数理解析研究所講究録
1100巻 1999年 131-138



# Recent Progress in Banach Space Theory
## — W. T. Gowersの業績をめぐって

高 橋 泰 嗣 (岡山県立大学情報工学部)
加 藤 幹 雄 (九州工業大学工学部)

今回Fields賞を受賞したW.T.Gowers氏は、バナッハ空間論の諸問題、特に、無条件基底列問題、超平面問題、Schroeder-Bernstein 問題、等質バナッハ空間問題などの有名な問題を解決し、バナッハ空間論の発展に大きく貢献した。本報告では、これらの結果を中心としてバナッハ空間論の発展の歴史を概観し、関連した問題について述べたい。

以下において、空間Xあるいは部分空間Yというとき、それらはすべて無限次元バナッハ空間を表すものとする。また、同型なバナッハ空間は同一視し、XがYを含むとは、XがYと同型な部分空間を含むことを意味する。

1．バナッハ空間の基底の問題

バナッハ空間Xの元の列$\{x_n\}$がXのSchauder基底または単に基底とは、任意の$x \in X$ に対し一意的に数列$\{a_n\}$が定まり$x=\Sigma a_n x_n$ (ノルム収束) となることである。特に、この収束が無条件収束であるならば$\{x_n\}$はXの無条件基底(unconditional basis) という。バナッハ空間の基底については、有名なBanachの問題がある([Ba],1932): 任意の可分なバナッハ空間は基底をもつか？ 1973年、Enflo[E]は基底をもたない可分な回帰的バナッハ空間の存在を示し、この問題を否定的に解決した。(この空間はApproximation Property (AP)をもたないことが示されており、Grothendieck予想の反例でもある。)

注. 基底をもつ空間はAPをもつが、その逆は正しくない。Yが基底をもつ空間Xの部分空間で、YがXにおいて補空間をもつならば (このようなYをcomplemented subspace という)、YはBAP(Bounded Approximation Property) をもつ。逆に、BAP をもつ空間Yは基底をもつ空間Xのcomplemented subspace となっている。ただし、BAP ⇒ AP であるが、その逆は成立しないことが知られている。

その後、$c_0$, $\ell_1, \ell_p (1<p<\infty, p\neq 2)$はAPをもたない部分空間を含むことが示された。更に、次の結果が示された(Szankowski[S],1978): Xのすべての部分空間がAPをもつならば

(*) $P(X) = \sup\{p;\ X \in \text{type } p\} = 2,\ q(X) = \inf\{q;\ X \in \text{cotype } q\} = 2$

が成立する。周知のように、Xがヒルベルト空間と同型なるための必要十分条件は、Xがtype 2かつcotype 2なることである。このことから、Xの任意の部分空間がAP (あるいは基底) をもつならば、Xはヒルベルト空間か？ という問題が生ずることとなる。しかしながら、この問題もJohnson によって否定的に解決された：Xは$\ell_2$ を含まないが、その任意の商空間の部分空間は基底をもつような空間Xがある。 この空間XはTsirelson 空間Tの変形で、convexified Tsirelson 空間とよばれている。Tは$c_0$, $\ell_1$, $\ell_p$ のいずれをも含まないような空間の最初の例であるが、Tは一様凸な空間と同型でない。Xは$c_0$, $\ell_1, \ell_p$ のいずれをも含まない一様凸空間であり、弱ヒルベルト空間の例として知られている。また、弱ヒルベルト空間の任意の商空間の部分空間はAPをもつことも知られている

(cf. Casazza-Shura [CS], 1989)。このことに関連した話題は後で述べる。

ところで、任意のバナッハ空間は基底をもつ部分空間を含むという事実は、古くからMazur によって知られていた(cf. [LT])。この事実から次の問題が生じた(cf. [BP])。

問題1. 任意のバナッハ空間Xは無条件基底をもつ部分空間Yを含むか?

この問題(unconditional basic sequence problem)は次の問題に関係がある(cf. [R])。

問題2. 任意のバナッハ空間Xは $c_0, \ell_1$,回帰的バナッハ空間のいずれかを含むか?

実際、無条件基底をもつバナッハ空間は $c_0, \ell_1$,回帰的バナッハ空間のいずれかを含むことが知られている([J], 1950)。従って、問題1が肯定的ならば問題2も肯定的である。なお、任意のバナッハ空間は $c_0, \ell_p$ $(1 \leqq p < \infty)$ のいずれかを含むか? というBanachの問題は、1974年Tsirelson によって否定的に解決されている。その後、この2つの関連した問題は容易に解決されなかったが、1993年、GowersとMaureyは次のようなバナッハ空間Xを構成し問題1を否定的に解決した。

定理1 [5]. 回帰的バナッハ空間Xで、その任意の部分空間が無条件基底をもたないようなものがある。

この定理が示された後、ここで構成した空間Xは更に強い性質をもつことがJohnson によって指摘された: Xのみならず、その任意の部分空間Yは分解不可能(indecomposable)である。すなわち、Y=V+W (位相的直和) となるようなYの (無限次元) 部分空間V, Wは存在しない。このようなXはH.I.空間(hereditarily indecomposable space) とよばれている。H.I.空間の存在により、Lindenstrauss [LT] の疑問 (任意のバナッハ空間は分解可能か?) は否定的に解決された。明らかに、H.I.空間は無条件基底をもつ部分空間を含まない。GowersにとってH.I.空間の発見は、残された未解決問題の解決に向けての出発点となった。1994年、Gowersは問題2に対する否定的解答をより強い形で与えた。

定理2 [6]. 次の性質をもつ可分なバナッハ空間Xが存在する: Xの任意の部分空間Yは $\ell_1$ と同型でなく、双対空間 $Y^*$ は可分でない。(明らかに、Yは非回帰的である。)

2. 超平面問題とSchroeder-Bernstein 問題

Banachの超平面問題(hyperplane problem)は次のように述べられる。

問題3. 任意のバナッハ空間Xは、その任意の超平面(hyperplane) Yと同型か?

Gowersは、問題3に対する否定的解答をより強い形で与えた。

定理3 [8]. 無条件基底をもつバナッハ空間Xで次の性質をもつものがある: Xの任意の真部分空間YはXと同型でない。特に、Xはその任意の超平面と同型でない。

この定理が示された後、すべてのH.I.空間Xはその任意の真部分空間と同型でないことが示された([5])。(明らかに、Xは無条件基底をもたない。)

次の問題(Schroeder-Bernstein problem) は、問題3と多少関係がある。

問題4. バナッハ空間X, Yは互いに他の部分空間とする。YがXにおいて補空間をもち、かつ、XがYにおいて補空間をもつならば、XとYは同型か?

Gowersは次のようなバナッハ空間Xを構成し、問題4を否定的に解決した。

定理4 [11]. XとX+Xは同型でないが、XとX+X+Xは同型であるようなバナッハ空間Xがある。(Y=X+Xとすると、XとYは問題4の反例である。)

注．周知のように、Ｘの超平面Ｙは余次元（補空間の次元）１の部分空間である。２つの問題に関連して次のような疑問が残る：ＹをＸの超平面とするとき、ＸがＹの超平面と同型ならばＸとＹは同型か？　この疑問についてもGowersとMaurey[13]の否定的解答がある。これによって、問題３，４は同時に解決される。なお、Schroeder-Bernstein 問題に関してはCasazza[C1] の解説があるので参照されたい。

３．等質バナッハ空間問題

バナッハ空間Ｘがそのすべての部分空間と同型であるとき、Ｘは等質的(homogeneous)という。ヒルベルト空間$\ell_2$は明らかに等質的だが、その逆はどうか？　Banachの等質バナッハ空間問題(homogeneuou Banach space problem)は次のように述べられる。

問題5.　Ｘが等質的ならば、Ｘは$\ell_2$と同型か？

この問題についての研究の進展状況は、Casazza[C2] の解説があるので参照されたい。Bourgain[Bo]による有限次元的な結果、Johnson[Jo] による部分的解答はあったにせよ、問題の解決には程遠い状態であった。Ｘが等質的ならば、Mazur の結果から、Ｘのすべての部分空間は基底（特に、AP）をもつことになり、すでに述べたSzankowskiの結果から

(*)　$\sup\{p;\ X \text{ is of type } p\} = 2 = \inf\{q;\ X \text{ is of cotype } q\}$

が成立する。しかしながら、(*) を満たす空間Ｘが弱ヒルベルト空間であることすら言えない。等質的な空間Ｘが、super-reflexive か、あるいはその双対空間$X^*$が等質的か、などの基本的な結果さえも知られていなかった。

1995年、KomorowskiとTomczak-Jaegermann[KT]によって示された次の結果は、Gowersに幸運をもたらした：Ｘが無条件基底をもつ部分空間を含むとする。このとき、Ｘが等質的ならばＸは$\ell_2$と同型である。かくして、最後に残った問題は、等質的な空間は無条件基底をもつ部分空間を含むか？　ということになる。

1996年、Gowersは次の定理を証明することにより、問題５を肯定的に解決した.

定理5 [12]. ＸがH.I.空間を含まないならば、Ｘは無条件基底をもつ部分空間を含む。

すでに述べたように、H.I.空間はその任意の真部分空間と同型でないから、Ｘが等質的ならば、それはH.I.空間を含まない。よって、定理５から次の結果を得る。

定理6 [12]. Ｘが等質的ならば、Ｘは$\ell_2$と同型である。

注．等質的な空間は可分である。定理６のnon-separable version として、次の結果が証明できる。

定理7.　Ｘの任意の可分な部分空間Ｙ，Ｚが同型であれば、Ｘはヒルベルト空間と同型である。

注．Ｘの任意の可分な部分空間が$\ell_2$と同型ならば、Ｘはヒルベルト空間と同型であることが示される。

４．関連した問題

Ｘは等質的とし、Ｙを任意の部分空間とする。このとき、ＸとＹは同型であるから、そのBanach-Mazur distance $d(X,Y) = \inf\{\|T\|\cdot\|T^{-1}\|;\ T \text{ is isomorphism from } X \text{ onto } Y\} < \infty$ である。等質空間問題が容易に解決できなかった理由として、同型の一様性が示されなかったことがある：Ｘが等質的ならば任意の部分空間ＹはＸとC-isomorphic

か、すなわち、$d(X,Y)\leqq C$ となるか（C はYに無関係な定数である）。このことの直接的な証明はまだなされていないようである(cf. [T])。　ただし、次の結果は知られている：Xが等質的ならば、ある定数Cがあって、Xの任意の部分空間はXとC-isomorphicな部分空間を含む。同様な結果は、より一般のminimal 空間について知られている(cf. [C2])。

ある定数Cがあって、Xの任意の有限次元部分空間 Y, Z (dim Y = dim Z)に対し $d(Y,Z)\leqq C$ が成り立つならば、Xがヒルベルト空間と同型であることは容易に証明される。このとき、Cは次元に無関係な定数である。では、Xの任意の有限次元部分空間Y，Z (dim Y =dim Z) がisometric であるとき、Xはヒルベルト空間であろうか。

定理8.　Xがヒルベルト空間であるための必要十分条件は、任意のn（ある $n\geqq 2$）に対し、Xの任意のn次元部分空間Y，Zがisometric なることである。

注. Xの任意の可分な無限次元部分空間Y，Zがisometric であればXはヒルベルト空間か？　この問題はまだ解決されていないようである。

次に、minimal 空間についての結果を述べる。Xがminimal とは、その任意の部分空間がXと同型な部分空間を含むことである。Xがminimal ならば、それはH.I.空間を含まないから、Gowersのdichotomy theorem （定理５）よりXの部分空間で無条件基底をもつものがある。よって、すでに述べたJames[J]の結果から次の定理を得る。

定理9.　Xはnon-reflexive とする。このとき

$$X : \text{minimal} \Leftrightarrow X \supseteq c_0 \text{ または } X \supseteq \ell_1$$

注. $c_0$, $\ell_1$, $\ell_p (1<p<\infty)$ が minimalであることは知られている。また、minimal 空間を含まないバナッハ空間も知られている。他方、minimal 空間の部分空間がminimal であることはその定義から明らかである。

定理10. Xはminimal とする。このとき次は同値：

(1) X は $\ell_2$ と同型である。

(2) X の任意の部分空間は無条件基底をもつ。

(3) X の任意の部分空間はlocal unconditional structure (l.u.st.) をもつ。

注. (1) minimal の仮定なしに、(2) ⇒ $X \supseteq \ell_2$、しかし、(2) ⇒ (1)　は不明。Xが cotype q ($<\infty$) で無条件基底をもつとき、minimal の仮定なしに(3) ⇒ $X \supseteq \ell_2$ (cf. [KT])。

(2) Xが無条件基底をもつならば、Xはバナッハ束と同型であり、l.u.st. をもつ。$X^{**}$ があるバナッハ束のcomplemented subspace と同型であれば、X は l.u.st.をもつ（逆も真）。

ここで、l.u.st. より弱い概念であるGordon-Lewis(GL-)property を導入する。XがGL-property をもつとは、任意のabsolutely summing operator : $X \to L_2$ がある$L_1$- 空間を通って分解されることである。周知のように、l.u.st. をもつ空間はGL-property をもつが、その逆は成立しない(cf. [GL])。Xが cotype 2 でGL-property をもてば、Xの任意の部分空間がGL-property をもつことは知られている。また、XがGL-property をもてば$X^*$もそれをもつ（逆も真）。Gowers-Maurey[5]は任意の部分空間が無条件基底をもたないような空間の存在を示したが、最近では任意の部分空間がGL-property をもたないよ

うなバナッハ空間の存在も知られている(cf.Habala[H],1998)。

Johnson[Jo2]は等質空間問題を考察する過程で次の結果を示した：Xの任意の部分空間がGL-property をもつならば、Xはweak cotype 2 である。type 2かつcotype 2なる空間はヒルベルト空間と同型になることから、weak type 2 かつ weak cotype 2なる空間は弱ヒルベルト空間とよばれる(cf.Pisier[Pi])。weak type 2 の空間のdualはweak cotype 2 であるが、その逆は無条件では成立しない（空間がB-convexであればよい。）弱ヒルベルト空間は回帰的であり、その任意の部分空間および商空間は弱ヒルベルト空間であることが知られている。Xが弱ヒルベルト空間ならば、$p(X) = q(X) = 2$ となるが、その逆は成立しない。しかしながら、これらの事実からして弱ヒルベルト空間はヒルベルト空間に近い性質をもつように思われる。

定理11. $X^{**}$ の任意の部分空間および商空間がGL-property をもてば、Xは弱ヒルベルト空間である。

注. Xが弱ヒルベルト空間であればその任意の部分空間および商空間はApproximation Property(AP)をもつことが知られている。しかしながら、それらがGL-property をもつか否かは不明である。無条件基底をもたない弱ヒルベルト空間の存在はKomorowskiによって示された。

定理12. Xはminimal とする。このとき次は同値：

(1) Xは$\ell_2$ と同型である。

(2) $X^{**}$ の任意の部分空間および商空間はGL-property をもつ。

(3) Xの任意の部分空間の商空間はGL-property をもつ。

注. (1) $\ell_p(p<2)$はminimal であり、その任意の部分空間はGL-property をもつ。しかし、その商空間でGL-property をもたないものがある。

(2) $c_0$, $\ell_p(2<p<\infty)$ はminimal であり、その任意の商空間はGL-property をもつ。しかし、その部分空間でGL-property をもたないものがある。

(3) Johnson はminimal な弱ヒルベルト空間は$\ell_2$ と同型であることを示した。この結果と定理11より、(1)と(2) は同値となる。

今までその存在すら知られなかったH.I.空間であるが、最近では一様凸なH.I.空間などの例もある(cf.[F1])。また、H.I.空間を用いて任意の部分空間がGL-property をもたないような空間の例も示されている(cf.[H])。更に、任意のバナッハ空間は$\ell_1$ またはH.I.空間の商空間を部分空間として含むというArgyros-Ferouzisの結果もある(cf.[T])。無条件基底列問題や等質空間問題の解決に、H.I.空間の存在は大きな役割を果たした。多くの場合、ある問題（あるいは予想）の否定的な解答は、それまでに知られなかった新たな空間の存在によってなされる。その結果、問題（あるいは予想）は条件を付加して生き続け、他方、新たに発見された空間は、その後のバナッハ空間論の研究に大きな影響を及ぼすことが多い。Tsirelson 空間Tは、$c_0$, $\ell_1$, $\ell_p$ のいずれをも含まない空間の最初の例であるが、その後20年以上経て現在でもこの空間に関連した研究がなされている。今後、H.I.空間に関連した研究が進展することにより、バナッハ空間の構造が更に解明されることが期待される。

## References

W. T. Gowers氏の論文


[1] Symmetric block bases in finite-dimensional normed spaces, Israel J. Math. 68 (1989), 193-219.

[2] Symmetric block bases of sequences with large average growth, Israel J. Math. 69 (1990), 129-151.

[3] Symmetric sequences in finite-dimensional normed spaces, in Geometry of Banach spaces, London Math. Soc. Lecture Note Ser. 158, Cambridge Univ. Press, 1990, pp.121-132.

[4] Lipschitz functions on classical spaces, European J. Combin. 13 (1992), 141-151.

[5] (with B.Maurey) The unconditional basic sequence problem, J. Amer. Math. Soc. 6 (1993), 851-874.

[6] Banach spaces not containing $c_0$, $\ell_1$ or a reflexive subspace, Trans. Amer. Math. Soc. 344 (1994), 407-420.

[7] A finite-dimensional normed space with two non-equivalent symmetric bases, Israel J. Math. 87 (1994), 143-151.

[8] A solution to Banach's hyperplane problem, Bull. London Math. Soc. 26 (1994), 523-530.

[9] A hereditarily indecomposable space with an asymptotic unconditional bases, in Geometric Aspects of Functional Analysis, Oper. Theory Adv. Appl. 77, 1995, pp.112-120.

[10] Recent results in the theory of infinite-dimensional Banach spaces, Proc. ICM Zürich 1994, Birkhauser, 1995, pp.933-942.

[11] A solution to the Schroeder-Bernstein problem for Banach spaces, Bull. London Math. Soc. 28 (1996), 297-304.

[12] A new dichotomy for Banach spaces, Geom. Funct. Anal. 6 (1996), 1083-1093.

[13] (with B.Maurey) Banach spaces with small spaces of operators, Math. Ann. 307 (1997), 543-568.


参考文献


[Ba] S. Banach, Théorie des opérations linéaires, Warszawa, 1932.

[Bo] J. Bourgain, On finite dimensional homogeneous Banach spaces, Lecture Notes in Math. 1317, 1988, pp.232-239.

[BP] C. Bessaga and A. Pelczyński, A generalization of results of R.C.James concerning absolute bases in Banach spaces, Studia Math. 17 (1958), 165-174.

[C1] P. Casazza, The Schroeder-Bernstein property for Banach spaces, Contemp. Math. 85, AMS, 1989, pp.61-77.

[C2] P. Casazza, Some quetions arising from the homogeneous Banach space problem, Contemp. Math. 144, AMS, 1993, pp.35-52.

[CS] P. Casazza and T. Shura, Tsirelson's spaces, Lecture Notes in Math. 1363, 1989.

[E] P. Enflo, A counterexample to the approximation property in Banach spaces, Acta Math. 130 (1973), 309-317.

[F1] V. Ferenczi, A uniformly convex hereditarily indecomposable Banach spaces, Israel J. Math. 102 (1997), 199-225.

[F2] V. Ferenczi, Operators on subspaces of hereditarily indecomposable Banach spaces, Bull. London Math. Soc. 29 (1997), 338-344.

[GL] Y. Gordon and W. Lewis, Absolutely summing operators and local unconditional structures, Acta Math. 133 (1974), 27-48.

[H] P. Habala, A Banach space all of whose subspaces fail the Gordon-Lewis property, Math. Ann. 310 (1998), 197-219.

[J] R. C. James, Bases and reflexivity of Banach spaces, Ann. of Math. 52 (1950), 518-527.

[Jo1] W. B. Johnson, Banach spaces all of whose subspaces have the approximation property, Proc. GMD, Bonn 1979, North-Holland, Amsterdam 1980, pp.15-26.

[Jo2] W. B. Johnson, Homogeneous Banach spaces, Lecture Notes in Math. 1317, 1988, pp.201-203.

[KT] R. Komorowski and N. Tomczak-Jaegermann, Banach spaces without local unconditional structure, Israel J. Math. 89 (1995), 205-226; Erratum to "Banach spaces without local unconditional structure", Israel J. Math. 105 (1998), 85-92.

[LT] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, Classical Banach spaces I, Springer-Verlag, 1977.

[MT] P. Mankiewicz and N. Tomczak-Jaegermann, Schauder bases in quotients of subspaces of $\ell_2(X)$, Amer. J. Math. 116 (1994), 1341-1363.

[P] A. Pelczynski, Structural theory of Banach spaces and its interplay with analysis and probability, Proc. ICM Warszawa 1982, 1983, pp.237-269.

[Pi] G. Pisier, The volume of convex bodies and Banach spaces, CTM 94, Cambridge Univ. Press, 1989.

[R] H. P. Rosenthal, The unconditional basic sequence problem, Contemp. Math. 52, AMS, 1986, pp.70-88.

[S] A. Szankowski, Subspaces without the approximation property, Israel J. Math. 30 (1978), 123-129.

[TK]高橋泰嗣，加藤幹雄，W. T. Gowers氏の業績Ｉ（フィールズ賞受賞者紹介），
数学 51 (1999), 154-157.

[T] N. Tomczak-Jaegermann, From finite- to infinite-dimensional phenomena in geometric functional analysis on local and asymptotic levels, Proc. ICM Berlin 1998, Doc. Math. J. DMV Extra Volume ICM 1998・II, 1999, pp.731-742.

[Ts] B. S. Tsirelson, Not every Banach space contains $\ell_p$ or $c_0$, Functional Anal. Appl. 8 (1974), 138-141.