数理解析研究所講究録
1100 巻 1999 年 78-86

Mamdani 推論法の最適化問題への応用

信州大学工学部　三石貴志 (Takashi Mitsuishi)
信州大学工学部　河邊　淳 (Jun Kawabe)
信州大学工学部　和崎克己 (Katsumi Wasaki)
信州大学工学部　師玉康成 (Yasunari Shidama)

1　はじめに

1965 年，カリフォルニア大学の Zadeh [8] によりファジィネスの概念がファジィ集合とともに提唱されて以来，ファジィ理論はさまざまな分野で応用されてきた．その主たるものが制御の分野であり，そこではファジィ制御として多くの実用的な研究がなされてきた．ファジィ制御は人間の言語などによるあいまいさを含む表現，例えば「部屋が寒ければ，暖房を強くせよ」などで記述された if-then 形式の制御アルゴリズムをファジィ理論により計算機で実行させるものである．この制御法で用いる推論法はロンドン大学の Mamdani [4] によって提唱され，彼の名を取って Mamdani 推論法と呼ばれている．

本研究では，Mamdani 推論法によるファジィ最適制御問題を，その制御で用いる評価関数をファジィメンバシップ関数から成る集合上の汎関数とみなすことにより，コンパクト集合上の連続関数の最小値 (最大値) 問題に帰着させることにより解決している．

筆者らはこれまでメンバシップ関数を，傾きがある正の定数以下で押さえられている関数のクラスから選びファジィ最適制御の存在についての結論を得た．本研究はその結果の拡張である．メンバシップ関数をより応用範囲の広い L^2 空間から選び，メンバシップ関数集合のコンパクト性とその集合上での Mamdani 推論法の連続性に関して考察し，ファジィ最適制御の存在を証明した．

2　Mamdani 推論法とメンバシップ関数集合

まず初めに Mamdani 推論法について簡単に紹介する [4] [7]．ファジィ制御において，ルール l 個が "or" 結合されている if-then 型ファジィルールが与えられたとする．

$$\text{if } x_1 \text{ is } A_{i1} \text{ and } \ldots \text{ and } x_n \text{ is } A_{in} \text{ then } y \text{ is } B_i \quad (i = 1, \ldots, l)$$

ただし A_{ij}, B_i $(i = 1, \ldots, l; j = 1, \ldots, n)$ はファジィ集合，x_j $(j = 1, \ldots, n)$ は前件部変数，y は後件部変数である．各ファジィ集合 A_{ij}，B_i のメンバシップ関数をそれぞれ $\mu_{A_{ij}} : [a, b] \to [0, 1]$，$\mu_{B_i} : [c, d] \to [0, 1]$ で表す．このとき，値 $\mu_{A_{ij}}(x_j)$，$\mu_{B_i}(y_i)$ はそれぞれ x_j，

y がファジィ集合 A_{ij}, B_i に属する度合 (グレード) を表している. このルールから制御出力を推論するために以下の計算を用いる.

(1) 第 i 番目のルールの前件部の適合度 $\alpha_{\mathcal{A}_i}(x)$ を求める.

$$\alpha_{\mathcal{A}_i}(x) \triangleq \bigwedge_{j=1}^{n} \mu_{A_{ij}}(x_j), \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in [a, b]^n.$$

(2) 第 i 番目のルールの推論結果を求める.

$$\beta_{B_i\mathcal{A}_i}(x, y) \triangleq \alpha_{\mathcal{A}_i}(x) \bigwedge \mu_{B_i}(y), \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in [a, b]^n,\ y \in [c, d].$$

(3) ファジィルール全体における推論結果を求める.

$$\gamma_{\mathcal{AB}}(x, y) \triangleq \bigvee_{i=1}^{l} \beta_{B_i\mathcal{A}_i}(x, y), \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in [a, b]^n,\ y \in [c, d].$$

(4) 推論結果を数値化して制御量を定める (非ファジィ化).

$$\rho_{\mathcal{AB}}(x) \triangleq \frac{\int_c^d y\gamma_{\mathcal{AB}}(x, y)dy}{\int_c^d \gamma_{\mathcal{AB}}(x, y)dy}, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in [a, b]^n.$$

以上の (1)–(4) の推論法が Mamdani 推論法である.

この論文では, 後件部のファジィ集合のメンバシップ関数を閉区間 $[c, d]$ 上の 2 乗可積分関数から成る Hilbert 空間 $L^2[c, d]$ の要素と考え, その全体を $\mathcal{L}$ で表す:

$$\mathcal{L} \triangleq \{\mu \in L^2[c, d] : 0 \leq \mu(y) \leq 1 \text{ a.e. } y \in [c, d]\}.$$

このとき, $\mathcal{L}$ に関して以下の補題が成り立つ.

補題. (a) $\mathcal{L}$ は凸集合.
(b) $\mathcal{L}$ は $L^2[c, d]$ の弱位相に関してコンパクト距離空間.

証明. (a) は自明なので省略する. (b) $\mathcal{L}$ が $L^2[c, d]$ の有界凸集合で, 強位相に関して閉集合であれば弱位相に関してコンパクト距離空間となるので [2] [3], 有界性と強位相に関して閉集合であることを示す. 任意の $\mu \in \mathcal{L}$ に対して

$$\|\mu\|_{L^2} \equiv \left(\int_c^d |\mu(y)|^2 dy\right)^{1/2} \leq \left(\int_c^d 1\, dy\right)^{1/2} = \sqrt{d - c}$$

となるので, $\mathcal{L}$ は有界である. 次に, $\mathcal{L}$ が閉集合であることを示すために関数列 $\{\mu_n\} \subset \mathcal{L}$ が $\mu \in L^2[c, d]$ に強位相に関して収束すると仮定する. このとき, $\{\mu_n\}$ の部分列 $\{\mu_{n_k}\}$ が存在し, μ に概収束する [1]. それゆえ

$$0 \leq \mu(y) \leq 1 \text{ a.e. } y \in [c, d]$$

となるので $\mu \in \mathcal{L}$ である. したがって $\mathcal{L}$ は強位相に関して閉集合である.

3 ファジィ最適制御への応用

この節では，前節の結果を用いファジィ制御における最適制御の存在について述べる．$\mathbb{R}^n$ を n 次元ユークリッド空間とし，ノルムを $\|\cdot\|$ で表す．$f(y,v):\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ を Lipschitz 連続な非線型ベクトル値関数とする．また定数 $M_f>0$ が存在し，任意の $(y,v)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$ に対して

$$\|f(y,v)\|\le M_f\left(\|y\|+|v|+1\right) \tag{1}$$

が成り立つと仮定する．

この論文では，以下の状態方程式によって与えられる非線型フィードバックシステムについて考察する:

$$\dot{x}(t)=f(x(t),u(t)) \tag{2}$$

ここで，$x(t)$ は時刻 t におけるシステムの状態を表し，制御入力 $u(t)$ は $u(t)=\rho(x(t))$ のフィードバック形式で与えるものとする．

システムにおける初期値のとりうる値の集合を十分大きな正数 $r>0$ に対して

$$B_r\triangleq\{x\in\mathbb{R}^n:\|x\|\le r\}$$

とし，十分大きな終端時刻を T とする．

命題 1. $\rho:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ は Lipschitz 連続，$x_0\in B_r$ とする．このとき状態方程式

$$\dot{x}(t)=f(x(t),\rho(x(t))) \tag{3}$$

は初期条件 $x(0)=x_0$ のもとで $[0,T]$ において一意の解 $x(t,x_0,\rho)$ をもち

$$(t,x_0)\in[0,T]\times B_r\mapsto x(t,x_0,\rho)$$

は連続である．さらに任意の $r_2>0$ に対して

$$\Phi\triangleq\left\{\rho:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}:\text{Lipschitz 連続},\ \sup_{u\in\mathbb{R}^n}|\rho(u)|\le r_2\right\} \tag{4}$$

とおくと，状態方程式の解について以下の (a)，(b) が成り立つ．

(a) 任意の $t\in[0,T]$，$x_0\in B_r$ および $\rho\in\Phi$ に対して

$$\|x(t,x_0,\rho)\|\le r_1 \tag{5}$$

である．ただし

$$r_1\equiv e^{M_fT}r+(e^{M_fT}-1)(r_2+1). \tag{6}$$

(b) $\rho_1,\rho_2\in\Phi$ とする．任意の $t\in[0,T]$，$x_0\in B_r$ に対して

$$\|x(t,x_0,\rho_1)-x(t,x_0,\rho_2)\|\le\frac{e^{L_f(1+L_{\rho_1})t}-1}{1+L_{\rho_1}}\sup_{u\in[-r_1,r_1]^n}|\rho_1(u)-\rho_2(u)| \tag{7}$$

である．ただし，L_f，L_{ρ_1} はそれぞれ f，ρ_1 の Lipschitz 定数である．

証明.　$F(t,y)=f(y,\rho(y))$, $|t|\le T$, $y\in\mathbb{R}^n$ とおく. f, ρ はそれぞれ Lipschitz 連続な関数ゆえ

$$\exists L_f>0 \quad \text{s.t.} \quad \|f(y_1,v_1)-f(y_2,v_2)\|\le L_f\left(\|y_1-y_2\|+|v_1-v_2|\right)$$
$$\text{for } \forall(y_1,v_1),\forall(y_2,v_2)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R} \quad .$$
$$\exists L_\rho>0 \quad \text{s.t.} \quad \|\rho(y_1)-\rho(y_2)\|\le L_\rho\|y_1-y_2\| \quad \text{for } \forall y_1,\forall y_2\in\mathbb{R}^n$$

が成り立つ. これより, $\forall|t|\le T$, $\forall y_1,\forall y_2\in\mathbb{R}^n$ に対して

$$\begin{aligned}\|F(t,y_1)-F(t,y_2)\| &= \|f(y_1,\rho(y_1))-f(y_2,\rho(y_2))\|\\ &\le L_f\left(\|y_1-y_2\|+|\rho(y_1)-\rho(y_2)|\right)\\ &\le L_f\left(\|y_1-y_2\|+L_\rho\|y_1-y_2\|\right)\\ &= L_f\left(1+L_\rho\right)\|y_1-y_2\|\end{aligned}$$

となる. したがって, 関数 F は y について Lipschitz 条件を満たすので, [5] により状態方程式の解の一意存在が得られる.

(a) $x(t)=x(t,x_0,\rho)$ とおくと, $x(t)$ は初期条件 $x(0)=x_0$ を満たす $[0,T]$ における (3) の解であるので

$$x(t)=x_0+\int_0^t f(x(s),\rho(x(s)))ds, \quad 0\le\forall t\le T.$$

(1), (4) より

$$\begin{aligned}\|x(t)\| &\le \|x_0\|+\int_0^t\|f(x(s),\rho(x(s)))\|ds\\ &\le r+\int_0^t M_f\left(\|x(s)\|+|\rho(x(s))|+1\right)ds\\ &\le r+\int_0^t M_f\left(\|x(s)\|+r_2+1\right)ds\end{aligned}$$

が得られる. よって

$$\|x(t)\|+r_2+1\le(r+r_2+1)+\int_0^t M_f\left(\|x(s)\|+r_2+1\right)ds \quad \text{for } \forall t\in[0,T]$$

となり, Grownwall の不等式 [5] より

$$\|x(t)\|+r_2+1\le(r+r_2+1)e^{M_fT}$$

となる. ゆえに

$$\|x(t)\|\le re^{M_fT}+(r_2+1)(e^{M_fT}-1)$$

が得られる.

(b) $\rho_1,\rho_2\in\Phi$ とし, フィードバック ρ_1, ρ_2 に対する状態方程式 (3) の解をそれぞれ $x_1(t)=x(t,x_0,\rho_1)$, $x_2(t)=x(t,x_0,\rho_2)$ とすると

$$\|x_1(t)-x_2(t)\|\le\int_0^t\|f(x_1(s),\rho_1(x_1(s)))-f(x_2(s),\rho_2(x_2(s)))\|ds$$

となる．(5) 式より $\|x_2(s)\| \le r_1$ であるから

$$
\begin{aligned}
&\|f(x_1(s),\rho_1(x_1(s))) - f(x_2(s),\rho_2(x_2(s)))\| \\
&\le L_f\,(1+L_{\rho_1})\|x_1(s)-x_2(s)\| + L_f\,|\rho_1(x_2(s)) - \rho_2(x_2(s))| \\
&\le L_f\,(1+L_{\rho_1})\|x_1(s)-x_2(s)\| + L_f \sup_{u\in[-r_1,r_1]^n} |\rho_1(u)-\rho_2(u)|
\end{aligned}
$$

となる．ここで記号を簡単にするために

$$
\alpha = \sup_{u\in[-r_1,r_1]^n} |\rho_1(u)-\rho_2(u)|
$$

とおくと

$$
\|x_1(t)-x_2(t)\| \le \int_0^t L_f(1+L_{\rho_1})\left\{\|x_1(s)-x_2(s)\| + \frac{\alpha}{1+L_{\rho_1}}\right\} ds
$$

となる．両辺に $\alpha/(1+L_{\rho_1})$ を加え，再び Grownwall の不等式 [5] を用いると

$$
\|x_1(t)-x_2(t)\| + \frac{\alpha}{1+L_{\rho_1}} \le \frac{\alpha}{1+L_{\rho_1}} e^{L_f(1+L_{\rho_1})t}
$$

が得られ，(7) 式が示せた．

さて，ファジィ制御におけるフィードバック則 ρ は以下の l 個のファジィ if-then ルールにより構成されているとする:

$$
\text{if } x_1 \text{ is } A_{i1} \text{ and } \ldots \text{ and } x_n \text{ is } A_{in} \text{ then } y \text{ is } B_i \quad (i=1,\ldots,l).
$$

与えられた定数 $\Delta_{ij} > 0$ $(i=1,\ldots,l;\ j=1,\ldots,n)$ および十分大きな定数 $r_2 > 0$ に対して

$$
F_{\Delta_{ij}} \triangleq \{\mu : [-r_1,r_1] \to [0,1] : |\mu(x)-\mu(x')| \le \Delta_{ij}|x-x'| \text{ for } \forall x, \forall x' \in [-r_1,r_1]\} \tag{8}
$$

とおく．ただし r_1 は (6) 式による．また

$$
\mathcal{L} \triangleq \{\mu \in L^2[-r_2,r_2] : 0 \le \mu(y) \le 1 \text{ a.e. } y \in [-r_2,r_2]\} \tag{9}
$$

とおく．

以下では，ファジィ集合 A_{ij} のメンバシップ関数 $\mu_{A_{ij}}$ およびファジィ集合 B_i のメンバシップ関数 μ_{B_i} はそれぞれ $F_{\Delta_{ij}}$ $(i=1,\ldots,l;\ j=1,\ldots,n)$ および $\mathcal{L}$ に属しているとする．このとき，メンバシップ関数全体の集合は以下の直積集合

$$
\mathcal{F} \triangleq \prod_{i=1}^{l}\left\{\prod_{j=1}^{n} F_{\Delta_{ij}}\right\} \times \mathcal{L}^l \tag{10}
$$

で表すことができる．表現を簡単にするために，前件部と後件部のメンバシップ関数の多重対をそれぞれ以下のように表す．

$$
\mathcal{A}_i \triangleq (\mu_{A_{i1}},\ldots,\mu_{A_{in}}) \quad (i=1,\ldots,l), \quad \mathcal{A} \triangleq (\mathcal{A}_1,\ldots,\mathcal{A}_l), \quad \mathcal{B} \triangleq (\mu_{B_1},\ldots,\mu_{B_l}).
$$

ある定数 $\delta > 0$ に対して

$$\mathcal{F}_\delta \triangleq \left\{ (\mathcal{A}, \mathcal{B}) \in \mathcal{F} : \int_{-r_2}^{r_2} \beta_{B_i \mathcal{A}_i}(x, y) dy \geq \delta \text{ for } \forall x \in [-r_1, r_1]^n, \forall i = 1, \ldots, l \right\} \tag{11}$$

とおき，ファジィ規則 $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}_\delta$ に対するフィードバック則

$$\rho_{\mathcal{AB}}(x) = \rho_{\mathcal{AB}}(x_1, \ldots, x_n) : [-r_1, r_1]^n \to \mathbb{R}$$

を以下の計算により構成する [7].

$$\rho_{\mathcal{AB}}(x) \triangleq \frac{\sum_{i=1}^{l} \int_{-r_2}^{r_2} y \beta_{B_i \mathcal{A}_i}(x, y) dy}{\sum_{i=1}^{l} \int_{-r_2}^{r_2} \beta_{B_i \mathcal{A}_i}(x, y) dy} \tag{12}$$

ただし，$x = (x_1, \ldots, x_n) \in [-r_1, r_1]^n$, $y \in [-r_2, r_2]$ に対して

$$\alpha_{\mathcal{A}_i}(x) \triangleq \bigwedge_{j=1}^{n} \mu_{A_{ij}}(x_j) \quad (i = 1, \ldots, l) \tag{13}$$

$$\beta_{B_i \mathcal{A}_i}(x, y) \triangleq \alpha_{\mathcal{A}_i}(x) \mu_{B_i}(y) \quad (i = 1, \ldots, l) \tag{14}$$

である.

注意. (1) $\mathcal{F}_\delta$ の定義の中の条件を次のより弱い (実用的な) 条件

$$\sum_{i=1}^{l} \int_{-r_2}^{r_2} \beta_{B_i \mathcal{A}_i}(x, y) dy \geq \delta \quad \forall x \in [-r_1, r_1]^n$$

に置き換えても，この論文の結果は証明の適当な変更により成り立つ．これについては，紙面をあらためて別の機会に述べることとする.
(2) (12)-(14) 式で構成されたフィードバック則は上で述べた Mamdani の推論法を変更している．(14) 式は演算 $\vee$ のかわりに積を用い，推論結果の計算と非ファジィ化の計算を同時に行う (12) 式を用いた.

命題 2. $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}_\delta$ とする．このとき以下の (a)，(b) が成り立つ.
(a) $\rho_{\mathcal{AB}}$ は $[-r_1, r_1]^n$ 上で Lipschitz 連続.
(b) $\forall x \in [-r_1, r_1]^n$ に対して $|\rho_{\mathcal{AB}}(x)| \leq r_2$.

証明. (a) 各 $i = 1, \ldots, l$ に対して写像 $\alpha_{\mathcal{A}_i}$ は $[-r_1, r_1]^n$ 上で Lipschitz 連続である [6]．ここで

$$g(x) = \sum_{i=1}^{l} \int_{-r_2}^{r_2} y \beta_{B_i \mathcal{A}_i}(x, y) dy$$

$$h(x) = \sum_{i=1}^{l} \int_{-r_2}^{r_2} \beta_{B_i \mathcal{A}_i}(x, y) dy$$

とおくと，任意の $x_1, x_2 \in [-r_1, r_1]^n$ に対して

$$|g(x_1) - g(x_2)| \leq r_2^2 l L \|x_1 - x_2\| \tag{15}$$

$$|h(x_1) - h(x_2)| \leq 2r_2\, lL\|x_1 - x_2\| \tag{16}$$

となる．ただし L は α_{A_i} $(i = 1, \ldots, l)$ の Lipschitz 定数の最大値である．

任意の $x \in [-r_1, r_1]^n$ に対して $h(x) \geq l\delta$，$|g(x)| \leq r_2^2 l$，$|h(x)| \leq 2r_2 l$ であり，また (15)，(16) 式より

$$\begin{aligned}
&|\rho_{\mathcal{AB}}(x_1) - \rho_{\mathcal{AB}}(x_2)| \\
\leq\ & \frac{|g(x_1) - g(x_2)||h(x_2)| + |h(x_1) - h(x_2)||g(x_2)|}{(l\delta)^2} \\
\leq\ & \frac{4{r_2}^3 L}{\delta^2}\|x_1 - x_2\|
\end{aligned}$$

が成り立つ．ゆえに $\rho_{\mathcal{AB}}$ の Lipschitz 連続性が証明された．

(b) 不等式 $g(x) \leq r_2 h(x)$ が成り立つことに注意すると，任意の $x \in [-r_1, r_1]^n$ に対して

$$|\rho_{\mathcal{AB}}(x)| = \left|\frac{g(x)}{h(x)}\right| \leq r_2$$

が得られる．

有界な Lipschitz 連続関数 $\rho : [-r_1, r_1]^n \to \mathbb{R}$ を，Lipschitz 定数および有界性を変えることなく，その定義域を $\mathbb{R}^n$ 全体に拡張することができる．実際，$\tilde{\rho} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を以下のように定義すればよい:

$$\tilde{\rho}(x) = \tilde{\rho}(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} \rho(x_1, \ldots, x_n), & \text{if } x \in [-r_1, r_1]^n \\ \rho(\varepsilon(x_1)r_1, \ldots, \varepsilon(x_n)r_1), & \text{if } x \notin [-r_1, r_1]^n \end{cases}$$

ただし

$$\varepsilon(u) = \begin{cases} 1, & \text{if } u > r_1 \\ -1, & \text{if } u < -r_1 \end{cases}$$

である．

さて，$(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}_\delta$ とすると，命題 2 および上述の事実から $\rho_{\mathcal{AB}}$ の拡張 $\tilde{\rho}_{\mathcal{AB}}$ は $\mathbb{R}^n$ 上で Lipschitz 連続であり，さらに $\rho_{\mathcal{AB}}$ と同じ Lipschitz 定数を持ち

$$\sup_{u \in \mathbb{R}^n} |\tilde{\rho}_{\mathcal{AB}}(u)| \leq r_2$$

を満たす．ゆえに命題 1 から状態方程式 (3) はフィードバック則 $\tilde{\rho}_{\mathcal{AB}}$ に対して初期条件 $x(0) = x_0$ のもとで一意の解 $x(t, x_0, \tilde{\rho}_{\mathcal{AB}})$ を持つことがわかる．一般的に $\rho_{\mathcal{AB}}$ の拡張である $\tilde{\rho}_{\mathcal{AB}}$ は一意には決まらない．しかし解 $x(t, x_0, \tilde{\rho}_{\mathcal{AB}})$ は命題 1 の (7) 式により $\rho_{\mathcal{AB}}$ によって一意的に定まる．そこで以下では $\tilde{\rho}_{\mathcal{AB}}$ を $\rho_{\mathcal{AB}}$ と記述する．

フィードバック則 ρ によるこのシステムの性能を評価関数

$$J = \int_{B_r}\int_0^T w(x(t, \zeta, \rho), \rho(x(t, \zeta, \rho)))dtd\zeta \tag{17}$$

によって評価する．ここで，$w : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は連続な正値関数である．以下の定理は，(17) 式で与えられる評価関数を最小にするファジィ制御規則が存在することを保証している．

定理. 写像

$$(\mathcal{A},\mathcal{B}) \in \mathcal{F}_\delta \mapsto \int_{B_r}\int_0^T w(x(t,\zeta,\rho_{\mathcal{AB}}),\rho_{\mathcal{AB}}(x(t,\zeta,\rho_{\mathcal{AB}})))dtd\zeta$$

は (11) 式によって定義されるコンパクト距離空間 $\mathcal{F}_\delta$ において最小値 (最大値) を持つ.

証明. 分割して証明する.
(i) $\mathcal{F}$ のコンパクト性: Ascoli の定理により，各 $i = 1,\ldots,l$, $j = 1,\ldots,n$ に対して，$F_{\Delta_{ij}}$ は区間 $[-r_1,r_1]$ 上の連続関数空間 $C[-r_1,r_1]$ の部分空間として，一様ノルム $\|\cdot\|_\infty$ でコンパクト集合になる [3]. 一方，命題 1 の (b) により，$\mathcal{L}$ は弱位相に関してコンパクト距離空間である. ゆえに，Tychonoff の定理により

$$\mathcal{F} = \prod_{i=1}^{l}\left\{\prod_{j=1}^{n} F_{\Delta_{ij}}\right\} \times \mathcal{L}^l$$

は直積位相に関してコンパクト距離空間である.
(ii) $\mathcal{F}_\delta$ のコンパクト性: $\{(\mathcal{A}^k,\mathcal{B}^k)\} \subset \mathcal{F}_\delta \to (\mathcal{A},\mathcal{B}) \in \mathcal{F}$ と仮定すると，各 $i = 1,\ldots,l$ に対して，$k \to \infty$ のとき

$$\|\alpha_{\mathcal{A}_i^k} - \alpha_{\mathcal{A}_i}\|_\infty \stackrel{\triangle}{=} \sup_{x\in[-r_1,r_1]^n} |\alpha_{\mathcal{A}_i^k}(x) - \alpha_{\mathcal{A}_i}(x)| \to 0$$

および

$$\mu_{B_i^k} \to \mu_{B_i} \text{ weakly on } L^2[-r_2,r_2]$$

が成り立つ. そこで $x \in [-r_1,r_1]^n$ を固定すれば，各 $i = 1,\ldots,l$ に対して

$$\int_{-r_2}^{r_2} \beta_{B_i\mathcal{A}_i}(x,y)dy = \lim_{k\to\infty}\int_{-r_2}^{r_2} \beta_{B_i^k\mathcal{A}_i^k}(x,y)dy \geq \delta$$

が得られる. よって $\mathcal{F}_\delta$ の定義より $(\mathcal{A},\mathcal{B}) \in \mathcal{F}_\delta$ である. ゆえに $\mathcal{F}_\delta$ は $\mathcal{F}$ の閉部分集合としてコンパクト距離空間である.
(iii) フィードバック関数の定義式 (12) より

$$\begin{aligned}\sup_{x\in[-r_1,r_1]^n} |\rho_{\mathcal{A}^k\mathcal{B}^k}(x) - \rho_{\mathcal{AB}}(x)| \leq \frac{r_2}{l\,\delta^2}\Bigg\{ & 2\sum_{i=1}^{l}\left|\int_{-r_2}^{r_2} y\mu_{B_i^k}(y)dy - \int_{-r_2}^{r_2} y\mu_{B_i}(y)dy\right| \\ & + r_2\sum_{i=1}^{l}\left|\int_{-r_2}^{r_2} \mu_{B_i^k}(y)dy - \int_{-r_2}^{r_2} \mu_{B_i}(y)dy\right|\Bigg\} \\ & + \frac{4r_2^3}{l\,\delta^2}\sum_{i=1}^{l}\|\alpha_{\mathcal{A}_i^k} - \alpha_{\mathcal{A}_i}\|_\infty\end{aligned}$$

が成り立つ. ここで $\mathcal{F}_\delta$ において $(\mathcal{A}^k,\mathcal{B}^k) \to (\mathcal{A},\mathcal{B})$ と仮定し，$(t,\zeta) \in [0,T] \times B_r$ を固定すれば上述の式から

$$\lim_{k\to\infty}\sup_{x\in[-r_1,r_1]^n} |\rho_{\mathcal{A}^k\mathcal{B}^k}(x) - \rho_{\mathcal{AB}}(x)| = 0 \tag{18}$$

が成り立つ. よって命題 1 の (b) により

$$\lim_{k\to\infty} \|x(t,\zeta,\rho_{\mathcal{A}^k\mathcal{B}^k}) - x(t,\zeta,\rho_{\mathcal{AB}})\| = 0 \tag{19}$$

となる. さらに (18), (19) 式および命題 2 の (a) により

$$\lim_{k\to\infty} \rho_{\mathcal{A}^k\mathcal{B}^k}(x(t,\zeta,\rho_{\mathcal{A}^k\mathcal{B}^k})) = \rho_{\mathcal{AB}}(x(t,\zeta,\rho_{\mathcal{AB}})) \tag{20}$$

が成り立つ. ここで, $w : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は正値連続関数であるので, (19), (20) 式と Lebesgue の有界収束定理 [3] により, 写像

$$(\mathcal{A},\mathcal{B}) \in \mathcal{F}_\delta \mapsto \int_{B_r}\int_0^T w(x(t,\zeta,\rho_{\mathcal{AB}}), \rho_{\mathcal{AB}}(x(t,\zeta,\rho_{\mathcal{AB}})))dtd\zeta$$

はコンパクト距離空間 $\mathcal{F}_\delta$ で連続となる. ゆえに最小値 (最大値) が $\mathcal{F}_\delta$ 上に存在する.

4 おわりに

本論文ではメンバシップ関数集合 $\mathcal{L}_\delta$ のコンパクト性および Mamdani 推論法の連続性を調べ, その結果を用いてファジィ最適制御の存在を証明した. これらの結果はファジィ制御規則の逐次近似の収束性の解析に有用な道具を与えるものと考える.

参考文献

[1] 梅垣壽春 他, 測度・積分・確率, 共立出版株式会社, 1987.

[2] 藤田宏 他, 関数解析, 岩波書店, 1991.

[3] コルモゴロフ, フォミーン, 函数解析の基礎, 岩波書店, 1979.

[4] Mamdani, E.H., Application of fuzzy algorithms for control of simple dynamic plant, Proc. IEEE 121, No. 12, 1585-1588, 1974.

[5] Miller, R.K. and Michel, A.N., Ordinary Differential Equations, Academic Press, New York, 1982.

[6] 師玉康成 他, ファジィ集合族のコンパクト性とファジィ最適制御の存在, 日本応用数理学会論文誌, Vol. 6, No. 1 1996.

[7] 菅野道夫, ファジィ制御, 日刊工業新聞社, 1991.

[8] Zadeh, L.A., Fuzzy algorithms, Information and Control 12, 94-102, 1968.