図 6 : $\tan \theta = 0.5$ の結果. (a) $T = 50$, (b) $T = 100$.

$$\omega_i = 4p_i^3 + \frac{q_i^2}{p_i}, \quad A = \frac{12(p_1 - p_2)^2 - \left(\frac{q_1}{p_1} - \frac{q_2}{p_2}\right)^2}{12(p_1 + p_2)^2 - \left(\frac{q_1}{p_1} - \frac{q_2}{p_2}\right)^2},$$

を考えるのが適当である。ここで p_i, q_i が波の形を決めるパラメータである。ところが、 $A < 0$ となるような p_i, q_i の場合、この解は物理的に不適である。その場合、 $|A| = 0$ or ∞ となるようなパラメータを持つ解が伝播することが（同種の方程式によって）示されている¹⁰⁾。この解では、考えている二つの波だけでなく新しい孤立波が相互作用している点から伸びており、その第三の孤立波の波数ベクトルや周波数は二つの孤立波のそれと共鳴の関係を満たしている。

今回 2D-BO について、上のような枠組みによる説明ができないかと考えた。確かに $\tan \theta$ が小さい場合での stem の形成や、stem の端から相互作用前後の孤立波が伸びている事などの特徴は KP 方程式と同じである。しかし計算結果を見ると、stem の端では四波が相互作用しているように見える。このことから二つの孤立波+相互作用による孤立波という枠組みで説明するのは難しく、別の方向からの解釈を考える必要がある。

われわれは以前、KP 方程式に 3 次の非線形項が加わった方程式を数値的に解き、同様に孤立波の相互作用を調べた⁹⁾。その時には相互作用に生じた孤立波の間に共鳴の関係がある程度満たされていた。今回の 2D-BO 方程式の計算で得られた結果は、それとは相互作用の性質が違うように思われる。

今後の課題であるが、

- 今回の計算では角度が違う計算を四例行ったが、さらに角度を細かく変えて計算を行う。そして二次的な小さい波や stem の生成が見られるようになる臨界の角度を求める。ただ現象が連続的に変わるので注意が必要である。さらに初期に置く孤立波の振幅を変えて計算を行い、振幅と相互作用の関係を調べる。特に、前に述べた相互作用の性質が変わる臨界の角度がどのように変化するだろうかということは興味深い。
- 方程式が可積分でないと考えられるため、ソリトン共鳴の厳密な議論は使えないが、それに似たような現象が起こっていることを考慮に入れて、計算結果をある程度説明できるような理論的な枠組みを探す。
- 方程式が可積分かどうかを調べる有力な方法としてパウルベテストが知られているが、最近、BO 方程式のような積分項を持つ方程式について可積分を調べる方法が提出されている¹¹⁾。2D-BO 方程式に対してこの方法を試みることができるかを調べる。

参考文献

- 1) 船越満明, 及川正行: *ながれ* **8** (1989) 311.
- 2) T. Benjmain: *J. Fluid Mech.* **29** (1967) 559.
- 3) H. Ono: *J. Phys. Soc. Japan* **39** (1975) 1082.
- 4) Y. Matsuno: *Bilinear Transformation Method* (Academic Press, 1984).
- 5) 及川正行: 九州大学応用力学研究所所報 **60** (1984) 467.
- 6) Y. Matsuno: *Proc. R. Soc. Lond. A* **454** (1998) 835.
- 7) B. B. Kadomtsev and V.I. Petviashvili: *Sov. Phys. Dokl.* **15** (1970) 539.
- 8) S. Wineberg, J. McGrath, E. Gable and C. Southwell: *J. Comp. Phys.* **38** (1991) 311.
- 9) H. Tsuji and M. Oikawa: *J. Phys. Soc. Jpn.* **62** (1993) 3881.
- 10) F. Kako and N. Yajima: *J. Phys. Soc. Jpn.* **49** (1980) 2063.
- 11) K.M. Tamizhmani, A. Ramani and B. Grammaticos: *J. Phys. A* **30** (1997) 1017.