

セパトリックスをもつ可積分系の 広田差分について

大阪大学 峯崎 征隆 (Yukitaka Minesaki)
大阪大学 中村 佳正 (Yoshimasa Nakamura)

1 はじめに

ソリトン方程式のソリトン解を導出する極めて有効な方法に広田の直接法 [1] がある。これは従属変数を変数変換した後、ソリトン方程式を双線形方程式に分離 (decoupling) し、双線形方程式を解くことでソリトン解を構成する方法である。直接法は双線形レベルでの差分化を通じてもとのソリトン方程式の差分化としても用いられる [2]。しかも、この差分法はソリトン方程式に限らず広く双線形方程式に decoupling 可能な微分方程式に対しても適用可能である。この手法を広田差分法と呼ぶこととする。Hirota [3] はいくつかの例で広田差分が

- (A) もとの連続系の解と同じ関数形で表される解をもつ、
- (B) 保存量をもつ

ことを示している。また、Hirota は単振り子と非調和振動子について、運動方程式の広田差分、その保存量および回転運動を記述する解が与えている [3]。しかし、単調増加解と振動解は求められていない。また、運動方程式の解のこのような分類とハミルトニアンとの関係が広田差分についても同様に成り立つかどうかとも論じられていない。

広田差分法を数値計算法として見る視点もある。例として、Nakamura-Hashimoto [4] による 3 種ロトカ - ボルテラ方程式に対する、オイラー法、シンプレクティック数値積分法、広田差分法の比較数値実験がある。この場合、広田差分では周期軌道が時間刻み幅に依らず壊れないことが確認されている。

本研究では、相空間上にセパトリックスとホモクリニック点が存在する力学系で解と保存量の関係が既知の可積分系として、単振り子、非調和振動子を取りあげ、以下の 2 点について考察する。

- (i) 広田差分がセパトリックスをもち、その解の分類と保存量の値との関係がもとの連続系における解の分類とハミルトニアンとの関係と一致するかどうか調べる。
- (ii) 広田差分に対して正準変数に対応する変数を導入し、保存量の様々な値に対する相空間上の軌道を描き、もとの連続系の相空間上の軌道と比較する。

2 単振り子の運動

2.1 連続系の運動

単振り子の運動方程式

$$\frac{d^2q(t)}{dt^2} = -\sin q(t) \quad (1)$$

の解はハミルトニアン

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{dq(t)}{dt} \right)^2 + (1 - \cos q(t)) \quad (2)$$

の値に応じて以下の3通りに分けられる.

[a] $H < 2$ の場合 (振動解)

$$\sin \frac{q}{2} = k \operatorname{sn}(t, k), \quad t \geq 0. \quad (3)$$

ただし, α を最大振幅角とすれば, 母数 k は $k = \sin(\alpha/2)$ と表される.

[b] $H = 2$ の場合 (単調増加解)

$$\sin \frac{q}{2} = \tanh(t), \quad t \geq 0. \quad (4)$$

この解は相空間上でセパトリックスを与える.

[c] $H > 2$ の場合 (回転解)

$$q = 2 \operatorname{am}(t, k), \quad t \geq 0. \quad (5)$$

ここで, $k = p_0/2$. ただし, p_0 は最下点角速度である. am は振幅関数, sn はヤコビの楕円関数である.

2.2 単振り子の広田差分

単振り子の運動方程式 (1) の従属変数 $q(t)$ を

$$q(t) = 4 \tan^{-1} \frac{G(t)}{F(t)} \quad (6)$$

と変換すると, (1) は

$$\begin{aligned} & (F(t)^2 - G(t)^2)D_t^2 G(t) \cdot F(t) - F(t)G(t)\{D_t^2(F(t) \cdot F(t) - G(t) \cdot G(t))\} \\ & = -G(t)F(t)(F(t)^2 - G(t)^2) \end{aligned} \quad (7)$$

と書き表される. (7) は以下の双線形形式に decoupling できる.

$$\begin{aligned} D_t^2 G(t) \cdot F(t) & = \delta^2(\lambda - 1)G(t) \cdot F(t), \\ D_t^2(F(t) \cdot F(t) - G(t) \cdot G(t)) & = \delta^2\lambda(F(t)^2 - G(t)^2). \end{aligned} \quad (8)$$

λ は任意のパラメータである. この2つの双線形方程式を差分化する方法として, D-operator を

$$D_t(\text{関数の積}) \longrightarrow \frac{1}{\delta} \sinh(\delta D_t)(\text{関数の積}). \quad (9)$$

に変換することが考えられる. ここで, δ は差分幅である.

この変換を用いると, (8) は, それぞれ,

$$\begin{aligned} \sinh^2(\delta D_t)F(t) \cdot G(t) & = \delta^2(\lambda - 1) \cosh^2(\delta D_t)F(t) \cdot G(t), \\ \sinh^2(\delta D_t)(F(t) \cdot F(t) - G(t) \cdot G(t)) & = \delta^2\lambda(F(t)^2 - G(t)^2) \end{aligned} \quad (10)$$

に差分化される. 変数変換

$$\begin{aligned} F(t) & = \exp \frac{\rho(t)}{4} \cos \frac{q(t)}{4}, \\ G(t) & = \exp \frac{\rho(t)}{4} \sin \frac{q(t)}{4} \end{aligned} \quad (11)$$

を行うと, (10) は, それぞれ,

$$\begin{aligned} & (1 + 2\delta^2(\lambda - 1)) \exp \frac{\rho(t)}{2} \sin \frac{q(t)}{2} \\ & = \exp \frac{q(t+2\delta) + q(t-2\delta)}{4} \sin \frac{q(t+2\delta) + q(t-2\delta)}{4}, \\ & \exp \frac{\rho(t+2\delta) + \rho(t-2\delta)}{4} \cos \frac{q(t+2\delta) + q(t-2\delta)}{4} \\ & = (1 + 2\delta^2\lambda) \exp \frac{\rho(t)}{2} \cos \frac{q(t)}{2} \end{aligned} \quad (12)$$

となる. (12) から $\rho(t)$ を消去すると

$$\begin{aligned} & \{1 + (2\lambda - 1)\delta^2\} \sin \frac{q(t+2\delta) - 2q(t) + q(t-2\delta)}{4} \\ & = -\delta^2 \sin \frac{q(t+2\delta) + 2q(t) + q(t-2\delta)}{4} \end{aligned} \quad (13)$$

が得られる. これが単振り子の運動方程式 (1) の広田差分である. Hirota は 1977 年 [3] に $\lambda = 1/2$ の場合を導出している. また, この差分方程式は保存量として

$$\mathcal{H} = \frac{2}{\delta^2} \{1 + 2\lambda\delta^2\} \sin^2 \frac{q(t+\delta) - q(t-\delta)}{4} + 2 \sin \frac{q(t+\delta)}{2} \sin \frac{q(t-\delta)}{2} \quad (14)$$

をもつ. $\delta \rightarrow 0$ の連続極限をとると, \mathcal{H} はもとの単振り子のハミルトニアン (2) に帰着する.

2.3 差分系の運動

もとの単振り子の方程式と同じく、保存量 \mathcal{H} の値が 2 より大きい、等しい、小さいかに応じて (13) の解の挙動は以下の 3 通りに分類される。各解を区別する保存量の値 $\mathcal{H} = 2$ は差分刻み幅に依存しない。

[a] $\mathcal{H} < 2$ の場合 (振動解)

$$\sin \frac{q(t)}{2} = \kappa \operatorname{sn}(\Omega t, \kappa), \quad t = 0, \delta, 2\delta, \dots \quad (15)$$

と表される。ただし、定数 Ω と母数 κ の関係は

$$\operatorname{cn}(2\Omega\delta, \kappa) = \frac{1 + 2(\lambda - 1)\delta^2}{1 + 2\lambda\delta^2} \quad (16)$$

によって δ と λ から定まる。

[b] $\mathcal{H} = 2$ の場合 (単調増加解)

$$\sin \frac{q(t)}{2} = \tanh(\Omega t), \quad t = 0, \delta, 2\delta, \dots \quad (17)$$

と表される。ただし、 Ω は

$$\operatorname{cosh}(2\Omega\delta) = \frac{1 + 2\lambda\delta^2}{1 + 2(\lambda - 1)\delta^2} \quad (18)$$

によって δ と λ から定まる。この解はセパトリックスに対応する。

[c] $\mathcal{H} > 2$ の場合 (回転解)

$$q(t) = 2\operatorname{am}(\Omega t, \kappa), \quad t = 0, \delta, 2\delta, \dots \quad (19)$$

と表される。ただし、変数 Ω と母数 κ は δ , λ と

$$\operatorname{dn}(2\Omega\delta, \kappa) = \frac{1 + 2(\lambda - 1)\delta^2}{1 + 2\lambda\delta^2} \quad (20)$$

の関係にある。

広田差分についても、保存量 \mathcal{H} の任意の値に対して、広田差分の解の関数形は連続系のそれと一致する。

3 非調和振動子の運動

3.1 連続系の運動

非調和振動子の運動方程式

$$\frac{d^2q}{dt^2} = -\alpha q + \beta q^3, \quad q = q(t), \quad \alpha > 0 \quad (21)$$

はハミルトニアン

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{dq}{dt} \right)^2 + \frac{\alpha}{2} q^2 - \frac{\beta}{4} q^4 \quad (22)$$

をもつ。 $\beta = 0$ のとき (21) は調和振動子で線形バネや線形 LC 回路を記述し、その解は三角関数で与えられる。 $\beta \neq 0$ のとき β の符号に依って解の挙動が変化する。特に $\beta > 0$ のときはハミルトニアンの大きさに依っても解の挙動が大きく変化する。

[a] $\beta > 0$ の場合

(i) $H < \alpha^2/4\beta$ の場合 (振動解)

ハミルトニアン (22) において、 $d^2q/dt^2 = 0$ となる q は 4 個ある。それを $q = \pm a, \pm b$ 、ただし $0 < b < a$ 、とすると、対応する運動方程式 (21) の解は

$$q = b \operatorname{sn} \left(a \sqrt{\frac{\beta}{2}} t, \frac{b}{a} \right) \quad (23)$$

で表される。これは振動解である。

(ii) $H = \alpha^2/4\beta$ (単調増加解) の場合

(22) に $H = \alpha^2/4\beta$ を代入した微分方程式を解くと、運動方程式 (21) の解は

$$q = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \tanh \left(\sqrt{\frac{\alpha}{2}} t \right) \quad (24)$$

となる。 t の増大にともなって $q(t)$ は単調に増加し、 $\sqrt{\beta/\alpha}$ に達するのに無限の時間を要する。

(iii) $H > \alpha^2/4\beta$ (周期的発散解) の場合

$$q^2(t) = 2 \sqrt{\frac{H}{\beta} \frac{1 - \operatorname{cn}(2(\beta H)^{1/4} t, \sin \gamma)}{1 + \operatorname{cn}(2(\beta H)^{1/4} t, \sin \gamma)}},$$

$$\sin^2 \gamma = \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{4} \frac{1}{\sqrt{\beta H}}. \quad (25)$$

この解は t の間隔 $4K(\sin \gamma)$ ごとに q が発散することを示している。ここで、 K は第一完全楕円積分である。

[b] $\beta < 0$ の場合

運動方程式 (21) の解は

$$q = B \operatorname{cn}(At, k), \quad 0 \leq k \leq 1/\sqrt{2} \quad (26)$$

によって与えられる。ただし、 k はパラメータ、定数 A, B は

$$A = \sqrt{\frac{\alpha}{1-2k^2}} \quad B = \sqrt{\frac{2k^2 \alpha}{1-2k^2 \beta}}$$

となる。これは振動解である。

3.2 非調和振動子の広田差分

Hirota [3] は以下の様に非調和振動子の差分化を行っている。非調和振動子の運動方程式 (21) の従属変数 $q(t)$ を

$$q(t) = \frac{G(t)}{F(t)} \quad (27)$$

と変換すると、(21) は

$$F(t)(D_t^2 + \alpha)G(t) \cdot F(t) - G(t)(D_t^2 F(t) \cdot F(t) + \beta G(t)^2) = 0 \quad (28)$$

と表される。(28) は

$$\begin{aligned} (D_t^2 + \alpha)G(t) \cdot F(t) &= 0, \\ D_t^2 F(t) \cdot F(t) + \beta G(t)^2 &= 0 \end{aligned} \quad (29)$$

と2つの双線形形式に decoupling できる。この2つの双線形方程式を単振り子と同じ方法で差分化すると、

$$\begin{aligned} \sinh^2(\delta D_t)G(t) \cdot F(t) &= -\alpha \delta^2 G(t)F(t), \\ \sinh^2(\delta D_t)F(t) \cdot F(t) &= -\beta \delta^2 G(t)^2 \end{aligned} \quad (30)$$

を得る。(27) を (30) に代入すると

$$\begin{aligned} \frac{q(t+2\delta) + q(t-2\delta)}{2(1-2\alpha\delta^2)q(t)} &= \frac{F^2(t)}{F(t+2\delta)F(t-2\delta)}, \\ \frac{1}{1-2\beta\delta^2 q^2(t)} &= \frac{F^2(t)}{F(t+2\delta)F(t-2\delta)} \end{aligned} \quad (31)$$

となる. (31) から $F(t), F(t+2\delta), F(t-2\delta)$ を消去して,

$$\{q(t+2\delta) + q(t-2\delta)\}\{1 - 2\beta\delta^2 q^2(t)\} = 2(1 - 2\alpha\delta^2)q(t) \quad (32)$$

が得られる. これが非調和振動子 (21) の広田差分である [3].

非調和振動子の広田差分 (32) は保存量

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{q(t+\delta) - q(t-\delta)}{2\delta} \right\}^2 + \frac{1}{2} \alpha q(t+\delta)q(t-\delta) - \frac{1}{4} \beta q(t+\delta)^2 q(t-\delta)^2 \quad (33)$$

をもつ [3]. $\delta \rightarrow 0$ の連続極限をとると保存量 \mathcal{H} はもとの非調和振動子のハミルトニアン (22) に帰着する.

3.3 差分系の運動

もとの非調和振動子と同じく, β の符号に依って, 解の挙動が変化し, 特に正のときには保存量 \mathcal{H} の大きさに依っても解の挙動が大きく変化する. 解の分類を与える \mathcal{H} の値は差分刻み幅 2δ に依存しない.

[a] $\beta > 0$ の場合

(i) $\mathcal{H} < \alpha^2/4\beta$ の場合 (振動解)

$$q(t) = A_1 \operatorname{sn}(B_1 t, \kappa), \quad t = 0, \delta, 2\delta, \dots \quad (34)$$

と表される. ただし, A_1, B_1 は

$$\operatorname{cn}(2B_1\delta, \kappa) \operatorname{dn}(2B_1\delta, \kappa) = 1 - 2\alpha\delta^2, \quad \operatorname{sn}^2(2B_1\delta, \kappa) = \frac{2A_1^2\beta}{\kappa^2} \delta^2 \quad (35)$$

によって, δ と κ から定まる.

(ii) $\mathcal{H} = \alpha^2/4\beta$ の場合 (単調増加解)

広田差分 (32) の解は

$$q(t) = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \tanh(B_2 t), \quad t = 0, \delta, 2\delta, \dots \quad (36)$$

と表される. ただし, B_2 は

$$\sinh^2(2B_2\delta) = \frac{2\alpha\delta^2}{1 - 2\alpha\delta^2} \quad (37)$$

によって δ から定まる. また, これはセパトリックスにあたる.

(iii) $\mathcal{H} > \alpha^2/4\beta$ の場合 (周期的発散解)

広田差分 (32) の解は

$$q^2(t) = \frac{A_3^2(1 - \operatorname{cn}(B_3 t, \kappa))}{1 + \operatorname{cn}(B_3 t, \kappa)}, \quad t = 0, 2\delta, 4\delta, \dots, \quad (38)$$

ただし, A_3, B_3 は

$$\operatorname{dn}(2B_3\delta, \kappa) = \frac{1 - 2\alpha\delta^2}{1 + 2\beta\delta^2 A_3^2}, \quad \operatorname{cn}(2B_3\delta, \kappa) = \frac{1 - 2\beta\delta^2 A_3^2}{1 + 2\beta\delta^2 A_3^2}. \quad (39)$$

によって, δ と κ から定まる.

[b] $\beta < 0$ の場合

広田差分 (32) の解は

$$q(t) = A_4 \operatorname{cn}(B_4 t, \kappa), \quad t = 0, \delta, 2\delta, \dots \quad (40)$$

と表される. A_4, B_4 は

$$1 - \frac{\operatorname{cn}(2\delta B_4, \kappa)}{\operatorname{dn}^2(2\delta B_4, \kappa)} = 2\alpha\delta^2, \quad \kappa^2 = -2\delta^2 \beta A_4^2 \frac{\operatorname{dn}^2(2\delta B_4, \kappa)}{\operatorname{sn}^2(2\delta B_4, \kappa)} \quad (41)$$

によって δ と κ から定まる. これは振動解で, Hirota が既に [3] で求めている.

4 単振り子の差分系の挙動

4.1 定数 λ と解の存在範囲

cn 関数の性質 $-1 \leq \operatorname{cn}(x, \kappa) \leq 1$ から (16) を満たす λ が存在する範囲は,

$$\lambda \geq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\delta^2}\right) \quad (42)$$

となる. $\lambda > 1/2$ のとき任意の時間刻み幅 $2\delta > 0$ に対して (42) が成り立つ. つまり, $\lambda > 1/2$ に選んでおけば, 任意の 2δ に対して (15) の形の振動解が存在する.

(b) $\mathcal{H} > 2$ の場合

(20) の範囲を満たす κ の範囲は, dn 関数の性質 $\sqrt{1 - \kappa^2} \leq \operatorname{dn}(x, \kappa) \leq 1$ から

$$\kappa \geq \frac{\delta}{1 + 2\lambda\delta^2} \sqrt{2(1 + (2\lambda - 1)\delta^2)} \quad (43)$$

である. δ が小さいほど, または $\lambda > 1$ の場合は λ が大きくなるほど, κ の下限が単調に減少する (Fig.1 参照). つまり, λ を大きくとればそれだけより大きな差分幅 2δ に対して (19) の形の回転解が存在する. しかし, λ, δ をどのようにとっても非常に高速な回転運動 (κ が 0 に近い場合の運動) を (19) で表すことはできない.

また,保存量と回転解の κ との関係は

$$\mathcal{H} = \frac{1}{\delta^2} \left\{ (1 + 2\lambda\delta^2) - \sqrt{(1 + 2\lambda\delta^2)^2 - 4\{1 - (2\lambda - 1)\delta^2\} \delta^2 / \kappa^2} \right\} \quad (44)$$

で表される. これは回転解 $t = t \pm \delta$ における回転解 (19) において $t = t \pm \delta$ としたものを保存量 (14) に代入し, 楕円関数の半角の公式を使って得られる. これから, am 関数で与えられる回転解は $\lambda = 1, \delta = 1$ の場合 $\mathcal{H} \leq 3$ の範囲の運動しか与えないことがわかる.

4.2 差分系の解軌道

$t = 0$ において $q(0) = 0$ を通り, -5 から 5 までの 0.5 間隔で \mathcal{H} をとった解曲線を見る. $\lambda = 1, \delta = 0.1$ の場合は Fig.2, $\lambda = 1, \delta = 1$ の場合は Fig.3 の様になる. ただし, 縦軸は角速度の差分近似

$$p(t) = \frac{q(t + 2\delta) - q(t - 2\delta)}{4\delta}$$

である.

Fig.3 では Fig.2 の様なセパトリックスは見えず, 代わりに閉軌道と開軌道との間を行き来する軌道がみられる. これは時間発展の間に初め $\mathcal{H} = 2$ であったのが, 丸め誤差などにより \mathcal{H} が 2 前後で振動するためである. また, 4.1 節で述べたように $\lambda = 1, \delta = 1$ の場合は $\mathcal{H} > 3$ に対応する回転解は am で表せないが, Fig.3 では $\mathcal{H} > 3$ の解軌道も存在している. これは, am 関数以外の形で表される回転解が存在することを示している.

5 まとめ

広田差分法は元のソリトン方程式のソリトン解の関数形を保存する差分法として考え出されたものである. しかし, ソリトン解, 周期的境界条件のもとでの振動解などを除いてソリトン方程式の解の構造は十分に調べられていない. 保存量の値と解の関数形の関係についてもあまりわかっていない. ソリトン方程式の広田差分についてもこの関係に対応するものをもつかどうかこれまで調べられたことがなかった. そこで, 本研究では比較的解の構造が単純で振動解以外の解をもつ単振り子, 非調和振動子の運動を取り上げ, その広田差分が連続形のハミルトニアンと解の関数形との関係に類似する保存量と解の関数形と保存量との間の関係をもつことを明らかにした. しかも, 広田差分のセパトリックスに対応する保存量は連続形のハミルトニアンに一致し差分幅に依存しないことがわかった.

しかし, 単振り子の広田差分においては, 高速回転に対応する回転解は元の連続系の回転解と同じ関数形では表せないことがわかった.

なお, 2 節, 3 節の内容は論文 [6] の概説である.

参考文献

- [1] 広田良吾 : ソリトンの数理, 岩波書店, 1992

- [2] 広田良吾 : 差分学のすすめ, 応用数理 **3**(1993), 48-57
- [3] R. Hirota: *Difference analogues of nonlinear evolution equation in Hamiltonian form*, Hiroshima Univ., preprint, 1977
- [4] Y. Nakamura and T. Hashimoto: *On the discretization of the three-dimensional Volterra system*, Phys. Lett. A, **193**(1994), 42-46
- [5] 戸田盛和 : 特殊関数, 理工系基礎数学 6, 朝倉書店, 1981
- [6] Y. Minesaki and Y. Nakamura: *On an integrable discretization of integrable system with separatrix*, to be published in Phys. Lett. A

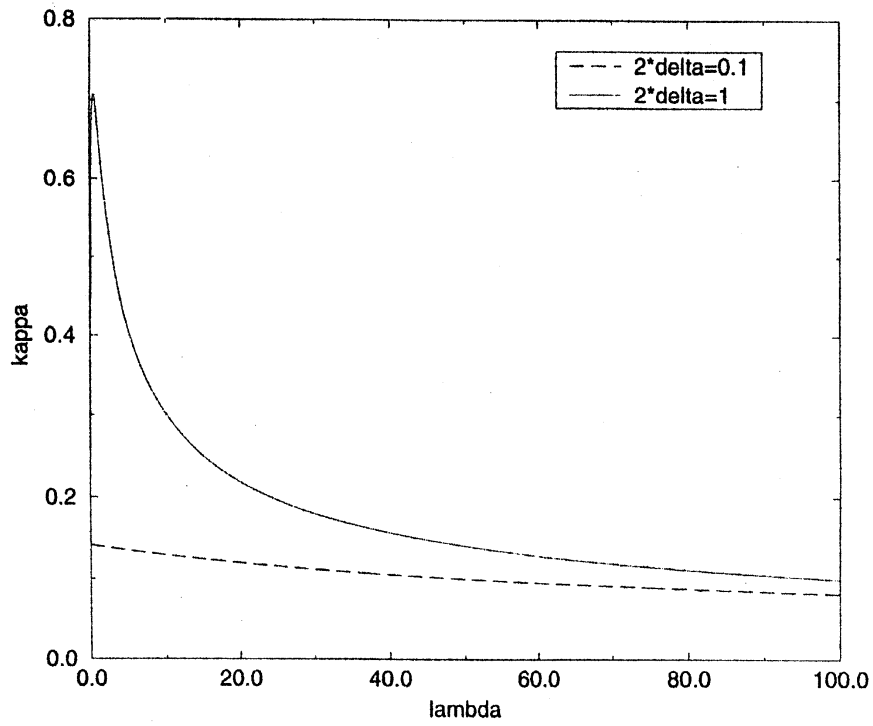


Fig.1 λ と κ の関係

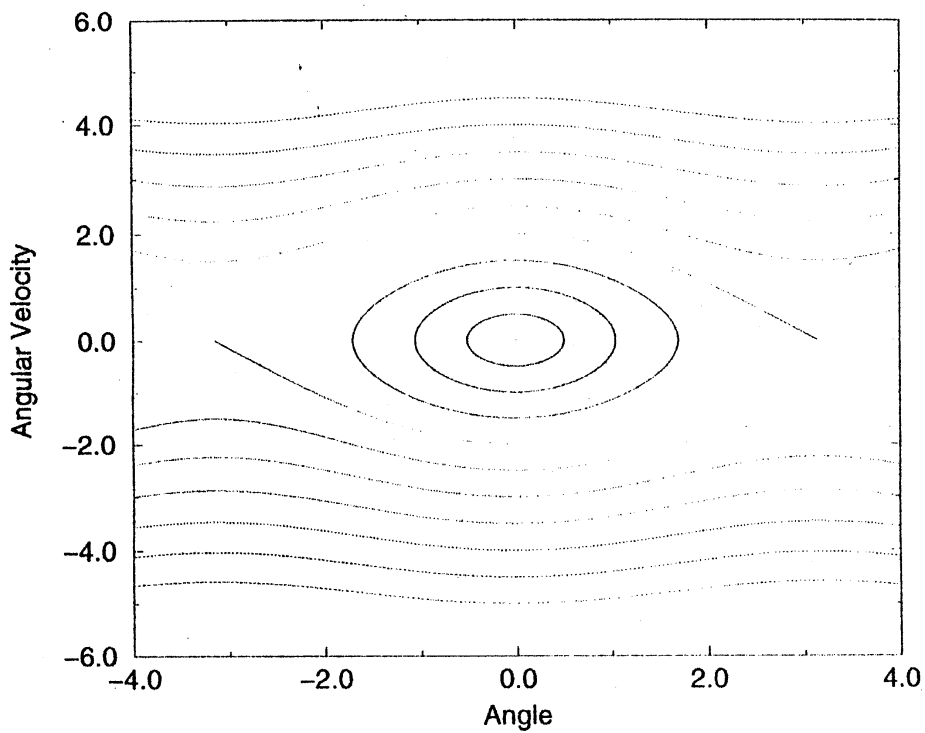


Fig.2 単振り子の広田差分のなす解曲線
($\lambda = 1, \delta = 0.1$)

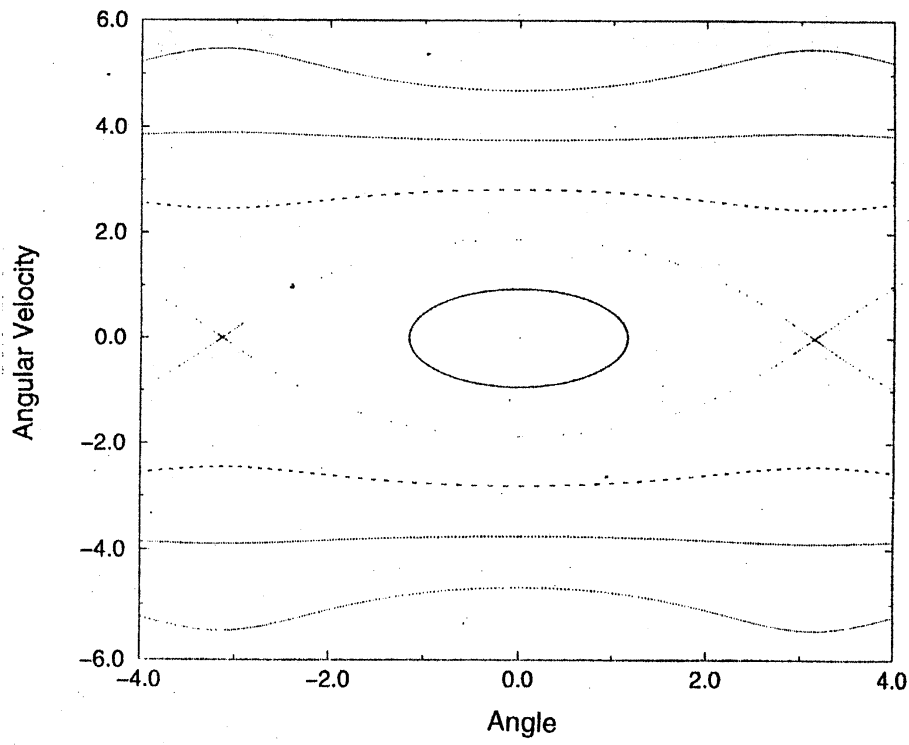


Fig.3 単振り子の広田差分のなす解曲線
($\lambda = 1, \delta = 1$)