

## 成層圏周極渦を想定した準周期的な流れ場におけるカオスの混合

京都大学大学院 理学研究科 水田 亮 (MIZUTA Ryo)

京都大学大学院 理学研究科 余田 成男 (YODEN Shigeo)

### 1. はじめに

地球大気は大規模な流れの構造をもっており、流れの構造はオゾンをはじめとする大気微量成分の全地球的な分布に大きな影響を及ぼしている。このような大規模な物質輸送過程を理解する上で、「混合」は無視できない過程である。従来、混合過程は、不規則な運動、すなわち分子運動や乱流などにより、あるスケール以下で完全に混ぜ合わされるものが想定されてきた。いわゆる分子拡散や乱流混合(渦拡散)で記述される状況である。ところが、規則的な流れの中でも流体粒子の運動自体は不規則になることがあり、その不規則性(カオス)によって、流体塊は引き伸ばし・折りたたみをうけて混合されることがある(Aref,1984)。

このカオスの混合の概念を地球流体に導入したのは Pierrehumbert(1991) である。彼は周期的に時間変動する 2 次元の単純な流れ場を与えて粒子の軌跡を解析し、乱流混合とはまったく異なる種類の混合が地球流体でも起こり得ることを示した。大気や海洋の地球規模の流れは多くの秩序構造をもっており、その時間的変動がカオスの混合を引き起こすことは十分考えられる。この種の混合過程が重要な役割を果たすと考えられるものの 1 つに、成層圏周極渦がある。冬季極域の成層圏では、緯度  $60^\circ$  付近に極大をもつ西風が極のまわりをまわる渦を形成している。周極渦の内側と外側との物質交換が非常に少なくなっており、渦の縁が水平輸送の障壁となっている。その一方で内側・外側それぞれでは効率よく混合がおこなわれている。とくに南極域では、周極渦によってつくられるこの天然の「密閉容器」がオゾン破壊物質の生成、およびオゾンホール維持に深く関わっている、と考えられている。

本研究では、回転球面上の 2 次元非発散流体の数値モデルを用いて南半球成層圏周極渦の変動に類似した準周期的な流れを再現し、粒子の軌跡のとり振舞いについて調べ、その中で引き起こされるカオス的な混合の解析をおこなう。地球流体中の大規模運動は、地球自転と密度成層の効果によりほぼ水平で準 2 次元的であり、2 次元非発散流の枠組みでもそれなりの現実性のあるものとなっている。

### 2. モデルと数値計算法

#### 2.1 基礎方程式

回転球面上の 2 次元非発散流は、経度: $\lambda$ 、緯度: $\phi$ 、時刻: $t$  を独立変数として、次のような

渦度方程式によって記述できる (Ishioka and Yoden, 1995)。

$$\frac{Dq}{Dt} = -\alpha(q - \bar{q}_0) + \nu(\nabla^2 + \frac{2}{a^2})(q - \bar{q}_0) \quad (1)$$

ここで、 $q$ は絶対渦度 ( $q \equiv \nabla^2\psi + 2\Omega \sin\phi$ ) で、 $a$  は地球半径、 $\Omega$ は地球自転角速度である。球面座標系では、速度 ( $u, v$ )、流線関数 $\psi$ 、ラグランジュ微分 $\frac{D}{Dt}$ 、ラプラシアン $\nabla^2$ は次のようになる。

$$u = a \cos\phi \frac{D\lambda}{Dt} = -\frac{1}{a} \frac{\partial\psi}{\partial\phi}, \quad v = a \frac{D\phi}{Dt} = \frac{1}{a \cos\phi} \frac{\partial\psi}{\partial\lambda} \quad (2)$$

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{a^2 \cos\phi} \left( \frac{\partial\psi}{\partial\lambda} \frac{\partial}{\partial\phi} - \frac{\partial\psi}{\partial\phi} \frac{\partial}{\partial\lambda} \right) \quad (3)$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{a^2} \left[ \frac{1}{\cos^2\phi} \frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} + \frac{1}{\cos\phi} \frac{\partial}{\partial\phi} \left\{ \cos\phi \frac{\partial}{\partial\phi} \right\} \right] \quad (4)$$

この系では、絶対渦度 $q$ は、外力や粘性がなければラグランジュ的に保存する ( $Dq/Dt = 0$ )。 (1) 式の右辺は、そのような保存則を破る外力や粘性の効果を表している。右辺第一項はニュートン型の外力強制項である。経度方向に一樣な平衡状態 $\bar{q}_0$ に向かって緩和時間 $\alpha^{-1}$ で指数関数的に近づく強制を表している。右辺第二項は、数値計算上必要な渦粘性項で、 $\nu$ が粘性係数である。

## 2.2 数値解法

数値計算は、スペクトル法を用いる。球面調和関数 $Y_n^m(\lambda, \sin\phi)$ を用いて従属変数 $\psi(\lambda, \phi, t)$ を直交関数展開し、その展開係数に関する連立常微分方程式系を4次精度のRunge-Kutta法で時間積分する。ここでは、石岡 (1998) の数値計算パッケージを用いている。

粒子を移流させて位置を追跡する計算は、(2) 式より

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{u}{a \cos\phi}, \quad \frac{d\phi}{dt} = \frac{v}{a} \quad (5)$$

を時間積分することによっておこなう。この計算は流れ場の計算と同時におこなう。実際のプログラムでは、 $q$ の展開係数 $q_n^m$  ( $|m| < n, n = 1, 2, \dots, N$ ) と各粒子の位置 $(\lambda_i, \phi_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, I$ ) をひとまとめにして時間積分している。 $q$ から $(\lambda_i, \phi_i)$ での速度 $(u, v)$ を求めて粒子位置を時間積分するというプロセスをRunge-Kutta法の各ステップでおこなっているため、粒子の移流計算も4次精度になっている。

## 2.3 実験の枠組み

用いたパラメータは次のとおりである。 $a = 6.37 \times 10^6 \text{m}$ ;  $\Omega = 7.29 \times 10^{-5} / \text{s}$ ;  $\alpha = 0.1 / \text{day}$ ;  $\nu = 6.43 \times 10^4 \text{m}^2 / \text{s}$ 。また、モデルの分解能は、 $N = 85$  (三角切断) とし、変換格子点数は  $256 \times 128$  としている。Runge-Kutta法の時間増分は $\Delta t = \frac{1}{80} \text{day}$  である。

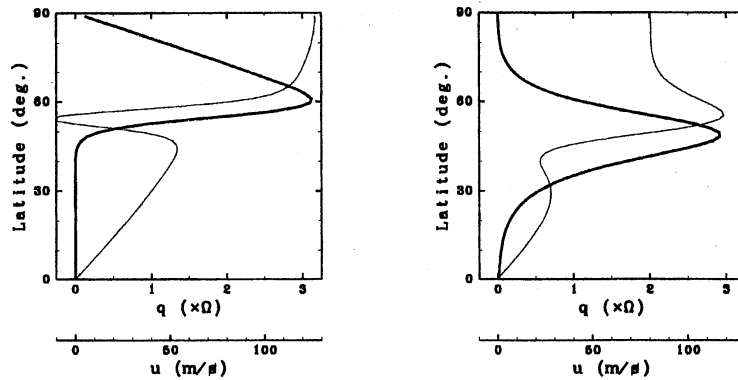


図 1: 帯状流強制に関する緯度分布。左が tanh 型、右が sech 型。太線が  $\bar{u}_0$  で細線が  $\bar{q}_0$  をあらわす。

強制項で与える  $\bar{q}_0$  は、経度方向に一様な東西風の緯度分布  $\bar{u}_0(\phi)$  を設定し、 $\bar{q}_0 = 2\Omega \sin \phi - \frac{d\bar{u}_0}{dy}$  で変換する。 $\bar{u}_0(\phi)$  としては、次の 2 つの型の緯度分布を設定する。

$$\text{tanh 型: } \bar{u}_0(\phi) = U \cos \phi \cdot \frac{1}{2} \left( 1 + \tanh \frac{\phi - \phi_0}{B} \right) \quad (6)$$

$$\text{sech 型: } \bar{u}_0(\phi) = U \cos \phi \cdot \text{sech} \frac{2(\phi - \phi_0)}{B} \quad (7)$$

$U, B, \phi_0$  は、それぞれ周極渦の強さ、幅、位置の指標となっている。Ishioka and Yoden (1995) はこれらを実験パラメータとして、周期解 (steady wave)、準周期解 (vacillation)、および非周期解 (irregular) を得て、時間変動のパラメータ依存性を示している。今回の数値実験では、準周期解が得られる次のパラメータを使用した。tanh 型:  $U = 270\text{m/s}, B = 4^\circ, \phi_0 = 55^\circ$ ; sech 型:  $U = 180\text{m/s}, B = 15^\circ, \phi_0 = 50^\circ$ 。図 1 はこれらの強制の緯度分布を描いたもので、tanh 型では周極渦の外側で、sech 型では外側および内側で  $\bar{q}_0$  の逆勾配が見られる。これらの場所で流れは順圧不安定に関する Rayleigh の必要条件を満たしている。

どちらの場合も、強制と同じ流れ  $\bar{u}_0$  にわずかに擾乱を加えたものを初期値として与え、長時間の積分をおこなった。 $\bar{u}_0$  は安定解ではないのですぐに乱れた流れとなるが、強制項により順圧不安定な周極渦を作ろうとする傾向と、不安定を解消しようと発達する擾乱との競合により、やがて準周期的に変動する周極渦となる。1000 日以上経過して初期値の影響が十分に除去されたと考えられる時刻から先を解析の対象とした。

### 3. tanh 型の強制を加えた実験

#### 3.1 絶対渦度の時間発展

絶対渦度の時間変化を図 2 に示す。東西波数 2 のロスビー波が卓越し、楕円型の周極渦が形成されている。周極渦の縁は、絶対渦度の勾配が最大の緯度で与えられるが、それは緯度

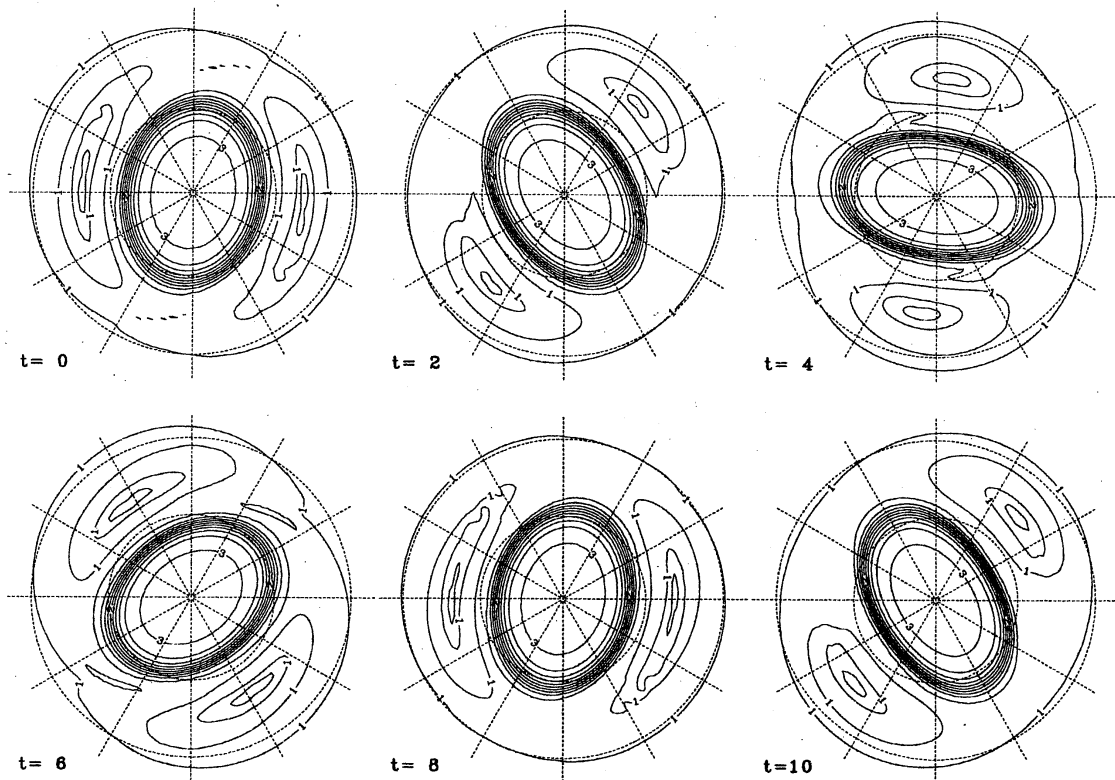


図 2: 絶対渦度の時間変化。北極を中心とし、 $20^{\circ}\text{N}$  以上について、ランベルト正積方位図法で示している (以降の図で共通)。コンターラベルの単位は $\Omega$ でコンター間隔は $0.2\Omega$ 、時間の単位は日。

$60^{\circ}$  付近にある。楕円型の周極渦は時間とともに回転しながら、周期的に扁平率を変動させている。回転と扁平率変動の周期は異なっており、準周期解となっている。回転は東向きで、楕円の長軸を追跡することにより求めた回転の周期は 16.16 日である。扁平率変動の周期は、領域全体の運動エネルギーを東西波数別に求めて、それらの時間変化から計測した (図 3)。平均帯状流 (波数 0) と波数 2 の成分が卓越しており、お互いにエネルギーをやりとりしている。この変動の周期が 7.33 日となっている。なお、図 2 以降、波数 0 のエネルギーが極大となった時刻を 0 日として時刻の表示をおこなっている。

このパラメータでの絶対渦度の時間発展は、Ishioka and Yoden(1995) で詳細に調べられている。ここで得られた時間発展の様子、回転および扁平率変動の周期などはその結果と一致している。

### 3.2 渦とともに回転する系から見た流線・よどみ点

楕円渦の回転周期をもとに、渦とともに一定角速度で回転する座標系を考え、そこでの流線関数を求めた。図 4 は、 $t=0$  日での流線と、よどみ点、すなわち流線が鞍点となっている場所を示している。渦の外側で長軸上によどみ点が 2 ヶ所存在している。2 つのよどみ点を

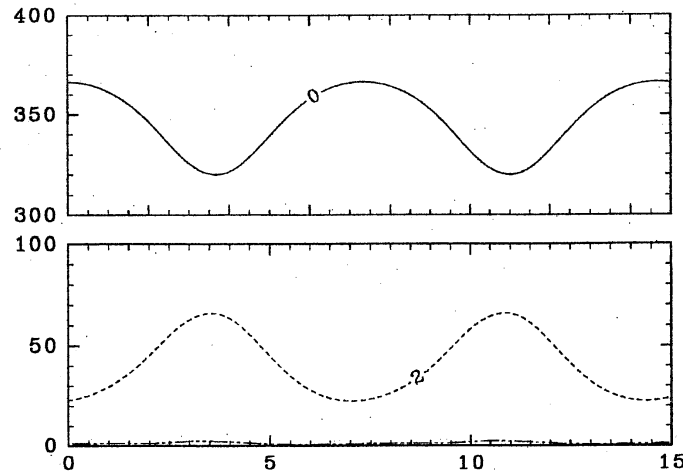


図 3: 領域全体の運動エネルギーを東西波数別に分けたときのそれぞれの時間発展。横軸は時間 (日)、縦軸はエネルギー ( $\text{m}^2/\text{s}^2$ )。線のラベルは東西波数をあらわす。

結ぶ流線 (ヘテロクリニック軌道) により、流体は、周極渦の領域、その両側の 2 つの三日月領域、および低緯度域の 4 つの領域に分けられる。周極渦の領域では反時計回り、三日月領域と低緯度領域ではそれぞれ時計回りの流れになっている。

### 3.3 粒子群の移流

流れ場は、渦の回転と扁平率変動という 2 つの周期をもって規則的に時間変化している。この場合、流れ場は決定論的に完全に予測できる状況であり、小さな摂動に対して安定である。しかし、この流れ場の安定性は、流体粒子の軌道の安定性を保証するわけではなく、軌道のわずかなずれが時間とともに急速に拡大する軌道不安定の状態になっている場合がある。このような状態について調べるため、実際に流れの中に多数の粒子をおいて移流される様子を調べる実験をおこなった。

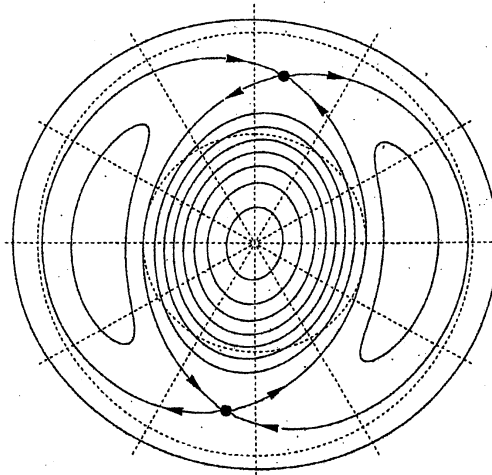


図 4: 渦とともに回転する系から見た流線 ( $t = 0$  日)。黒点がよどみ点。

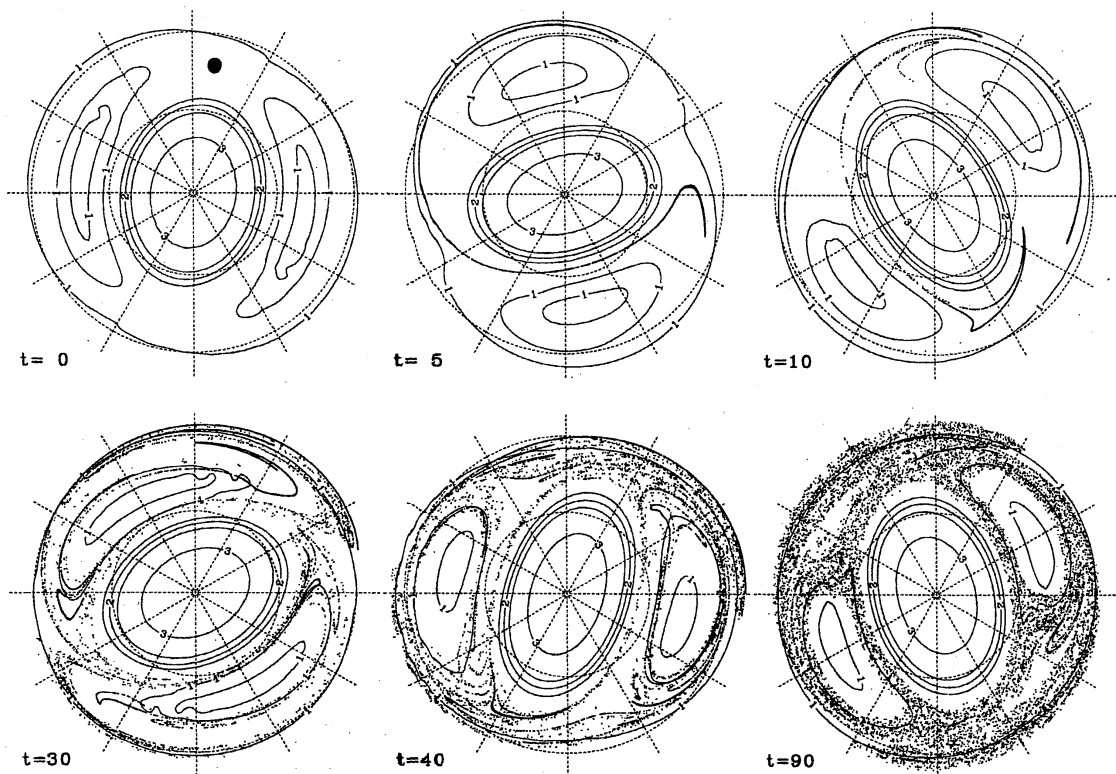


図 5:  $10^4$ 個の粒子群の移流 (黒点)。コンターは絶対渦度 (コンター間隔は 0.5)。

回転する系から見たよどみ点 (図 4) のうち 1 点を選び、その周辺に  $10^4$ 個の粒子を配置して移流させた。 $t=0$ 日において、よどみ点を中心とする半径  $0.05\text{rad}$  の円を定め、その円内に粒子をランダムに配置した。図 5 はそれらの粒子群の 90 日間の移流の様子である。まず初期段階では、粒子群はよどみ点から外向きに出る 2 方向の流線に沿って線状に引き伸ばされる。周極渦の縁に沿って伸びていった部分はやがてもう一方のよどみ点に近づき、そこで折り曲げられる ( $t=5$ 日)。折り曲げられた頂点の部分がさらに周極渦に沿ってまわってゆくに対して、粒子群の先端は時計回りに赤道方向に伸びてゆく。この過程を繰り返して、折り曲げられた部分はさらに折りたたまれ、引き伸ばされた粒子群が薄く重なり合っ、パイ状の構造をつくる ( $t=10$ 日)。さらに時間が経過すると、やがて粒子は領域を面的に埋め尽くすように広がってゆく ( $t=30, 40, 90$ 日)。

90 日間で粒子群は特定の領域中にほぼ均等に散らばりよく混合されるが、同時に粒子がまったく侵入しない領域も存在する。周極渦の内側、それをはさむ 2 つの時計回りの渦の中心部分、そして緯度  $20^\circ$  より低緯度の領域である。

### 3.4 相関次元

前節で見た粒子の広がり方は、初期にはおもに線的な伸びであり、その後時間の経過とともに面的な広がり方になっていく。このような時間的な進行、および、見る空間スケール

による違いを客観的に把握するため、粒子群の広がり方の次元を定義する統計量として相関次元を導入して解析をおこなった (Grassberger and Procaccia, 1983)。2 粒子間の相対角距離を  $10^4$  個の粒子のすべての組み合わせについて計測する。この組み合わせは  $5 \times 10^7$  通りあるが、それをすべて角距離の昇順に並べ、そして角距離に関する累積度数分布を求める。この分布のグラフを両対数で表示したときの直線の傾きが相関次元となる。一般に、粒子が線状に分布した場合には傾きが 1 になり、面状に分布した場合には 2 となる。

図 6 は、累積度数分布を  $t = 0$  日から 90 日まで 10 日おきに描いたものである。粒子の初期位置は半径  $0.05 \text{ rad}$  の円内にランダムに配置したものであるから、これは面的な広がり度で傾き 2 となっている。それから直線の傾きはいったん小さくなり、 $t = 30$  日頃には傾きはほぼ 1 になる。すなわち、 $t = 30$  日までは粒子群がおもに線状に引き伸ばされる時期である。その後、時間とともに傾きは 2 に近づき、徐々に面的な広がり方になってゆく。ただし、1 次元的な広がりから 2 次元的な広がりへの移行は、大きい方のスケールから先に起こり、それが小さいスケールに及んでいく。例えば、 $t = 60$  日では、 $10^{-1} \text{ rad}$  より大きなスケールでは傾きが 2 に近づいているが、 $10^{-2} \text{ rad}$  より小さなスケールでは依然として傾きが 1 に近い。しかし、 $t = 90$  日になると、2 次元的な広がりをする範囲は  $10^{-2} \text{ rad}$  以下にまで及んでいる。このとき、角距離  $10^{-2} \text{ rad}$  から  $10^{-1} \text{ rad}$  までの傾きが一定であるとみなして求めた相関次元は、1.70 である。

この粒子移流実験では、巨視的に見た混合が先に起こり、そのあと微視的に見た混合が起こっている。拡散現象では微視的なスケールから 2 次元的に混合してゆくが、それとはまったく異なる性質の混合である。

### 3.5 ポアンカレ断面図

ポアンカレ断面図を作成することにより、不安定な非周期軌道をもつ場所と規則的な周期軌道をもつ場所を特定することを試みる。これまでと同じ流れ場で、 $t = 0$  日において粒子を 20 点置いた。経度  $90^\circ$  上で、周極渦内に 1 点、よどみ点を通る流線付近に 19 点である。この 20 点を長時間移流させ、渦の扁平率変動の 1 周期ごとに粒子の位置を求め、その 1000 周期分をすべて 1 枚の図に重ねあわせた (図 7)。渦とともに回転する系から 1 周期ごとのストロボショットを見ることにより、周極渦は同じ形、同じ向きであるかのように見え、そこを粒子がとびとびに移動する様子を描くことができる。周極渦の内部は、粒子が規則的な運動をするトーラス領域である。内側から 2 つ目の楕円までは、軌道は規則的である。ところが、そのすぐ外側では不規則な運動となっており、この領域では流体がカオス的に混合されている。この 2 つの領域の間には明確な境界線がひけて、トーラスとカオス領域との境界を与える。

## 4. sech 型の強制を加えた実験

この場合、緯度  $50^\circ$  付近に風速の極大をもつ周極渦ができ、波数 1 と波数 3 が卓越した流

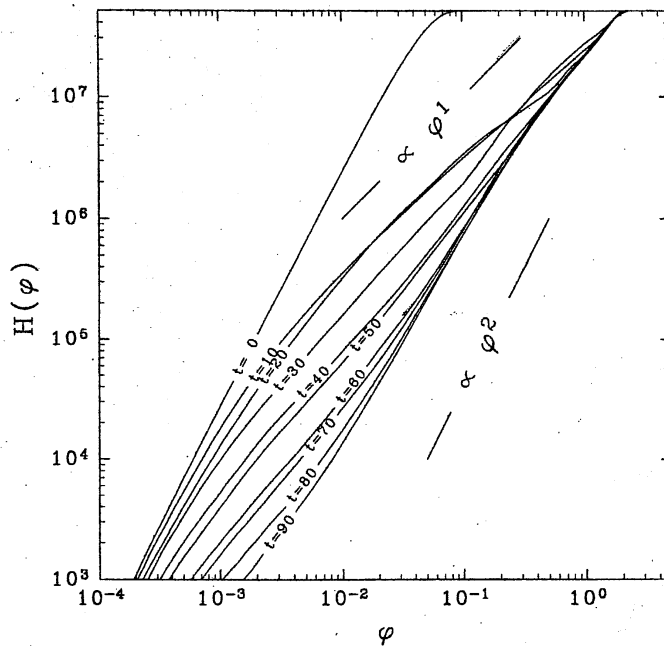


図 6: 2 点間の角距離  $\phi$  に関する累積度数分布  $H(\phi)$  の時間変化。直線の傾きが相関次元である。

れ場になる。前節と同様の解析をおこない、引き伸ばしや折りたたみをうける粒子群の様子や、大きいスケールから小さいスケールへ混合がスケールダウンしてゆく過程など、類似した結果が得られている。

ここではポアンカレ断面図のみを示す。周極渦の扁平率変動の周期は 1.59 日で、その 1000 周期にわたって 30 点の粒子を追跡した (図 8)。緯度  $20^\circ$  より赤道側、および  $80^\circ$  より極側では完全にトーラス状になっている。 $50^\circ$  付近の点線が周極渦の縁に対応し、混合領域は周極渦の内側と外側の 2 つに大別できる。周極渦の内側には、大きなトーラスと、小さい 3 倍周期のトーラスなどがある。周極渦の外側はさらに混合領域が 2 つにわかれている。

$\tanh$  型の強制と比べて、周極渦の内側にもカオスの混合領域があるのが特徴的である。周極渦の内側のトーラスは、極に非常に近い領域 ( $\phi > 80^\circ$ ) に限られる。渦の内側の混合は、扁平率変動に加えて、波数 1 と波数 3 の波成分の回転速度差によって引き起こされると考えられる。

## 5. 考察

Pierrehumbert(1991) によるカオスの混合の解析は、準周期的な流れ場を外から与えたもので運動学 (kinematics) 的である。それに対して本研究は、より現実に近い流体の方程式を解いて得られる流れに基づいており、力学 (dynamics) 的な解析である。図 1 を見ると、ニュートン型強制の  $\bar{q}_0$  が順圧不安定条件を満たしているところは、図 7,8 でカオスの混合の起きて



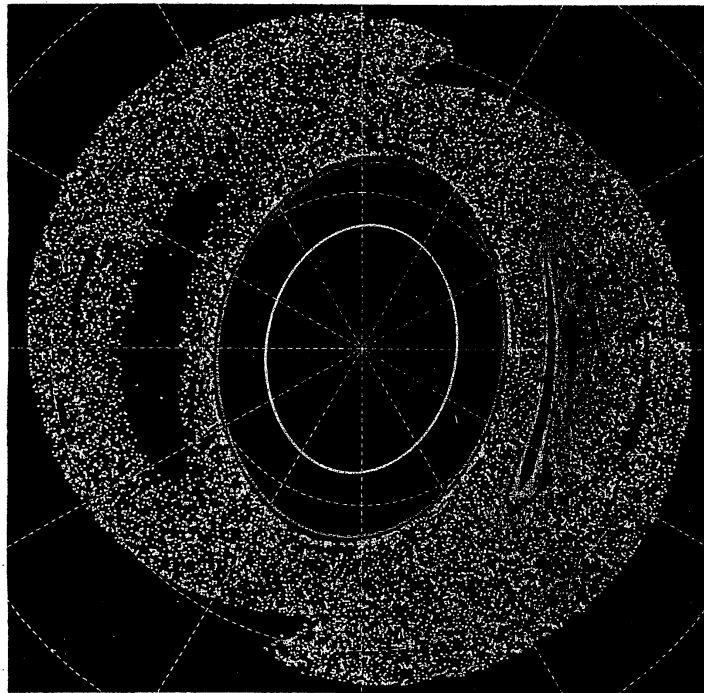


図 7: 20 粒子・1000 周期のポアンカレ断面図。

いるところと同じ緯度帯である。この領域では、強制が絶対渦度  $q$  の逆勾配を作ろうとする傾向があるが、混合の効果がまさり、 $q$  はほぼ一様化されている。この  $q$  が混合される過程は、 $q$  分布のパターンに見られるフィラメント化やマイクロ碎波 (Polvani and Plumb, 1992) によると考えられる。本研究で調べた流体粒子の混合との関連は、今後調べる課題である。

図 7 に見られるトーラスとカオス領域との境界線は、周極渦の縁と強い対応関係にある。中緯度域の流体粒子はまったく極域に入らず、逆に極域の流体が中低緯度へ流れ出ることもない、完全な「密閉容器」になっている。周極渦の縁が混合の障壁となり、渦の内側・外側それぞれで混合が起こる状況は、冬季極域の成層圏にも見られる状態であり、その基本過程が再現されていることになる。

北半球冬季成層圏では、対流圏から鉛直伝播してきたロスビー波が周極渦の周辺で碎波したり、周極渦自体が崩壊することによって、流れが乱流状態になり、物質が混合されるという仕組みが知られている (McIntyre and Palmer, 1983)。これに対して、この実験では流れは準周期的であり、乱流状態ではない。つまり、波の碎波や渦の崩壊などのイベントによらなくても物質が混合されうることを示している。ただし、カオス的混合とイベント的な乱流混合の寄与の度合いは状況によって大きく異なると考えられるので、具体的に定量的な評価をする必要がある。

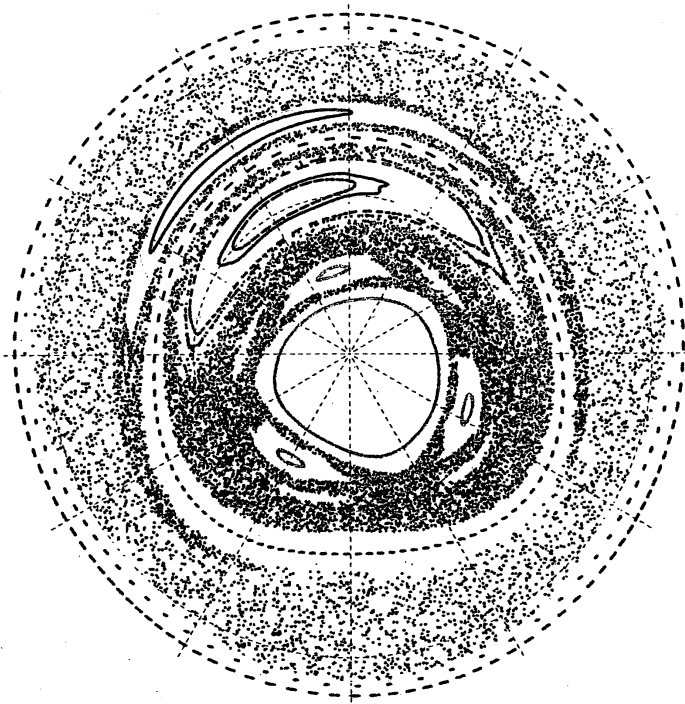


図 8: 30 粒子・1000 周期のポアンカレ断面図 (sech 型強制の実験)。

## 6. まとめ

回転球面上の2次元非発散流の数値モデルを用いて、南半球の冬季成層圏周極渦を想定した、準周期的に変動する流れ場を作り、その中で多数の粒子群の軌道を計算することにより流体の混合の様子を調べた。

渦とともに回転する系から見た流れ場におけるよどみ点の近傍に  $10^4$  個の粒子を置いて移流させる実験、それらの粒子の広がりについての相関次元解析、渦の扁平率変動の周期ごとに粒子の位置を重ねあわせてゆくポアンカレ断面図解析などをおこなった。その結果、次のような特徴を見いだすことができ、流体はカオス的に混合されていることがわかった。

- ・ 流れ場が規則的に変動する場合でも、粒子の軌道は不規則な場合がある。軌道は初期の位置に鋭敏に依存し、2点間の距離は指数関数的に拡大される。
- ・ 流体は流れ場による引き伸ばし、折り曲げを繰り返すうけて、パイ状に折りたたまれるようにして比較的短時間で混合される。
- ・ 規則的に動いて混合されない場所と不規則に動いて混合される場所がはっきりとわかれ、トーラスの島・カオスの海といったものがポアンカレ断面図に描かれる。

本研究では、運動学的ではなく力学的なモデルでカオス的混合を再現することができた。この混合の性質を成層圏での地球規模の物質混合過程にあてはめると、次のような事項を指摘できる。

- ・ まず地球規模の巨視的な混合が起こり、それがだんだんスケールダウンして微視的に

- も混合される。これは分子拡散あるいは渦拡散による混合と大きく異なる。
- ・ 周極渦の縁が強い輸送障壁となって、その外側と内側との混合が妨げられる。
  - ・ 対流圏から鉛直伝播したロスビー波の碎波などにより乱流状態にならなくても、流体はよく混合されることがありうる。

#### 謝辞

数値実験は京都大学大型計算機センター VPP500 を用いておこなった。また、作図には地球流体電脳ライブラリ (SGKS グループ, 1995) を用いた。なお、本研究は、日本学術振興会未来開拓学術研究推進事業「計算科学」および文部省科学研究費の補助を受けた。

#### 参考文献

- Aref, H., 1984; Stirring by chaotic advection. *J. Fluid Mech.*, **143**, 1–21.
- Grassberger, P., and I. Procaccia, 1983: Measuring the strangeness of strange attractors. *Physica*, **9D**, 189.
- 石岡圭一, 1997: ispack-0.1, <http://www.gfd-dennou.org/arch/ispack/>, 地球流体電脳倶楽部.
- Ishioka, K., and S. Yoden, 1995: Non-linear aspects of a barotropically unstable polar vortex in a forced-dissipative system: flow regimes and tracer transport. *J. Meteor. Soc. Japan*, **73**, 201–212.
- McIntyre, M. E., and T. N. Palmer, 1983: Breaking planetary waves in the stratosphere. *Nature*, **305**, 593–600.
- Pierrehumbert, R. T., 1991: Large-scale horizontal mixing in planetary atmospheres. *Phys. Fluids A*, **3**, 1250–1260.
- Polvani, L. M., and R. A. Plumb, 1992: Rossby wave breaking, microbreaking, filamentation, and secondary vortex formation; The dynamics of a perturbed vortex. *J. Atmos. Sci.*, **49**, 462–476.
- SGKS グループ, 1995: DCL-5.1., <http://www.gfd-dennou.org/library/dcl/>, 地球流体電脳倶楽部.