

不安定モードの波数選択過程に関する数値的研究

阪府大 工 村上洋一 (Youichi Murakami)

阪府大 工 松生謙二 (Kenji Matsuo)

阪府大 工 濱野泰宏 (Yasuhiro Hamano)

1 はじめに

前年の研究発表 [1] に引き続き、対流の発生のように静止状態から周期構造が生じる現象について考察している。空間的に広がった系を考えると、超臨界状態において、線形安定な定常状態が非常に多く存在する。その中から特定の状態がどのような機構で決定されるかに興味を持っている。

ところで、対流セルは臨界点近傍ではロール状の構造を形成する場合と六角形セルを形成する場合が多い [2]。前者の典型例は浮力に起因するレイリー・ベナール対流であり、後者のそれは表面張力の不均一に起因するベナール・マランゴニ対流である。六角形セルが生じるかどうかは、境界条件の上下方向（ここでは、 z 軸とする）の対称性に密接に関連している。六角形セルは互いに $\pi/3$ の角度をなす 3 つの不安定モードの重ねあわせで構成されるので、対応する振幅方程式において 2 次の非線形項が含まれる。固有関数が上下方向に対称性をもつとき、振幅 A に対して $A \rightarrow -A$ のような変換を作用させた場合に、振幅方程式の形が不変であることが導かれることがあり、このような場合は 2 次の非線形項は振幅方程式に含まれない。よって、六角形セルは形成されず、ロールが生じることが多い。固有関数の上下方向の対称性は境界条件のそれに依存している。例えば、レイリー・ベナール対流の取り扱いでは通常上面と下面の境界条件は同じであるため、固有関数も上下方向に対して対称性を持ち、2 次の非線形項が現れず、六角形セルは生じない。一方、上面を自由表面そして下面を固体壁とすると、対称性がないため 2 次の非線形項が残り、六角形セルが生じうる。この研究では、この 2 つの典型例について、多数の不安定モードからどのようにして、ある特定の周期構造が成長していくかについて数値的に考察する。

ロール構造については、前回 [1] に引き続き、1 次元のグリーンサイド・クロス方程式 [3] の数値シミュレーションによる結果を、特に、波数が選択されるまでのプロセスとシステムサイズによる影響を、次の節で述べる。1 次元に限定するということはロールが一方向に整列すると仮定することである。一般の場合はロールが局所的にさまざまな方向を向き、その境界では欠陥が発生している。このような現象を除外することになるが、一方向に容器を傾けた場合はロールは整列するので、非等方的な現象のモデルに対応する。

六角形対流セルに関しては、上下の断熱壁で囲まれた気液 2 層系のベナール・マランゴニ対流に関して導出された長波長方程式の数値計算結果について報告する。この方程式は Golovin et al [4] によって導出され、その際、振幅方程式、すなわち、連立ランダウ方程式を導いて、種々のパラメータに応じて可能なさまざまな対流パターンの定常解を見出し、その線形安定

性を議論している。ロール、正方形、六角形の対流セルといった周期構造以外にもあるパラメータの範囲において、1 2 回対称性をもつ準結晶対流セルが安定に存在することを予言している点がりわけ興味深い。振幅方程式による結果と長波長方程式の直接数値シミュレーションによる結果とを比較し、振幅方程式の有効性についてここでは調べる。最後の節では結果のまとめと今後の課題について簡単にふれる。

2 ロールの場合：モデル方程式

グリーンサイド・クロス方程式は以下のように与えられる [3]。

$$\psi_t = [\epsilon - (1 + \partial_{xx})^2]\psi + 3(\psi_x)^2\psi_{xx}, \quad (1)$$

ここで、 ϵ は分岐パラメータである。線形分散関係によると最大増幅率を与えるモードの波数は ϵ に関らず $k=1$ である。また、この方程式は純勾配系で、リャプノフ汎関数（ポテンシャル）を持っている。リャプノフ汎関数を最小にする定常解に対応する波数は $k < 1$ となっている。数値計算法としては、空間についてはフーリエ・ガラーキン法を、時間に関しては積分因子法に基づく4次のルンゲ・クッタ法を用いている。空間領域 $[0, 2L\pi]$ に対して1周期 $[0, 2\pi]$ を $D=16$ で分割し、時間刻みは $\Delta t=0.02$ を選んでいる。前回の研究では、主に微小攪乱からの時間発展でどちらのモードが選択されるかを $L=64$ の場合の直接数値計算で調べ、最大増幅率を与える波長に近いモードが選ばれることを示した [1]。

1つのモードが選択される過程について調べるために、図1に波数の分散（波数空間で平均をとる。 $\bar{k} = \sum k|a_k| / \sum |a_k|$ 、ただし、 a_k はフーリエモードの複素振幅）の時間発展（ $\epsilon=0.4, L=128$ ）が示されている。微小な乱数を初期条件にとった5つの場合が重ねてプロットされている。この図から、 $100 < t < 10000$ の間では、波数の分散の減衰は初期条件に著しく依存していて、単純な冪則は見出されないことがわかる。また、この傾向はシステムサイズを変えても変化しなかった。

このように初期値依存性があるので、さらに10個の初期条件に対する集団平均をとったものの時間発展が図2に示されている。（注：標準偏差をとっている。）ここでは、システムサイズの依存性を明らかにするために、 $\epsilon=0.8, L=64, 128, 256, 512$ の場合が示されている。まず、 $T=10$ までは分散が単調減少している。これは、微小なランダムな初期条件の中に含まれる安定モードが減衰していくためである。その後、不安定モードが成長し相互作用することにより、一時的に分散は増大し、減衰していく。 $t \approx 500$ ($\sqrt{(\Delta k)^2} \approx 0.05$)あたりまでシステムサイズに依らずほぼ重なり、それ以降はシステムサイズに依存して減衰することがわかる。また、各々の領域でほぼ時間に対する冪で減衰していることがわかる。システムサイズ L が増大すると相互作用する不安定モードの数もそれに比例して増加する。1つの波数が選択されるまでの時間はそれに応じて増大することが期待される。 $t > 500$ 以降では、確かに L の増大に伴い、分散の減衰が遅くなっている。しかしながら、 $t < 500$ まではばらつきはあるものの、ほぼシステムサイズに依存せずに減衰している。このことは、波数に幅を認めて大体の波数が選択される（変調のかかった周期構造がほぼ選択される）までの時間

は、システムサイズに依存しないことを意味している。このように大体の波数が決定された後に、隣接した波数の中から1つの波数が選択される。この時間は波数の隣接具合、すなわち、システムサイズ L に依存すると考えられる。

3 6角形セルの場合：ベナール・マランゴニ対流の長波長方程式

この節では、2層系ベナール・マランゴニ対流でどのような波長のセルパターンが出現するかについて数値的に調べる。下層に液体、上層に気体が存在し、鉛直方向は熱伝導性の弱い固体壁によって囲まれ水平方向には無限に広がっている場合を想定している。このような場合長波長で不安定が生じることが知られている[4,5]。Golovin et al[4]は弱非線形解析により、臨界マランゴニ数の近傍で成立する長波長方程式を導いている。

$$\begin{aligned} \partial_t \Phi + \nabla \Phi \times \nabla \Psi + 2\Delta \Phi - 2\Delta H + \Delta^2 \Phi - \nabla \cdot (|\nabla \Phi|^2 \nabla \Phi) \\ + \lambda \nabla \cdot (\Delta \Phi \nabla \Phi) + \mu \Delta |\nabla \Phi|^2 + \nu \nabla \cdot (H \nabla \Phi) + \beta \Phi = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\Delta \Psi = p^{-1} \nabla (\Delta \Phi) \times \nabla \Phi, \quad (3)$$

$$\Delta (gH - c\Delta H) = -\Delta \Phi, \quad (4)$$

ここで、 Φ , Ψ , H は各々温度攪乱、攪乱の流れ関数および弱い界面変形である。パラメータは $\lambda = \lambda(a, \kappa, Pr)$, $\mu = \mu(a, \kappa, Pr)$, $\nu = \nu(a, \kappa)$, $p = 2Pr/13$, $q = q(a, \kappa)$, $g = \zeta_g(a)G$, $c = \zeta_c(a, \kappa)Ca$ のように定義されている。関数形および変数の定義はスペースの関係で省略する(Golovin et al[4]を参照)が、独立なパラメータは、 $Pr, \kappa, a, g, c, \beta$ の6つがあり、最後の β が分岐パラメータであり、ビオット数で定義されている。この解析ではマランゴニ数を臨界値に固定し、 β を臨界パラメータとしている。2節のグリーンサイド・クロス方程式と異なり2次の非線形項が含まれているが、1節で指摘したようにこの項があるので、6角形対流セルは発生しうる。

空間領域 $0 < x < 2\pi L/k$, $0 < y < 2\pi L/k$ に対して周期境界条件を適用し、数値計算法としては通常のフーリエ・ガラーキン法を用いる。通常 k は臨界モードの波数の大きさとした。 L はなるべく大きい方が望ましいが、ここでは主に $L = 16$ とし、 $0 < x < 2\pi/k$ を8つのフーリエ成分で分解する。高調波の線形減衰率が $-k^4$ に比例するので、この程度の分割数を選んだ。数値安定性を考慮して時間積分は積分因子法による1次の前進オイラー法を用い、 $\Delta t = 0.01$ を選んだ。

数値計算のチェックとしては、増幅率が一致することで線形項の正しさを確認した後に、図3で示すように、初期条件として1つのフーリエモードを選んで時間発展させて到達した平衡振幅とランダウ方程式のそれとを比較した。増幅率が小さいほど両者の一致が良好になることから、非線形項も正しくプログラミングされていると見なした。

通常、対流パターンの選択を考える場合は、臨界波数の不安定モードが現れると仮定してその波数の大きさをもつモードを有限個とり、連立ランダウ方程式を導出する。その方程式のもとで平衡解を求め安定性を調べ、可能なパターンを予測することが多い。そのような解

析が長波長方程式に対してもなされ、分岐ダイアグラムが Golovin et al[4] でなされている。図4に1例を示す。以下では、増幅率(γ)以外はパラメータを固定する。臨界点近傍では、六角形セルが安定で正方形セルが不安定で、臨界点から離れると反対の関係になる。また、12回対称性準結晶セルは中間的なところで安定になる。調べたパラメータの範囲ではこのような傾向があった。

次に、12回対称準結晶構造が現れうると予測されているパラメータ ($s = 0.6$, ($\gamma = 0.6515$))¹のもとで、6つのフーリエモードの初期条件からの計算結果を示す。図5(a)の連立ランダウ方程式による数値計算結果が示されている。解析的に予測された平衡振幅に落ち着いている。図5(b)に同じ初期条件から走らせた長波長方程式の結果が示されている。この場合はシステムサイズは $L = 8$ としている。まだ平衡振幅に到達していないが、各々のモードの振幅の大きさは一致しておらず、その大きさもランダウ方程式の平衡振幅の約半分程度であり、増幅率が $s = 0.6$ であることを考慮してもずれは大きすぎる。また、この平衡振幅のずれの程度は増幅率を小さくする(例えば、 $s = 0.11$)とやや減少するが、ずれの程度はそれほど変化しないことを確認している。このパラメータにおいては、この程度の振幅で既に高次の非線形効果が効いているためと考えられる。この場合は、図4で示すように、臨界点近傍においても平衡振幅は0に近づかない。平衡振幅が2次の非線形項と3次の非線形項の釣り合いでほぼ決定されるからである。ロールの場合は、2次の非線形項が存在しないので、臨界点に十分近いところでは必ずランダウ方程式は有効になる。また、2次の非線形項の係数と3次の非線形項の係数の比が0.36であるのに対し、平衡振幅が0.18である。

図6にシステムサイズ($L = 16$)を大きくした場合の温度の等高線の時間発展の数値計算結果を示す。増幅率は $s = 0.271$ ($\gamma = 0.295$)で、安定なパターンとしては、六角形セルと正方形セルの2つがある。初期条件として微小な12回対称性準結晶パターンを与えた場合(周期境界条件のため準周期に近い周期パターンを用いている)の結果を示す。初期($t = 10, 20$)は与えたパターンが線形増幅率にしたがって指数的に増大する。 $t = 40$ でパターンが変化している。対称性は変化していないが、フーリエ空間で $\pi/12$ 回転したモードが成長している。このとき、波数が少し低波数側にシフトしていることを確認している。 $(k = 1.03 \rightarrow k = 0.98)$ $t = 50$ の時刻では振幅の成長は頭打ちになりほぼ定常になるが、ゆっくりと変化している。対流のセルが融合し個数が減り、最終的($t = 300$)には、六角形セルになることがわかる。

初期条件を微小な乱数にとった場合の時間発展が図7に示されている。この場合成長とともにほぼ最大増幅率に近い波数の構造が成長するが、きれいな対称性をもっていない。 $t = 40$ の時刻では振幅の大きさはほぼ一定となるが、ゆっくりと変化している。図7(e)に $t = 3600$ のパターンが示されているように、六角形セルの領域がかなり広がっていることがわかる。図7(f)に示すように対応するフーリエ空間のピークもほぼ3つに分かれているが、各々のピークは2つのモードで構成されており、徐々に1つのモードのみになっていくと予想される。2節で述べたように、隣接であればあるほど選択される時間は長くなると予想される。

¹数値シミュレーション (s, A) と分岐ダイアグラム (γ, a) で正規化が異なっている。振幅および増幅率の対応はこのパラメータで、 $\gamma = 1.085s$, $a = 2.748A$ 。

波長のシフトは、このパラメータではシステムサイズが $L = 8$ では生じないが、 $L = 16$ ではこのように観察された。数値シミュレーションをする場合に十分稠密に波数を分割しないところのような波数のシフトは捉えられない。臨界から離れれば離れるほど低波数側へのシフトは顕著になることをいくつかのパラメータで確認している。

4 まとめと今後の課題

超臨界状態において対流セルの周期構造（不安定モードの波数）が発達していく過程について、近似方程式を直接数値シミュレーションして得られた結果について報告した。結果をまとめると、

ロールの場合（グリーンサイド・クロス方程式）

- 選択される波数はポテンシャルを最小にする波数よりも最大増幅率のそれに近い[1]。
- 大体の波数（波数の幅： $\sqrt{(\Delta k)^2} \approx 0.05$ ）が選択されるまでの時間はシステムサイズに依らず、その後1つの波数が選択されるまでの時間はシステムサイズの増大とともに増大する。

この後者の結果は次のように解釈される。²この方程式系は相互作用に関して局所的であるので、系全体としてではなく各々の局所的な領域で、他の領域とは独立に、ある周期の構造が成長する。独立とみなされる領域の大きさが $1/\sqrt{(\Delta k)^2} \approx 20$ になっている。この結果、変調を受けた周期構造が形成されるまでの時間はシステムサイズに依らない。この変調周期構造が1つの周期を持つ構造に落ち着く時間はシステムサイズが大きいと長い周期の変調が含まれ、そのため減衰する時間が延びると考えられる。

レイリー・ベナル対流においてはプラントル数が大きい場合に相互作用はローカルになる。流体の基礎方程式の直接数値計算によって、選択される波数および選択される過程がプラントル数にどのように依存するかを明らかにするのは今後の課題である。なお、Getling[6]は上下の固体壁で応力自由の境界条件のもとでこのシミュレーションを実行しプラントル数の低下とともに選択される波数が低下するという実験事実と定性的に一致する結果を得ているが、初期条件として実空間で局在した初期条件を用いている。境界条件および初期条件依存性をさらに明らかにする必要がある。

6角形セルの場合（長波長方程式）

- 6角形セルの平衡振幅は直接数値シミュレーションとランダウ方程式のそれとは臨界点近傍においても2倍近いずれがある。
- 臨界点から離れるにつれ、選択される波数は低波数にシフトしていく。

²山田道夫氏の指摘に負う。

前者の結果については、臨界点近傍において平衡振幅がランダウ方程式の有効範囲を超えるためと考えられるので、展開を工夫して高次の非線形項を取り込む必要がある。後者についてはさらに詳細に数値計算をする必要がある。なぜなら、低波数側に波数がシフトすると、数値計算においてシステムサイズの影響が出てくるからである。波数のシフトはランダウ方程式における2次の非線形項の係数の大きさに関連しているようであるが、現在、波数の異なるモード間での連立ランダウ方程式を導出してこのシフトが説明できるか検討中である。

5 参考文献

- [1] 村上洋一、濱野泰宏: 数理解析研究所講究録 **1030** (1998) 16; Y. Murakami and Y. Hamano: *J. Phys. Soc. Jpn.* **67** (1998) 3331.
- [2] S. Chandrasekhar: *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability* (Dover, 1981); E. L. Koschmieder: *Bénard Cells and Taylor Vortices* (Cambridge University Press, Cambridge, 1993).
- [3] H. S. Greenside and M. C. Cross: *Phys. Rev. A* **31** (1985) 2492; M. C. Cross, G. Tesauro and H. S. Greenside: *Physica* **23D** (1986)12; M. C. Cross and D. I. Meiron: *Phys. Rev. Lett.* **75** (1995) 2152.
- [4] A. A. Golovin, A. A. Nepomnyashch and L. M. Pismen: *Physica D* **81** (1995) 117.
- [5] K. Matsuo and Y. Murakami: to be published in *J. Phys. Soc. Jpn.* (1999) NO. 2.
- [6] A. V. Getling: *J. Fluid Mech.* **130** (1983) 165.

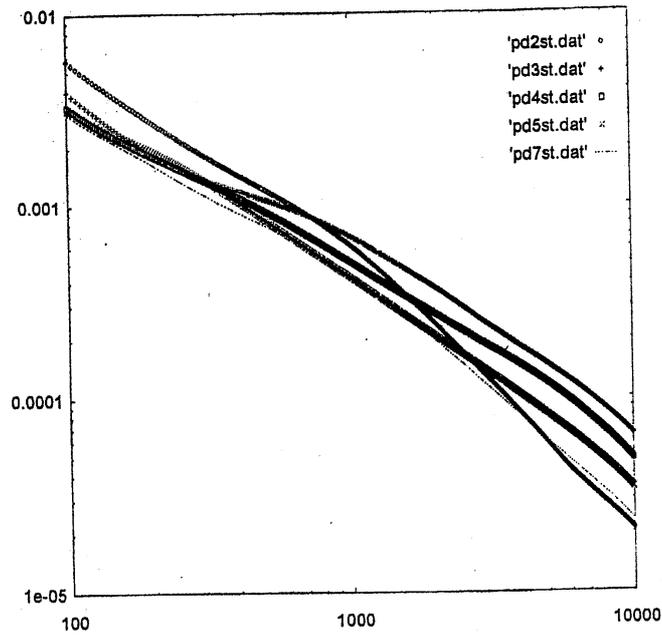


図1: 波数の分散 $\sqrt{(\Delta k)^2}$ の時間発展
($\epsilon = 0.4, L = 128$).

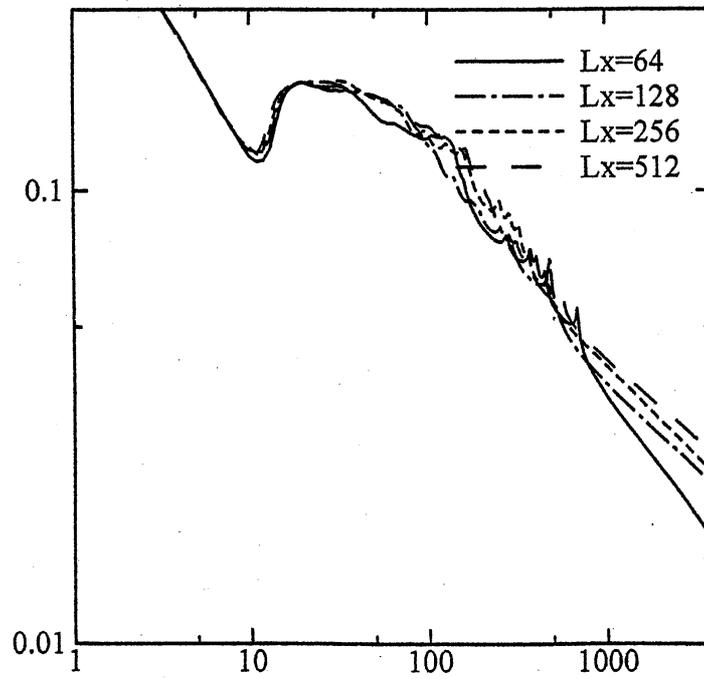


図2: 波数の分散 $\sqrt{(\Delta k)^2}$ の集団平均の時間発展
($\epsilon = 0.8, L = 64, 128, 256, 512$)

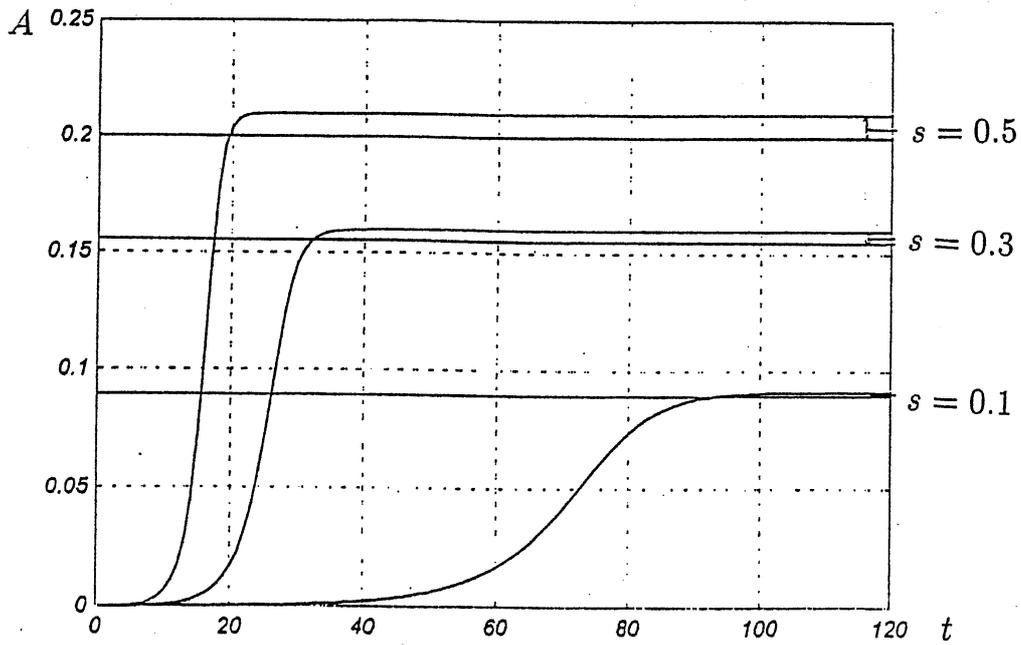


図3 平衡振幅のチェック 直線はランダウ方程式から求めた平衡振幅の大きさ
 ($Pr = 7, \kappa = 0.043, c = 0.5, g = 1, a = 0, |k| = 1, s = 0.1, 0.3, 0.5$)

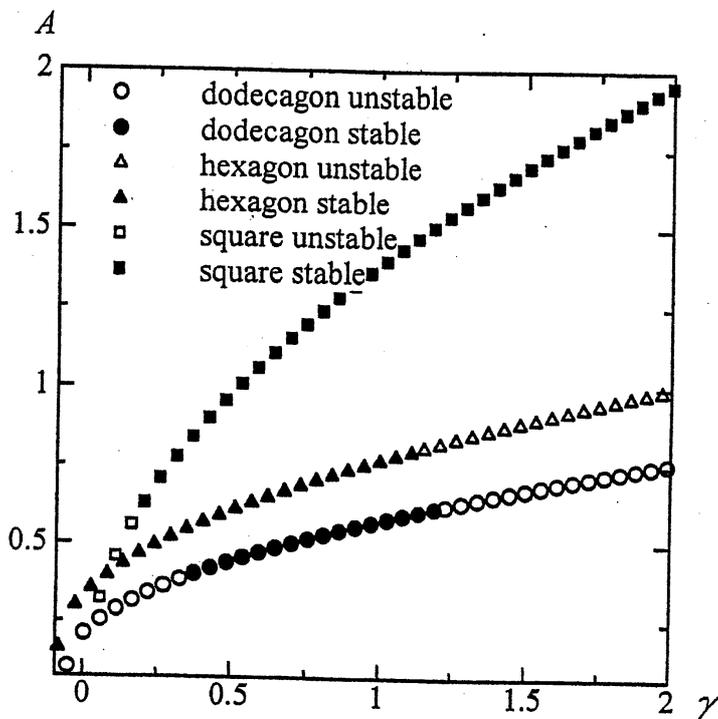


図4 定常解の振幅と安定性
 ($Pr = 7, \kappa = 0.043, c = 0.147, g = 0.0015, a = 0.5, |k| = 1.03$)

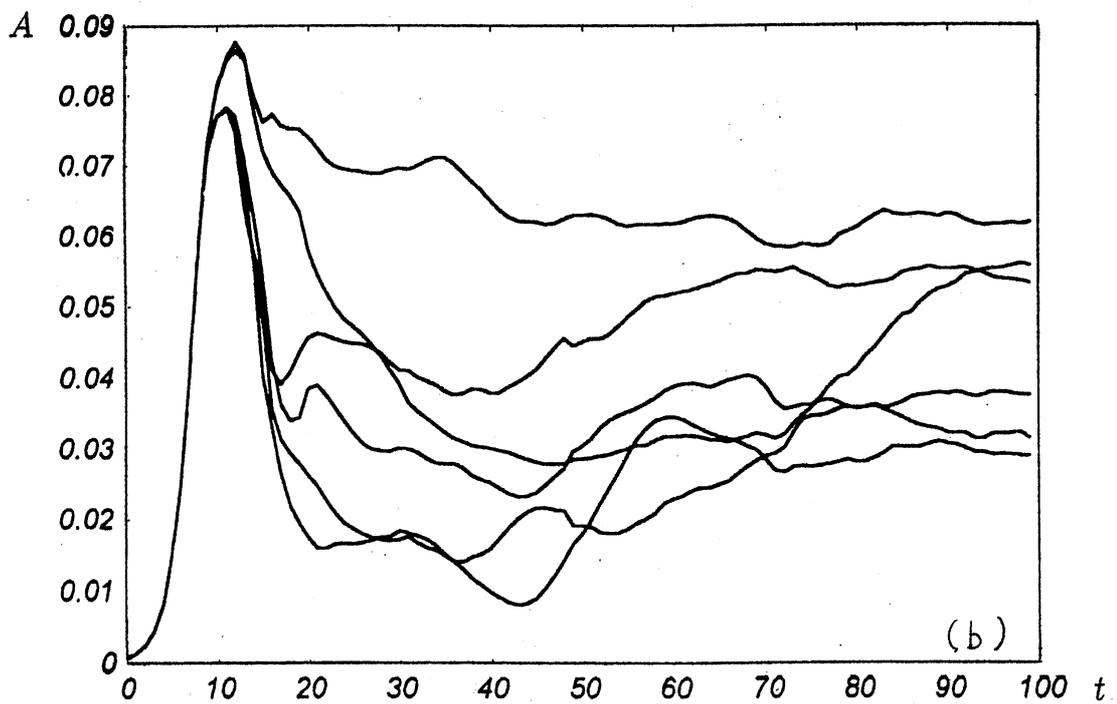
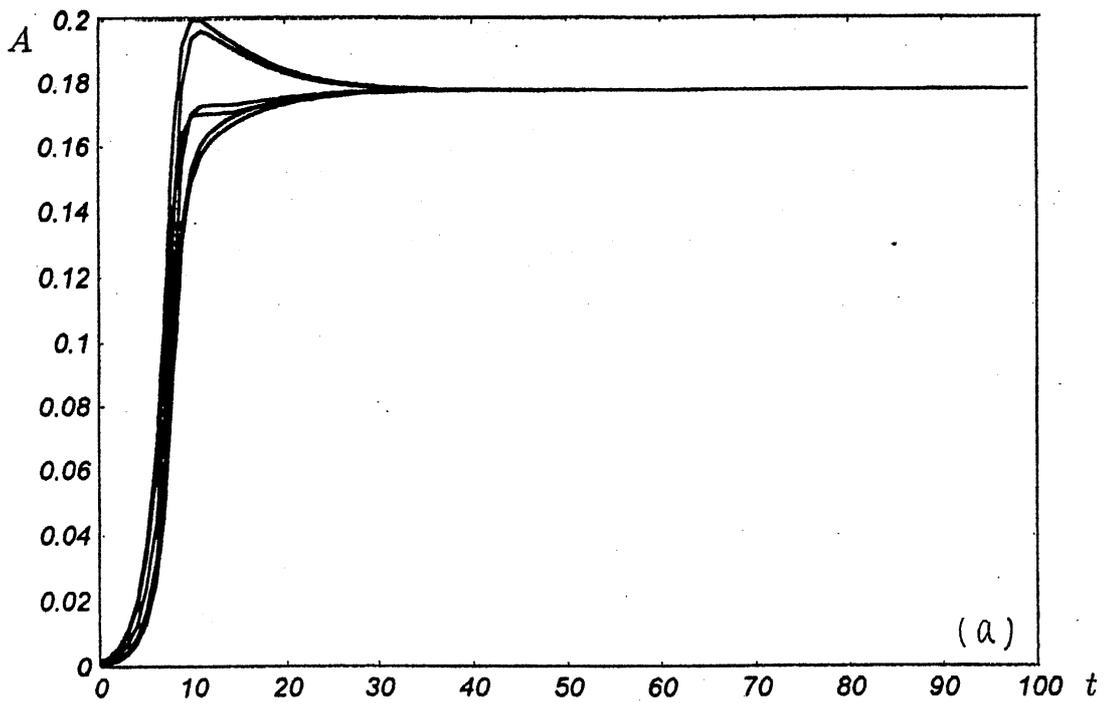


図.5 振幅の同一の初期条件からの時間発展

(a) ランダウ方程式による数値シミュレーション結果

(b) 長波長方程式の数値シミュレーション結果

($Pr = 7, \kappa = 0.043, c = 0.147, g = 0.0015, a = 0.5, |k| = 1.03, s = 0.6$)

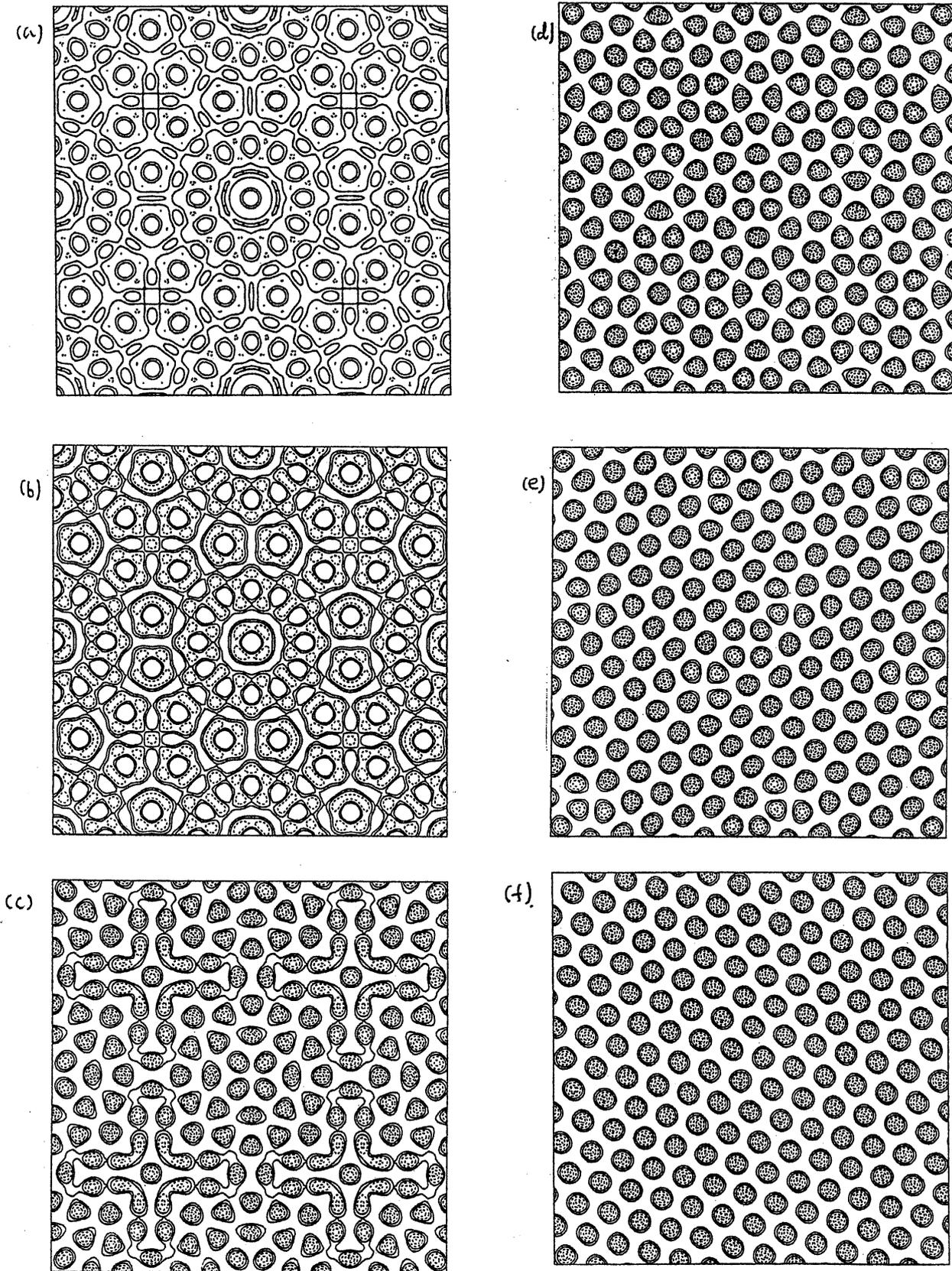


図6 温度の等高線の時間発展：

(近似的な) 12回対称性をもつ初期条件

($Pr = 7, \kappa = 0.043, c = 0.147, g = 0.0015, a = 0.5, |k| = 1.03, s = 0.2721$)

(a) $t = 10$, (b) $t = 20$, (c) $t = 40$, (d) $t = 100$, (e) $t = 200$, (f) $t = 300$

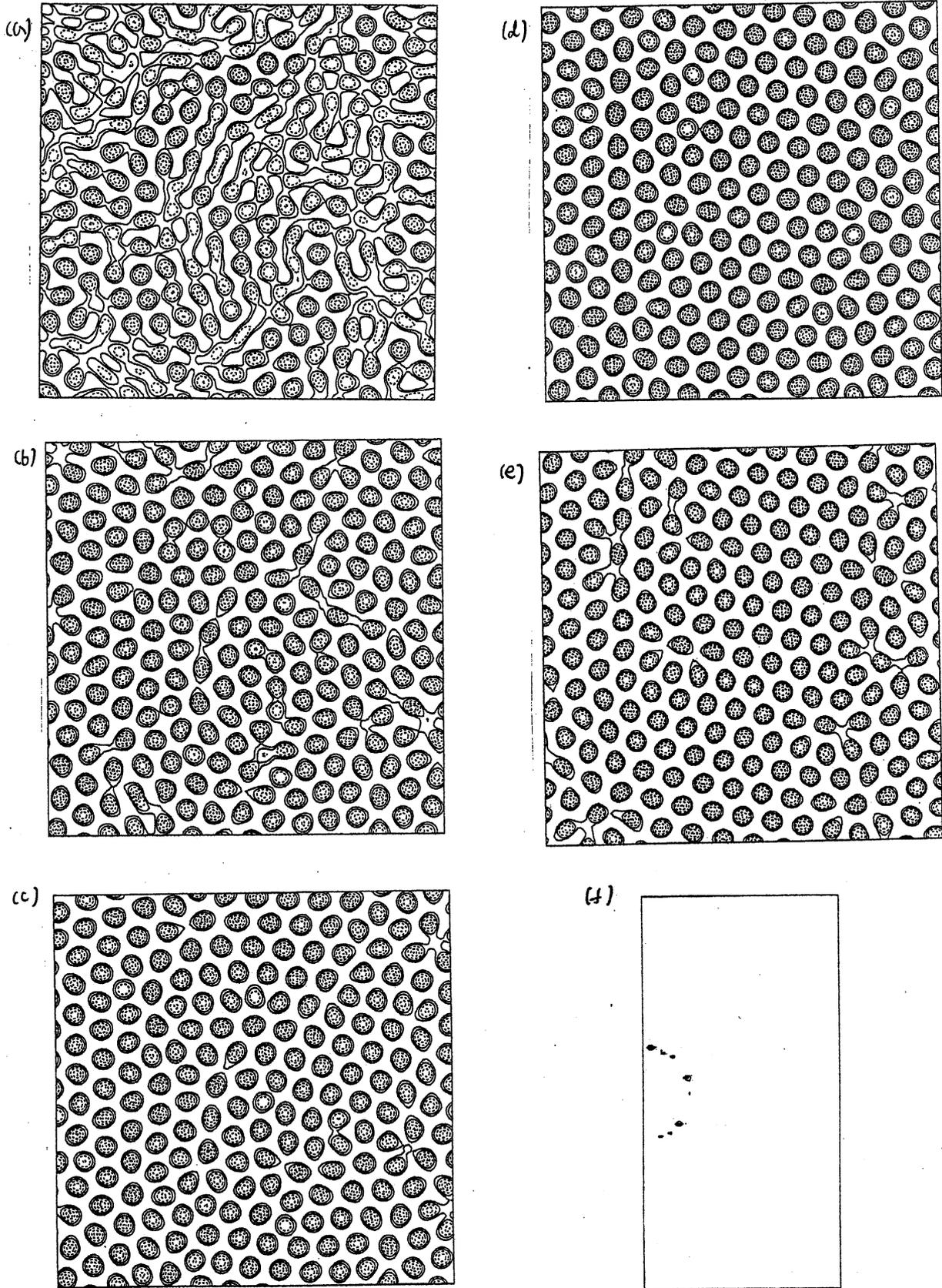


図7 温度の等高線の時間発展：ランダムを初期条件としている

($Pr = 7, \kappa = 0.043, c = 0.147, g = 0.0015, a = 0.5, |k| = 1.03, s = 0.2721$)

(a) $t = 20$, (b) $t = 40$, (c) $t = 120$, (d) $t = 1600$, (e) $t = 3600$, (f) $t = 3600$ フーリエ成分