数理解析研究所講究録
1098 巻 1999 年 14-22

セルオートマトンと微分方程式

東京大学数理科学研究科　野辺 厚

1 はじめに

空間一次元の最も簡単なセルオートマトンである Elementary Cellular Automata (ECA) は次の関数 $F:\mathbf{Z_2}^3\to\mathbf{Z}_2$ により定義される。

$$\hat{V}=F(\underline{V},V,\overline{V})$$

ここで、$V,\overline{V}$ および $\underline{V}$ はそれぞれ時刻 t、位置 i、$i+1$、i-1 におけるセルの値 (0、1) を、$\hat{V}$ は時刻 t+1、位置 i におけるセルの値を表す。各セルのとり得る値が二値のため、この ECA は全部で $2^{2^3}=256$ 通りである。また、これら全ての ECA に次のようにルール番号 R をつけることが可能である。

$$R=\sum_{\overline{V},V,\underline{V}\in\mathbf{Z}_2}\hat{V}\cdot 2^{2^2\cdot\underline{V}+2^1\cdot V+2^0\cdot\overline{V}}$$

R は $(\underline{V},V,\overline{V},\hat{V})$ により一意に決まるので、それぞれの ECA には 0 から 255 のルール番号が付けられる [1]。

このように ECA は非常に簡単な規則により時間発展するが、その振舞は多様である。しかし、ECA はある初期状態からの長時間挙動により、少数のタイプに分類されることが分かっている [2]。即ち、全ての ECA はいくつかの異なる力学系に属するものたちに分類されるのである。しかし、それぞれの力学系はどのようなものかということはまだよく分かっていない。何故なら、ECA は独立・従属変数が共に離散化された超離散系であるため、連続系への統一的極限操作が確立されておらず、連続系と関連付けて理解することが困難だからである。この連続系との対応という問題は、Wolfram の 9 番目の問題と呼ばれている [3]。

本論においては、これまで主に可積分系に対して用いられてきた超離散極限 [4, 5, 6] を ECA に適用し、離散系 (差分方程式) および連続系 (微分方程式) との対応付けを行なう。そのため、まず Poiseuille 流れを解としてもつ拡散方程式の超離散化としてある CA を導出し、連続系と超離散系で解の振舞に対応関係があることを示す。ここでは、従属変数の非線形変換が重要な役割を果たす。また、超離散化の逆の手順を踏むことにより、この CA から拡散方程式を導出できることも示す。このようにして得られた CA は、ルール 178 の ECA のセルのとり得る値を $\mathbf{Z}$ に拡張した CA である。このことから、超離散拡散方程式と同様な超離散方程式を用いて他の全ての ECA を表すことができ、それらに対しても同様に超離散極限を用いて差分および微分方程式との対応付けを行なうことが可能であることを示す。特に差分方程式においては、複雑な自己相似構造をもつ ECA でも解の特徴を保持していることが分かる。さらに、得られた微分方程式は、元の ECA の分類に対応しいくつかのタイプに限られることを示す。

2 Poiseuille流れの超離散化

平行平板に挟まれた一方向流れの支配方程式は、二次元 Navier-Stokes 方程式および連続の式である。流速ベクトルを $\mathbf{u}(x,y,t)=(u(x,y,t),0)$ として、これらの方程式を成分で書くと次のようになる。ここでは流れの方向を x 方向とし、x 軸は両壁から等距離にあるとする。

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t}+u(x,y,t)\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial x} &= -\frac{\partial p(x,y,t)}{\partial x}+\nu(\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2}) &(1)\\ 0 &= -\frac{\partial p(x,y,t)}{\partial y} &(2)\\ \frac{\partial u(x,y,t)}{\partial x} &= 0 &(3)\end{aligned}$$

(1)-(3) 式を組合わせると、次の方程式が導かれる。

$$\frac{\partial u(y,t)}{\partial t}+\frac{\partial p(x,t)}{\partial x}-\nu\frac{\partial^2 u(y,t)}{\partial y^2}=0$$

この式より圧力勾配 $\partial p(x,t)/\partial x$ は t のみに依存することが分かるが、ここでは圧力勾配は一定であるとして $\partial p/\partial x=-\gamma\ (\gamma>0)$ とおくことにすると拡散方程式に同値な次の方程式が得られる。

$$\frac{\partial u(y,t)}{\partial t}-\gamma-\nu\frac{\partial^2 u(y,t)}{\partial y^2}=0 \tag{4}$$

定常状態を考えると、境界条件および圧力勾配の違いにより次の二つの解を持つ。

Poiseuille flow $(\gamma>0, U_1=U_2=0)$

$$u=U_0\{1-(\frac{y}{d})^2\},\quad U_0=\frac{\alpha d^2}{2\nu}$$

Couette flow $(\gamma=0, U_1=0, U_2>0)$

$$u=\frac{1}{2}U_2(1+\frac{y}{d})$$

ただし、U_1, U_2 は両側の壁の速度、2 d は両壁面間の距離である。Poiseuille 流れは両端で 0、中心で最大流速をとる放物線状の定常な流速分布をもつ。また、Couette 流れは片端で 0 となる直線状の定常な流速分布をもつ。

次に、(4) 式の離散化を考える。ここでは従属変数の非線形変換が重要な役割を果たす。まず、従属変数 $u(y,t)$ を $\log v(y,t)+\gamma t$ と非線形変換し、$y\to\sqrt{2}y$ とすると次の非線形方程式

$$\frac{\partial v(y,t)}{\partial t}-2\nu\{\frac{\partial^2 v(y,t)}{\partial y^2}-\frac{1}{v(y,t)}(\frac{\partial v(y,t)}{\partial y})^2\}=0 \tag{5}$$

が導かれるが、この方程式は次の微分差分方程式の連続極限になっている。

$$\frac{dv_i(t)}{dt}-\nu\{v_{i+1}(t)+v_{i-1}(t)-v_i(t)(\frac{v_i(t)}{v_{i+1}(t)}+\frac{v_i(t)}{v_{i-1}(t)})\}=0 \tag{6}$$

さらに、(6) 式を時間に関して離散化すると次のようになる。ただし、δ_t は時間差分の間隔である。

$$\frac{v_i^{t+1}}{v_i^t}=\frac{1+\delta_t\nu(v_{i+1}^t/v_i^t+v_{i-1}^t/v_i^t)}{1+\delta_t\nu(v_i^t/v_{i+1}^t+v_i^t/v_{i-1}^t)}$$

$v_i^t = \exp(V_i^t/\epsilon)$、$\nu\delta_t = \exp(-\tilde{\nu}/\epsilon)$、とおくと、次の差分方程式が得られる。

$$\exp\left(V_i^{t+1}/\epsilon - V_i^t/\epsilon\right) = \frac{1+\exp\left(V_{i+1}^t/\epsilon - V_i^t/\epsilon - \tilde{\nu}/\epsilon\right)+\exp\left(V_{i-1}^t/\epsilon - V_i^t/\epsilon - \tilde{\nu}/\epsilon\right)}{1+\exp\left(V_i^t/\epsilon - V_{i+1}^t/\epsilon - \tilde{\nu}/\epsilon\right)+\exp\left(V_i^t/\epsilon - V_{i+1}^t/\epsilon - \tilde{\nu}/\epsilon\right)} \tag{7}$$

ここで、超離散極限を次のように定義する。

$$\lim_{\epsilon\to+0} \epsilon \log\left\{\exp(x_1/\epsilon)+\cdots+\exp(x_n/\epsilon)\right\} = \max(x_1,\ldots,x_n), \quad x_i \in \mathbf{R}\ (i=0\cdots n)$$

これは、可積分方程式である KdV 方程式や戸田方程式からソリトン CA を導出するのに用いられ、そのようにして得られたソリトン CA はもとの方程式の特解であるソリトンのみならず無限個の保存量までももつことが分かっている [4, 5, 6]。

(7) 式において、超離散極限をとると、次の超離散方程式が得られる。

$$V_i^{t+1} = V_i^t + \max(0, V_{i+1}^t - V_i^t - \tilde{\nu}, V_{i-1}^t - V_i^t - \tilde{\nu}) - \max(0, V_i^t - V_{i+1}^t - \tilde{\nu}, V_i^t - V_{i-1}^t - \tilde{\nu})$$

記号の簡素化のため、$V \equiv V_i^t$、$\widehat{V} \equiv V_i^{t+1}$、$\overline{V} \equiv V_{i+1}^t$、$\underline{V} \equiv V_{i-1}^t$、$\alpha \equiv \tilde{\nu}$ と書く。

$$\widehat{V} = V + \max(0, \overline{V} - V - \alpha, \underline{V} - V - \alpha) - \max(0, V - \overline{V} - \alpha, V - \underline{V} - \alpha) \tag{8}$$

この (8) 式は拡散方程式の超離散化として得られたので、超離散拡散方程式と呼ぶことにする。ここで、先程の非線形従属変数変換 $u(y,t) = \log v(y,t)$($+\gamma t$ は本質的でないので除く) の意味を考えると、

$$\begin{aligned} u(y,t) &= \log v(y,t) \\ &\to \log v_i^t \\ &= \log\left(\exp\left(\frac{V_i^t}{\epsilon}\right)\right) \\ &= \frac{V_i^t}{\epsilon} \end{aligned}$$

となるので、非線形従属変数変換 $u(y,t) = \log v(y,t)$ により超離散方程式の従属変数 V は元の微分方程式の従属変数 $u(y,t)$ の ϵ 倍程度に収まることが分かる。

超離散拡散方程式 (8) において、$V \in \mathbf{Z}$、$\alpha = 2$ とし、初期条件 $V_0^0 = V_{11}^0 = 0$、$V_i^0 = 10$ $(i = 1,\cdots,10)$、境界条件 $V_0^t = V_{11}^t = 0$ として時間発展を計算すると図 1 のようになる。この境界条件は Poiseuille 流れに対応させている。図中の . は 0 を表す。図 1 より、V の値を流速と見なすと $t = 7$ で山形の流速分布をもつ定常状態になることがわかる。これは Poiseuille 流れと定性的に対応していると考えられる。同様に $V \in \mathbf{Z}$、$\alpha = 1$ とし、初期条件 $V_{11}^0 = 11$、$V_i^0 = 0$ $(i = 0,\cdots,10)$、境界条件 $V_0^t = 0$、$V_{11}^t = 11$ とすると図 2 のようになる。この境界条件は Couette 流れに対応させたものである。図 2 より、$t = 19$ で直線状の流速分布をもつ定常状態になるが、これは Couette 流れと対応する。

このようにして、ある微分方程式の超離散極限としてある超離散方程式が導かれ、これら二つの方程式の解の間に定性的対応関係があることがわかった。

では、逆に超離散方程式から微分方程式を導くことはできないかどうかを考える。差分方程式の連続極限としての微分方程式は極限のとり方を固定する限り一意に決まるので、超離散方程式から差分方程式への変換ができるかどうかが問題である。超離散極限の定義からわかるように、一般に逆は一意に決まらないが、その不定性は $\epsilon \to +0$ で 0 になる項および exp の係数として現れるので、それだけの不定性も含めて次のように逆を定義すればよい。

t=0	.	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	.
t=1	.	2	10	10	10	10	10	10	10	10	2	.
t=2	.	8	4	10	10	10	10	10	10	4	8	.
t=3	.	2	8	6	10	10	10	10	6	8	2	.
t=4	.	6	4	8	8	10	10	8	8	4	6	.
t=5	.	2	6	6	8	10	10	8	6	6	2	.
t=6	.	4	4	6	8	10	10	8	6	4	4	.
t=7	.	2	4	6	8	10	10	8	6	4	2	.
t=8	.	2	4	6	8	10	10	8	6	4	2	.
t=9	.	2	4	6	8	10	10	8	6	4	2	.
t=10	.	2	4	6	8	10	10	8	6	4	2	.

図 1: (超離散拡散方程式 (8):Poiseuille flow)

t=0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	11
t=1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	10	11
t=2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	9	1	11
t=3	.	.	.	.	.	.	.	.	8	1	10	11
t=4	.	.	.	.	.	.	.	7	1	9	2	11
t=5	.	.	.	.	.	.	6	1	8	2	10	11
t=6	.	.	.	.	.	5	1	7	2	9	3	11
t=7	.	.	.	.	4	1	6	2	8	3	10	11
t=8	.	.	.	3	1	5	2	7	3	9	4	11
t=9	.	.	2	1	4	2	6	3	8	4	10	11
t=10	.	1	1	3	2	5	3	7	4	9	5	11
t=11	.	1	2	2	4	3	6	4	8	5	10	11
t=12	.	1	2	3	3	5	4	7	5	9	6	11
t=13	.	1	2	3	4	4	6	5	8	6	10	11
t=14	.	1	2	3	4	5	5	7	6	9	7	11
t=15	.	1	2	3	4	5	6	6	8	7	10	11
t=16	.	1	2	3	4	5	6	7	7	9	8	11
t=17	.	1	2	3	4	5	6	7	8	8	10	11
t=18	.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	9	11
t=19	.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
t=20	.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

図 2: (超離散拡散方程式 (8):Couette flow)

$$\max(x_1,\ldots,x_n) \quad \Rightarrow \quad \epsilon \log\{c_1\exp(x_1/\epsilon)+\cdots+c_n\exp(x_n/\epsilon)\}+\Delta(\epsilon)$$
$$\lim_{\epsilon\to+0}\Delta(\epsilon)=0,\quad c_i\in\mathbf{R}_+\ (i=0\cdots n)$$

この逆超離散極限を用いて得られた差分方程式は係数の不定性をもつが、空間対称性や平衡解の条件により係数の数を減らすことができる。例えば、$U=V/\epsilon$ とおくと、(8) 式から逆超離散極限を用いて得られる差分方程式は次のようになり、

$$\exp(\hat{U}-U)=\frac{c_1+c_2\exp(\overline{U}-U)+c_3\exp(\underline{U}-U)}{c_4+c_5\exp(U-\overline{U})+c_6\exp(U-\underline{U})}$$

空間対称性と $U=0$ が平衡解であることを考慮すると、微分方程式は $O(\delta^2)$ で次のようになる ($U_i^t\to u(x,t)\quad(\delta\to 0)$、$\delta$ は空間差分間隔)。

$$u_t=(1+\frac{c_2+c_3}{c_1+c_2+c_3}-\frac{c_4}{c_1+c_2+c_3})u_{xx}+(-1+\frac{c_2+c_3}{c_1+c_2+c_3}+\frac{c_4}{c_1+c_2+c_3})(u_x)^2$$

これは Burgers 方程式であるが、$(c_2+c_3)/(c_1+c_2+c_3)=c_4/(c_1+c_2+c_3)=1/2$ とすれば拡散方程式に帰着する。

3 ECAとしての超離散方程式と対応する差分および微分方程式

超離散拡散方程式 (8) 式 ($\alpha=0$ とする) において $V\in\mathbf{Z}_2=\{0,1\}$ とすると $(\underline{V},V,\overline{V},\hat{V})$ の組合せは次のようになるので、

$$\frac{\underline{V}V\overline{V}}{\hat{V}}=\quad\frac{111}{1}\ \ \frac{110}{0}\ \ \frac{101}{1}\ \ \frac{100}{1}\ \ \frac{011}{0}\ \ \frac{010}{0}\ \ \frac{001}{1}\ \ \frac{000}{0}$$

これからルール番号 R を計算すると $R=178$ となることが分かる。この $R=178$ の ECA の時間発展の様子は図3のようになる。ただし、初期条件は $V_0^0=1$、$V_i^0=0\ (i=\cdots,-2,-1,1,2,\cdots)$ とした (この初期条件を single seed と呼ぶ)。図より、$t=0$ では一つだけだった1が時間が進むにつれ左右に広

t=0	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.
t=1	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.
t=2	.	.	.	.	1	.	1	.	1	.	.	.	.
t=3	.	.	.	1	.	1	.	1	.	1	.	.	.
t=4	.	.	1	.	1	.	1	.	1	.	1	.	.
t=5	.	1	.	1	.	1	.	1	.	1	.	1	.
t=6	1	.	1	.	1	.	1	.	1	.	1	.	1
t=7	.	1	.	1	.	1	.	1	.	1	.	1	.
t=8	1	.	1	.	1	.	1	.	1	.	1	.	1

図 3: ($R=178$)

がっていくことが分かる。これは拡散的性質であると考えられる。

超離散拡散方程式 (8) は非常に簡単な構造をしているので、ある ECA となる同様な超離散方程式を構成することは容易である。例えば (8) 式から $+\max(\cdots)$ を除いたものは次のようになり、

$$\widehat{V} = V - \max(0, V - \overline{V}, V - \underline{V}) \tag{9}$$

これは $R = 128$ となることが分かる。超離散拡散方程式の場合と同様に逆超離散極限を用いて差分・微分方程式をそれぞれ求めると次のようになる。

$$\exp(\widehat{U} - U) = \frac{c_1}{c_2 + c_3 \exp(U - \overline{U}) + c_4 \exp(U - \underline{U})} \tag{10}$$

$$u_t = \frac{c_2}{c_1 + 2c_2}\{u_{xx} - (u_x)^2\} \tag{11}$$

これは係数によらず Burgers 方程式である。Burgers 方程式はキンク解を特解としてもつが、$R = 128$ の ECA に階段状の初期条件 $V_i^0 = 1\ (i \leq 0)$、$V_i^0 = 0\ (i > 0)$ を課したものの時間発展も図 4 のようにキンク状の解をもつ。また、(8) 式から $-\max(\cdots)$ を除いたものは $R = 254$ であるが、ECA としての

t=0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.
t=1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.
t=2	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.
t=3	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.
t=4	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.
t=5	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
t=6	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
t=7	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
t=8	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

図 4: ($R = 128$)

振舞いは $R = 128$ の 0 と 1 を取り換えたものになり、同様に得られる微分方程式は逆符号の Burgers 方程式である。これら $R = 178$、$R = 128$、$R = 254$ は Wolfram の分類 [2] によるとタイプ 1,2 に分類され、自己相似構造をもたないことが特徴である。

さて、少々天下り的ではあるが、次のような超離散方程式を考えると自己相似構造をもつ ECA(タイプ 3) も表すことが可能である。

$$\widehat{V} = V + \max(0, \overline{V} - V, \underline{V} - V, V - \overline{V} - \underline{V}) - \max(0, V - \overline{V}, V - \underline{V}) \tag{12}$$

これは超離散拡散方程式の $+\max(\cdots)$ の中に $V - \overline{V} - \underline{V}$ という項を加えたものであり、$R = 182$ となる。先程と同様に差分・微分方程式は次のようになる。

$$\exp(\widehat{U} - U) = \frac{c_1 + c_2 \exp(\overline{U} - U) + c_3 \exp(\underline{U} - U) + c_4 \delta^2 (\exp(U - \overline{U} - \underline{U}) - 1)}{c_5 + c_6 \exp(U - \overline{U}) + c_7 \exp(U - \underline{U})} \tag{13}$$

$$u_t = \left(\frac{c_2 + c_3}{c_1 + c_2 + c_3} + \frac{c_1 - c_5}{2(c_1 + c_2 + c_3)}\right) u_{xx} + \frac{(c_1 - c_5) c_4}{2(c_1 + c_2 + c_3)} (\exp(-u) - 1) \tag{14}$$

(13) 式の右辺の分子の第 4 項の δ^2 は $U \to U - 2\log\delta$ と変数変換することにより現れる。$R = 182$ の single seed 初期条件における時間発展は図 5 のように自己相似構造をもつ。逆超離散極限で得られる

```
t=0     ...................1...................
t=1     ..................111..................
t=2     .................1.1.1.................
t=3     ................1111111................
t=4     ...............1.11111.1...............
t=5     ..............111.111.111..............
t=6     .............1.1.1.1.1.1.1.............
t=7     ............111111111111111............
t=8     ...........1.1111111111111.1...........
t=9     ..........111.11111111111.111..........
t=10    .........1.1.1.111111111.1.1.1.........
t=11    ........1111111.1111111.1111111........
t=12    .......1.11111.1.11111.1.11111.1.......
t=13    ......111.111.111.111.111.111.111......
t=14    .....1.1.1.1.1.1.1.1.1.1.1.1.1.1.1.....
t=15    ....1111111111111111111111111111111....
t=16    ...1.11111111111111111111111111111.1...
t=17    ..111.111111111111111111111111111.111..
t=18    .1.1.1.1111111111111111111111111.1.1.1.
t=19    1111111.11111111111111111111111.1111111
t=20    .11111.1.111111111111111111111.1.11111.
```

図 5: ($R = 182$)

微分方程式において先程までの自己相似構造をもたないものとの違いは反応項 $\exp(-u)-1$ であり、この項の存在が自己相似構造の出現に関係していると考えられる。ところが、この反応項は $u(x,t)$ の正の値に対し、他の項に比べ非常に急速に小さくなるので、微分方程式 (14) において自己相似構造をとらえることはできない。しかし、差分方程式 (13) が t が小さいところで自己相似的構造をもつことは簡単な思考実験により確認することができる。例えば、$t=0$ から $t=1$ への時間発展を考えて、$U=100$、その他は 0 とする。これは $\epsilon=0.01$ としたことに相当する。また、$\delta=0.1$、$c_1,\cdots,c_7=1$ としておく。このとき、(13) 式により $\widehat{U}$、$\widehat{\overline{U}}$、$\widehat{\underline{U}}$ を求めると、$\widehat{U}\sim 97$、$\widehat{\overline{U}}=\widehat{\underline{U}}\sim 99$ となる。即ち、

$$\underline{U},U,\overline{U}=0,100,0\longrightarrow\widehat{\underline{U}},\widehat{U},\widehat{\overline{U}}\sim 99,95,99$$

同様に、$t=1$ から $t=2$ への時間発展を考えると、

$$\widehat{\underline{U}},\widehat{U},\widehat{\overline{U}}\sim 99,95,99\longrightarrow\widehat{\widehat{\underline{U}}},\widehat{\widehat{U}},\widehat{\widehat{\overline{U}}}\sim 0,98,0$$

これらは図5のECAの振舞いに対応している。このように逆超離散極限により自己相似構造はある程度保たれるのである。

上のようにWolframのECAの分類に出てくる全てのタイプ 1,2,3 の具体例を構成することができた。 タイプの分類はそれぞれのECAの長時間挙動をもとになされているので、それらの力学系としての性質を反映していると考えられる。従って、これまでの三つの具体例と同様な超離散方程式で全てのECAを表すことができるはずである。そこで、微分方程式がスケール不変であることを考慮して次のスケール不変な (定数項をもたない) 超離散方程式を仮定する。

$$\begin{aligned}\widehat{V}=V\ &+\ \max(b_1,a_1\overline{V}-a_2V,a_3\underline{V}-a_4V,a_5V-a_6\overline{V}-a_7\underline{V})\\ &-\ \max(b_2,a_8V-a_9\overline{V},a_{10}V-a_{11}\underline{V},a_{12}V-a_{13}\overline{V}-a_{14}\underline{V})\end{aligned}\tag{15}$$

この超離散方程式において、係数 a_i、b_i の $a_i\in\{e,0,\pm1,\pm2\}$ $(i=1\cdots14)$、$b_i\in\{e,0\}$ $(i=1,2)$ の範囲での全ての組合せを考え、$(\underline{V},V,\overline{V})$ から $\widehat{V}$ を直接計算することにより、全てのルール番号 R に対する超離散方程式がそれぞれ構成できることが確認される。 ただし、e は $\max(\cdots)$ の単位元である。係数を変化させることにより得られる超離散方程式は一意とは限らないが、(1) 空間対称なECAに対しては空間対称な超離散方程式を選ぶ、(2) 不定性を少なくするためなるべく項数の少ないものを選ぶ 、という条件のもとで適当な超離散方程式を決める。

超離散方程式 (15) により全てのECAが表されるということは、全てのECAに対し、逆超離散極限を用いて差分・微分方程式が得られるということを意味する。これは、初めに述べたWolframの9番目の問題に対する一つの答えを示したことになる。しかし、ECAの構造を保つといえるのは差分方程式までであり、自己相似構造などの離散性が強く影響する構造は微分方程式までは保ち得ないと考えられる。

超離散方程式 (15) の形とこれまでの具体例とを考慮すると、少なくとも空間対称かつ 0 を平衡解にもつようなECAから逆超離散極限で得られる微分方程式はBurgers方程式、拡散方程式またはそれらに非線形の反応項の加わった形に限られることが分かる。空間対称性を破ることにより得られるのは方向性をもった一階微分の項 (u_x) などなので、全てのECAから逆超離散極限により得られる微分方程式のタイプはいくつかに限られることが分かる。

4 まとめ

拡散方程式を非線形従属変数変換により非線形偏微分方程式に変換し、差分方程式を求め、その超離散極限をとることにより超離散拡散方程式 (8) を導出した。この超離散拡散方程式は、拡散方程式

の特解である Poiseuille 流、Couette 流のように振舞う解をもつことが分かった。これにより、これまで可積分系に対して主に用いられてきた超離散極限が必ずしも可積分でない系に対しても適用可能であることが示された。また、ここで得られた超離散拡散方程式は $R = 178$ の ECA の拡張であることから、同様の超離散方程式 (15) を仮定し、係数をある範囲で変化させることにより他の全ての ECA を表す超離散方程式を構成することができた。さらに、これらの超離散方程式に対して逆超離散極限をとることにより、一意的にではないが非常に素直に差分・微分方程式を得ることができることを示した。ただし、ECA の自己相似構造をある程度保存しているのは差分方程式までであることが分かった。よって、Wolfram の 9 番目の問題に対しては、『自己相似構造をもたない ECA は連続系との対応付けが可能であるが、自己相似構造自体が離散系特有の構造のため、そのような ECA に対応する構造をもつ連続系を見つけることは困難である』と言える。

本論においては、超離散方程式と差分・微分方程式との対応のみを考えていたので、今後の課題としては、超離散方程式の解と微分方程式の解との対応関係を明らかにすることが挙げられる。また、超離散方程式を 2 次元化することは比較的容易なので、2 次元の問題への適用も考えていきたい。

参考文献

[1] S.Wolfram, "*Statistical mechanics of cellular automata*", Riviews of Modern Physics Vol.**55** No.3 (1983) 601-644

[2] S.Wolfram, "*Universality and Complexity in cellular automata*", Physica **10D** (1984) 1-35

[3] S.Wolfram, "*Twenty Problems in the Theory of Cellular Automata*", Physica Scripta. Vol.**T9** (1985) 170-183

[4] T.Tokihiro,D.Takahashi,J.Matsukidaira,and J.Satsuma, "*From Soliton Equations to Integrable Cellular Automata through a Limiting Procedure*", Physical Review Letters Vol.**76** No.18 (1996) 3247-3250

[5] M.Torii,D.Takahashi,J.Satsuma, "*Combinatorial representation of invariants of a soliton cellular automaton*", Physica **92D** (1996) 209-220

[6] J.Matsukidaira,J.Satsuma,D.Takahashi,T.Tokihiro,and M.Torii, "*Toda-type cellular automaton and its N-soliton solution*", Physics Letters A **225** (1997) 287-295