数理解析研究所講究録
1093 巻 1999 年 1-4

多値論理代数における semirigidity 問題
–自己双対関数について–

宮川正弘 (Masahiro Miyakawa)
筑波技術短期大学 (Tsukuba College of Technology)

概要

多値論理関数 $\{f: k^n \to k\}$ の集合において，$A := k = \{0, ..., k-1\}$，$k > 1$ の上の 1 つの置換 $s(x): A \to A$ に対して，

$$f(s(x)) = s(f(x))$$

を満たす関数 f は s についての（1 変数）自己双対関数といわれる。

ここでは，置換の任意の集合について，それぞれの置換の自己双対関数の共通部分が trivial な関数すなわち射影関数の集合 $J = \{f(x_1, \ldots, x_n) := x_i | i = 1, \ldots, n,\ n \in N\}$ となる条件（rigidity 条件と呼ぶ）を調べる。特に k が素数の時，orbit-free な任意の 2 つの置換 s_1 と s_2 について，その自己双対関数 S_1 と S_2 に共通に含まれる 1 変数関数が e（恒等写像）だけであることを示す。これは本文中に述べる 1 変数への帰着の予想により，S_1 と S_2 が互いに rigid であること，すなわち

$$S_1 \cap S_2 = J$$

を示唆するものである．

semirigidity 問題について，背景と既知の結果についても述べる。

1. 背景と問題

空でない基底集合 A を固定する．正の整数 $n > 0$ に対して $O_A^{(n)}$ で A の上の全ての n 変数演算 あるいは関数 (=写像 f: $A^n \to A$) の集合をあらわし，$O_A := \bigcup_{n=1}^{\infty} O_A^{(n)}$ とする．例えば $1 \le i \le n$ について，n 変数の i 番目の**射影** と呼ばれる n 変数演算 e_i^n は $e_i^n(a_1, \ldots, a_n) := a_i$ for all $a_1, \ldots, a_n \in A$ で定義される．

クロン（閉じた集合）．全ての射影関数の集合を J_A で表す。O_A の部分集合で，関数の合成に関して閉じており，J_A を含んだものはクロン *clone* と呼ばれる。(クロンの定義や一般代数 (universal algebra) における意味付けについては文献[6] や [13] にある)。例えば，集合 J_A や O_A はクロンである。全ての定数関数（すなわち $|im\ f| = 1$ である $f \in O_A^{(n)}$ の集合）の集合を c_A で表す。射影関数と定数関数の和集合 $K_A := J_A \cup c_A$ を **trivial 関数**と呼ぶ。trivial 関数もクロンをなす。包含関係を順序とし，集合の共通部分を meet 演算としたとき，A の上の全てのクロンは J_A を最小元，O_A を最大元とする束 L_A をなす。有限集合 $|A| > 2$ のとき $|L_A| = 2^{\aleph_0}$ [2] であり，この束の様子は十分には分かっていない。しかし，この束の極大元（dual atoms, = coatomes) すなわち O_A の直下の元は **極大** *maximal* or *precomplete* クロンと呼ばれ，全て既知であり，任意のクロンはいずれかの極大元の部分クロンとなっている。

関係を保存する関数．極大元を記述するには次に述べるの概念が有用である。h を正の整数とするとき，A^h の部分集合 ρ(A の元の h 組の集合）を A の上の h **項関係**と呼ぶ。n 変数関数 $f \in O_A$ が ρ を**保存する**とは，各列を ρ から任意に取って作成した h 行 n 列の任意の行列 $X = [x_{ij}]$ に対して，常に

$$(f(\boldsymbol{x}_1), f(\boldsymbol{x}_2), \ldots, f(\boldsymbol{x}_h)) \in \rho$$

が成り立つことである。例えば，ρ が (部分) 順序関係 $\le$ (すなわち反射的，反対称的，推移的 2 項関係）のとき，f が $\le$ を保存するのは，f が単調関数，すなわち $x_{11} \le x_{21}, \ldots, x_{1n} \le x_{2n}$ のとき $f(\boldsymbol{x}_1) \le f(\boldsymbol{x}_2)$ となるときである。与えられた関係 ρ を保存する関数の集合を $\mathrm{Pol}\,\rho$ で表す。

極大クロン．A の上の極大クロンの全てを与える 6 個の関係の族 $\mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_6$ が既知で，A の極大集合はすべて $\mathrm{Pol}\,\rho$ ($\rho \in \mathcal{R} := \mathcal{R}_1 \cup \ldots \mathcal{R}_6$) と表現できる (cf. [13])．極大クロンの個数も既知である (cf. [12])．全ての極大クロンの共通集合は束 L_A の最小元である J_A に一致する．このことから，それではどれくらい極大クロンを集めれば共通部分が trivial 関数になるのかという問題（後述）が生ずる。A の h 項関係 ρ は，全ての $a \in A$ に対して $(a, \ldots, a) \in \rho$ が成り立つとき**反射的**と呼ばれる。便宜上反射的な関係とそうでない関係に分けて取り扱う。

関係の集合 $\mathcal{R}$ の中で反射的でない関係はすべての単項関係，すなわち $\phi \ne \rho \ne A$ なる A の部分集合と s を A の上のある特殊な置換とするとき，$s^{\square} := \{(a, s(a)) : a \in A\}$ の形の 2 項関係の 2 種類だけである。最後の 2 項関係が本稿で扱う自己双対

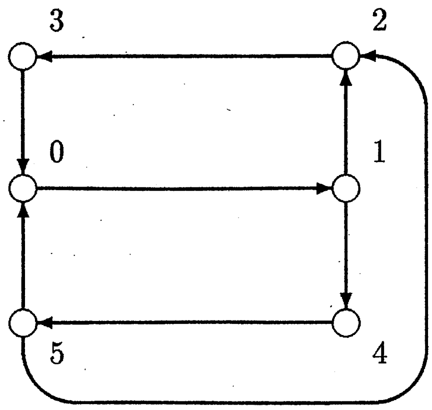

図 1: semirigid な 2 項関係 G ($|A| = 6$)

関数に対応する。

semirigidity 問題. A の上の全ての反射的関係 ρ に対して $K_A \subseteq Pol\,\rho$ が成り立つことは自明である。そこで A の上の反射的関係の集合 $\{\rho_i : i \in I\}$ について，$K_A = \bigcap_{i\in I} Pol\,\rho_i$ が成り立つとき，その関係の集合を *semirigid* と呼ぶ。ρ_i が反射的でないときは $\mathrm{Pol}\,\rho_i$ は J_A を含むが定数関数 c_A は含まないので，同様に（K_A を J_A で置き換えた）$J_A = \bigcap_{i\in I} Pol\,\rho_i$ が成り立つとき，その関係の集合 $\{\rho_i\}$ を *rigid* と呼ぶ。問題は $\mathcal{R}$ の semirigid あるいは rigid な部分集合を決定することである。

簡単のため，R がただ一つの関係 ρ からなる特別な場合についても，関係 ρ を保存する関数が trivial 関数だけである場合に関係 ρ を semirigid と呼ぶことにする。

semirigid な関係の例. $A := \mathbf{6} = \{0, \ldots, 5\}$ の上の反射的な 2 項関係（グラフ）$G = \{(0,1),(1,2),(2,3),(3,0),(1,4),(4,5),(5,2)\} \cap \iota_A$ を図 1 に示す。ここに $\iota_A := \{(a,a) | a \in A\}$（反射関係）である。$G$ は semirigid である。

関係 G は高さが 1 の次の二つの部分順序関係

$$\begin{aligned} \leq &= \{(0,1),(2,3),(4,5)\} \cup \iota_A \\ \leq' &= \{(1,2),(1,4),(3,0),(5,0)\} \cup \iota_A \end{aligned}$$

により，$G = \leq \cup \leq'$ と分解される。これより，2 つの部分順序集合の組 $\{\leq, \leq'\}$ も semirigid であることが導かれる。

高さが 1，線形，ダイアモンド形 の順序関係についての semirigidity 問題はそれぞれ [1],[5],[8] で研究されている。

例えば，$k > 3$ のとき，自然な線形順序関係 $0 < 1, \ldots < k-1$ と対になったとき semirigid になる線形順序 $\preceq$ が必ず存在する。例えば，$k = 4$ の場合 $1 \prec 3 \prec 0 \prec 2$ だけが $0 < 1 < 2 < 3$ との対で semirigid である。k が大きくなるとき $k!$ の全ての線形順序 の中に占めるこのような線形順序の割合は $1/e$ （約 13%）に収束する [8]。

2. 1 変数 (unary) への帰着の問題

C を universe A の上のクロンとする。C の 1 変数関数の集合 $C^{(1)} := C \cap O^{(1)}$ を クロン C の *foundation* と呼ぶ。以後 universe を示すインデクス $_A$ を省略する（例えば，$O^{(1)}$ は $O_A^{(1)}$ を示す).

次の補題は，多値論理の semirigidity 問題はその foundation で，すなわち次数 (arity) を 1 変数に制限して考えて良いことを示している（[3], Prop.2-2 および [10]）。

Proposition 1. $|A| > 2$ とする。このとき $K^{(1)}$ が A の上のクロン C の *foundation* となるのは，$C = K$ のときであり，このときに限る.

この補題 $|A| = 2$ のときは成立しない。クロンは共通集合演算について閉じているので，関係の集合 R が semirigid になるための必要十分条件は R の中の全ての関係を保存する 1 変数関数の集合の共通部分が，1 変数の trivial 関数，すなわち 1 変数定数関数と射影関数（項等写像）となることである。この補題は K を K_{h-1}（高々$h-1$ 値しか取らない関数のなすクロン）で置き換えて強化することができる [7]。ここに，$K_{h-1} := \{f \in O : |im\ f| \leq h-1\} \cup J$ for $1 < h \leq k := |A|$ で，$h = 2$ が Proposition 1 に帰着する。

それでは，rigidity についても同様に 1 変数に還元できるであろうか? K の代わりに J と置き換えたとき，この命題は一般には成立しない。すなわち，

Proposition 2. 有限集合 A *($|A| \geq 2$)* の上の *clone* C について次は成立しない：

$$\textit{if } C^{(1)} = J^{(1)} (= \{e\} \text{ :恒等写像}) \textit{ then } C = J.$$

証明。例えば，自然な順序関係 $0 < 1 \ldots < k-1$ ($|A| = k$) を用いて定義される演算 $\wedge$ で生成されるクロンは上の命題の反例になっている。ここに，$x \wedge y := \min(x, y)$ とする。□

しかしながら，一般には成立しない上記命題は，本稿でで考える自己双対関数のなすクロンについては成立しているものと予想される（本稿の作成時点では証明は得ていない）。本稿の最後にこの問題を未解決問題として定式化する。

3. 自己双対極大クロン

ここでは semirigidity 問題は rigdity 問題に帰着する。S_k を $A := \boldsymbol{k} := \{0, \ldots, k-1\}$ の上の置換の集合（対称群）とする。置換 $s \in S_k$ について二項関係

$$s^{\square} = \{(x, s(x)) | x \in \boldsymbol{k}\}.$$

と置く。Pol $s^{\square}$ は置換 s についての**自己双対関数**と呼ばれる。Pol $s^{\square}$ が極大クロンとなるのは，$k = p \cdot \ell$, p 素数とするとき，置換 s が長さ p の ℓ 個のサイクルの積となることが必要十分である。本稿では，このような置換 s を固定する。置換 s について，集合 $\{s, s^2, \ldots, s^k\}$ を s の *orbit* と呼ぶ，ここに $s^k = e$（恒等写像）である。2 つの置換はその orbit が e のみを共有するとき *orbit-free* と呼ぶ。次の補題は既知である。

Lemma 3. (cf. [4]). $s, s' \in S^k$ について，Pol $s^{\square}$ = Pol $s^{\square'}$ となる必要十分条件は

$$s^i = s' \textit{ for some } i \in \{1, \ldots, k-1\}$$

である。

すなわち，2 つの置換は orbit-free のとき，かつそのときのみ異なる極大クロンを誘起する。

$k = \ell \cdot p$ (p 素数, $\ell \geq 1$) とし，$\boldsymbol{k} = \{a_{1,0}, \ldots, a_{1,p-1}, \ldots, a_{\ell,0}, \ldots, a_{\ell,p-1}\}$ と置いたときに置換 s が

$$s(a_{i,r}) = a_{i,r+1 \pmod p} \quad (i = 1, \ldots, \ell; r = 0, \ldots, p-1).$$

をみたしているとする。このとき

$$s^j(a_{i,r}) = a_{i,r+j \pmod p}) \text{ for } j = 0, 1, \ldots.$$

が成り立つ。集合 $\{a_{i,0}, \ldots, a_{i,p-1}\}$ (s の i サイクル) の各元は s により巡回置換されるので，$a_{i,0} = \min\{a_{i,0}, \ldots, a_{i,p-1}\}$ と正規化して良い。

1 変数関数 f が s について自己双対であるとは，定義から全ての $x \in \boldsymbol{k}$ について

$$s(f(x)) = f(s(x)). \tag{1}$$

が成り立つことと同値である。これより

$$f(a_{i,r}) = s^r(f(a_{i,0})) \; (r = 0, \ldots, p-1; i = 1, \ldots, \ell). \tag{2}$$

を得る。関数 f の i サイクルへの制限（$=i$ サイクルから $\boldsymbol{k}$ の写像）を f の i 成分と呼び，

$$\begin{bmatrix} a_{i,0}, & \ldots, & a_{i,p-1} \\ f(a_{i,0}), & \ldots, & f(a_{i,p-1}) \end{bmatrix}.$$

で表す。

1 変数自己双対関数 f は成分ごとに次のように表現できる。

Lemma 4. *1* 変数関数 f が s について自己双対になるのは，各 $i \in \{1, \ldots, \ell\}$ について i 成分が

$$\begin{bmatrix} a_{i,0} & , \ldots, & a_{i,p-1} \\ a_{j_i,r_i} & , \ldots, & a_{j_i,r_i+p-1 \pmod p} \end{bmatrix}.$$

と表現できることが必要十分である。ここに，$j_1, \ldots, j_\ell \in \{1, \ldots, \ell\}$，$r_1, \ldots, r_\ell \in \{0, \ldots, p-1\}$ とする。

すなわち f は 各サイクルをサイクルの上に s を保存しながら写像する.

これより，以下の系を得る。

Corollary 5. s について自己双対な *1* 変数関数の個数は次式で与えられる。

$$|(\mathrm{Pol}\, s^{\square})^{(1)}| = k^{\ell}. \tag{3}$$

Corollary 6. s について自己双対な *1* 変数全射関数の個数は次式で与えられる。

$$|(\mathrm{Pol}\, s^{\square})^{(1,\mathrm{onto})}| = \ell!\, p^{\ell}. \tag{4}$$

補題 4 から次の結果が得られる。

Theorem 7. k が素数のとき，自己双対極大クロンの任意の対, すなわち *orbit-free* な置換で誘起される任意のクロンの対の *1* 変数部分集合は恒等写像 e のみを共有する。

次の結果も同じ補題から得られる。

Corollary 8. 二つの置換 s と s' が成分を共有すれば，$\{s^{\square}, s'^{\square}\}$ は *rigid* ではない。

次の例は，上の条件が十分条件ではないことを示している。

例. 置換 s and s' がそれぞれ次で与えられるものとする。

$$s = \begin{pmatrix} 01 & 23 \\ 10 & 32 \end{pmatrix} \text{ と } s' = \begin{pmatrix} 02 & 13 \\ 20 & 31 \end{pmatrix}.$$

このとき 置換 $f = \binom{03\ 12}{30\ 12}$ で与えられる関数 f は Pol $s^{\square}$ と Pol $s'^{\square}$ の両方に属する。

次の例は長さが異なる 2 つの置換の間でも恒等写像以外の置換を共通に含むことがあることを示している。

例. 2つのクロン

$$\mathrm{Pol}\begin{pmatrix}01\ 23\ 45\\10\ 32\ 54\end{pmatrix} \text{ と } \mathrm{Pol}\begin{pmatrix}012\ 345\\120\ 453\end{pmatrix}$$

は trivial 関数でない 1 変数関数 $\begin{bmatrix}012345\\453201\end{bmatrix}$ を含んでいる。

Σ を素数長 p の ℓ 個のサイクルからなる全ての置換からなる集合とする ($k = p\cdot\ell$)。このとき次が未解決である。

未解決問題 1（1 変数帰着の予想）. $s_1, \ldots, s_m \in \Sigma$ について

$$(\cap_{i=1}^{m} \mathrm{Pol}\, s_i^{\square})^{(1)} = \{e\} \quad \text{(恒等写像)}$$

が成り立つとき

$$\cap_{i=1}^{m} \mathrm{Pol}\, s_i^{\square} = J \quad \text{(射影関数)}$$

が成り立つ。

未解決問題 2. $\{s_1^{\square}, \ldots, s_m^{\square}\}$ が rigid になる $s_1, \ldots, s_m \in \Sigma$ を特徴づける。

4. おわりに

多値論理関数における semirigidity 問題を概観し，自己双対関数の rigidity 問題に新しい結果を与えた。また，未解決問題を示した。

謝辞. Prof I.G. Rosenberg には有益な助言をいただきました。

参考文献

[1] J.Demetrovics, M.Miyakawa, I.G.Rosenberg, D.Simovici, I.Stojmenović. Intersections of isotone clones on a finite set, *Proc. 20th International Symp. on Multiple-Valued Logic*, Charlotte, 248-253, 1990.

[2] Iu.I.Ianov, A.A.Mučnik. Existence of k-valued closed classes without a finite basis (Russian), *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* **127**(1):44-46, 1959.

[3] F.Länger, R.Pöschel. Relational systems with trivial endomorphisms and polymorphisms. *J. Pure Appl. Algebra* **32**(2):129-142, 1984.

[4] D.Lau. *Funktionenalgebren über endlichen Mengen Band 1*, Monograph, Universität Rostock, pp. 592, 1998.

[5] V.Laskia, M.Miyakawa, A.Nozaki, G.Pogosyan, I.G.Rosenberg. Semirigid sets of diamond orders, *Discrete Mathematics* 156:277-283, 1996.

[6] A.I.Maltsev. *Post's Iterative Algebras* (Russian), Monograph, Novosibirsk State University, 1976.

[7] M.Miyakawa, A.Nozaki, G.Pogosyan, I.G.Rosenberg. Semirigid sets of central relations over a finite domain, *Proc. 22th International Symposium on Multiple-Valued Logic*, 300-307, May, 1992.

[8] A.Nozaki, M.Miyakawa, G.Pogosyan, I.G.Rosenberg. The number of orthogonal permutations, *Europ. J. Combinatorics* **16**:71-85, 1995.

[9] A.Nozaki, G.Pogosyan, M.Miyakawa, I.G.Rosenberg. Semirigid sets of quasilinear clones, *Proc. 23rd International Symp. on Multiple-Valued Logic*, Sacramento, 1993, 105-110.

[10] P.P.Pálfy. Unary polynomials in algebra I. *Algebra Universalis* **18**:162-273, 1984.

[11] R.Pöschel, L.A.Kalužnin. *Funktionen und Relationen Algebren*, Ein Kapitel der Diskreten Mathematik (German), Math. Monographien B. 15, VEB Deutscher Verlag d. Wissen., Berlin, pp.259, 1979. Also Math. R. B. 67, Birkhäuser Verlag, Basel & Stuttgart, 1979.

[12] I.G.Rosenberg. The number of maximal closed classes in the set of functions over a finite domain, *J. Combinat. Theory, Ser. A* **14**:1-7, 1973.

[13] I.G.Rosenberg. Completeness properties of multiple-valued logic algebra, in *Computer Science and Multiple-valued logic, Theory and Applications* (D.C. Rine ed.), North-Holland,s 2-nd revised ed., 144-186, 1984.

[14] G.Tardós. A maximal clone of monotone operations which is not finitely generated, *Order* **3**:211-218, 1986.