数理解析研究所講究録
1103巻 1999年 157-168

素測地線定理の精密化

慶応大 理工 小山 信也
(Shin-ya Koyama)

第1章 素数定理

本稿の目的は、素測地線定理の誤差項の精密化について、Ψの explicit formula という観点から現状を報告することである。はじめに、explicit formula が誤差項の精密化にどのように関わるものか、古典的な素数定理の場合を例に説明する。以下の記号は、標準的である。

$$\pi(x) = \#\{p : \text{素数} \, | p \leq x\}$$

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & (n = p^e) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\Psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$$

また、リーマン・ゼータ関数 $\zeta(s)$ の非自明零点を $\rho_j = \sigma_j + it_j$ とおく。このとき、Ψの explicit formula は、以下で与えられる。

$$\Psi(x) = x - \sum_{|t_j| < T} \frac{x^{\rho_j}}{\rho_j} + O\left(\frac{x}{T} \log^2 x\right)$$

リーマン予想を仮定すると、右辺第2項の和は $O(x^{\frac{1}{2}+\epsilon})$ となる。ここで、$\zeta(s)$ が位数1であることを用いた。これより、リーマン予想の下での素数定理の精密化

$$\pi(x) = \mathrm{li}(x) + O(x^{\frac{1}{2}+\epsilon})$$

を得る。

第2章 素測地線定理の Ψ

前章で見たような状況が、素測地線定理の場合にはどうなっているかを概観する。以下、M を負定曲率リーマン面、p を素閉測地線とし、前章の記号にならって、

$$\pi_M(x) = \#\{p \mid N(p) = e^{l(p)} \leq x\}$$
$$\Psi(x) = \sum_{\substack{n:\mathrm{geodesic} \\ N(n)\leq x}} \Lambda(n)$$
$$\Lambda(n) = \log N(p) \quad (n = p^e)$$

とおく。セルバーグ・ゼータ関数は

$$Z(s) = \prod_p \prod_{n=0}^{\infty} (1 - N(p)^{-s-n})$$

と定義され、その非自明零点を $\rho_j = \frac{1}{2} + ir_j$ とおく。素数の場合と異なり、素測地線に対する Ψ の explicit formula は、一般に自明でなく、モジュラー面 $M = PSL(2,\mathbf{Z})\backslash H^2$ の場合に Iwaniec により証明された以下の定理が唯一の結果である。

定理 (Iwaniec [I]). $1 \leq T \leq \sqrt{x}(\log x)^{-2}$ のとき

$$\Psi(x) = x + x^{\frac{1}{2}} T \sum_{|r_j|<T} \frac{x^{ir_j}}{\rho_j} + O\left(\frac{x}{T}\log\log x\right)$$

一般の M に対する Ψ の explicit formula が難しい理由は、素測地線の長さの分布の一様性に関する情報が足りないからである。素数の場合と異なり、素測地線の長さは、狭い区間に思いっきり集中しているかも知れない。これは、整数が必ず1の間隔を空けて並んでいる状況と比べると、かなり病的であり、そのために評価が難しくなってしまうのである。上定理において、Iwaniec はこの困難を、以下の定理を証明することによって克服した。

Brun-Titchmarsh 型 素測地線定理.

$x^{\frac{1}{2}}(\log x)^2 < y < x$ に対し、

$$\pi_M(x+y) - \pi_M(x) \ll y$$

証明は、$PSL(2,\mathbf{Z})$ の素双曲共役類を $\mathbf{Q}$ 上の 2 次形式に対応させ、素測地線の長さを 2 次体の基本単数によって表すことにより、ペル方程式の解の個数を評価する問題に帰着させるのである。

以下、Iwaniec による Ψ の explicit formula を用いて、素測地線定理の精密化について述べる。その意味では、以下の解説は $PSL(2,\mathbf{Z})$ に限った話となるが、Ψ の explicit formula を用いなくとも、跡公式の詳細な解析を直接行なうことにより、同様の結論がかなり広い多様体について言える。これについては後述する。

素数の場合と異なるのは、ゼータ関数 $Z(s)$ が位数 2 であることである。このため、仮にリーマン予想を仮定したとしても、explicit formula の右辺第 2 項の和の項数が T^2 のオーダーとなり、自明な評価 $\sum_{|r_j|<T} x^{ir_j} \ll T^2$ により

$$\pi_M(x) = \mathrm{li}(x) + O(x^{\frac{3}{4}+\epsilon})$$

を得る。ここで得た誤差項 $O(x^{\frac{3}{4}+\epsilon})$ を、自明な誤差項と呼ぶ。自明とは、和 $\sum_{|r_j|<T} x^{ir_j}$ のキャンセレーションを全く考えずに、各項に絶対値をつけて項数で評価しているという意味である。実際には、この和は単位円周上の複素数に渡っており、相当大きなキャンセルが起きていると考えられる。予想としては、このキャンセルは十分大きくて、和 $\sum_{|r_j|<T} x^{ir_j}$ はほとんど有界になると考えられている。もしそれが証明できれば、素測地線定理の究極の精密化

$$\pi_M(x) = \mathrm{li}(x) + O(x^{\frac{1}{2}+\epsilon})$$

を得る。以上みたように、和 $\sum_{|r_j|<T} x^{ir_j}$ の非自明な評価が、素測地線定理の精密化を可能にするのである。

モジュラー面以外の面（面積有限の orbifold）の場合、Ψ の explicit formula は証明されていないが、跡公式を直接詳細に見ることで、和 $\sum_{|r_j|<T} x^{ir_j}$ の非自明な評価から素測地線定理の精密化が得られるという仕組みは同様に成立している。その計算は非常に複雑であり、Hejhal [H1] に完全な証明がある。Ψ の explicit formula は、説明を大幅に簡略化する役割を果たしているが、それによって誤差項の評価が良くなるわけではない。

第3章 合同部分群の場合の証明

これまでに得られている精密化は、いずれも、合同部分群に対してであった。それらは、以下の定理で与えられる。

<u>定理1 (**Luo-Sarnak [LS]**)</u>. $M = PSL(2,\mathbf{Z})\backslash H^2$ に対し

$$\pi_M(x) = \mathrm{li}(x) + O(x^{\frac{7}{10}+\epsilon})$$

<u>定理2 (**Luo-Rudnick-Sarnak [LRS]**)</u>.

$M =$ (合同部分群)$\backslash H^2$ に対し

$$\pi_M(x) = \mathrm{li}(x) + O(x^{\frac{7}{10}+\epsilon})$$

本章では、これらの定理の証明の方針を概観する。

証明の方針は定理1、2に関して同様である。定理1と2の違いは、例外固有値の評価の部分のみであり、リーマン予想を満たすような零点たちに対する、前章で見た和 $\sum_{|r_j|<T} x^{ir_j}$ の扱いについては、定理1、2共に同様の方法を用いて証明される。

証明は、Kuznetsov formula を用いる。それは、2つのポアンカレ級数の内積を2通りに表示して等号でつないだものであり、以下のような形をしている。

Kuznetsov Formula [Ku]

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j(m)\overline{a_j(n)}h(r_j) + (\text{conti spect})$$
$$= (\delta_{n,m}\text{-type}) + \sum_{c=1}^{\infty} \frac{S(n,m:c)}{c}\hat{h}\left(\frac{\sqrt{nm}}{c}\right)$$

ここで、左辺は spectral side であり、$a_j(n)$ は j-番目の Maass form の n-番目の Fourier 係数である。連続スペクトルの貢献は今の目的に与える影響が小さいので、詳細を省略している。$h(r_j)$ は test function である。右辺は arithmetic side と呼ばれ、

$$S(n,m:c) = \sum_{\substack{(c,d)=1 \\ 1\leq d\leq |c|}} e\left(\frac{nd+md^{-1}}{c}\right)$$

はクルースターマン和である。また、$\hat{h}$ は h の、ベッセル関数を用いた積分変換である。

証明のアイディアとしては、まず $n=m$ とし、非常に大雑把に言って、

$$h(r_j) = \begin{cases} x^{ir_j} & |r_j| < T \\ 0 & |r_j| > T \end{cases}$$

という test function を考える。(厳密には、この関数を smoothing したものを考える。次ページの脚注1を参照。) そして、$n < N$ に関して Kuznetsov Formula の両辺の和を取るのである。すると、

左辺第一項は

$$
\begin{aligned}
&\sum_{|r_j|<T} x^{ir_j} \sum_{n<N} |a_j(n)|^2 \\
&\qquad = \sum_{|r_j|<T} x^{ir_j} \int_{(2)} L(s, \phi_j \otimes \phi_j) \frac{N^s}{s} ds \\
&\qquad = N \sum_{|r_j|<T} x^{ir_j} + \sum_{|r_j|<T} x^{ir_j} \int_{(\frac{1}{2})} L(s, \phi_j \otimes \phi_j) \frac{N^s}{s} ds \qquad (*)
\end{aligned}
$$

となる[1]。ここで、ϕ_j は j-番目の Maass form であり、

$$L(s, \phi_j \otimes \phi_j) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_j(n)|^2}{n^s}$$

であるが、厳密には、$a_j(n)$ を正規化する必要があるので、実際の証明はこれほど単純ではなく、フーリエ係数の正規化に関する Hoffstein-Lockhart の評価 [HL] を用いる必要がある。いずれにしても、以上の手順により得た式 (*) のうち、第一項が求めるものであり、第二項が保型L関数のリンデレーフ予想の λ-aspect に帰着する形になっている。しかもこの場合、個々のL関数に関する評価は必ずしも必要なく、$|r_j| < T$ の範囲のL関数が平均的に評価されれば良い。すなわち、平均リンデレーフ (mean Lindelof) 予想が証明できれば良い。これを証明したことが、定理1の証明のポイントであり、それは量子エルゴード性を平均的に証明したことに依っている。その部分については、昨年の代数学シンポジウムなどで講演し、報告集も出ているので、そちらを参照されたい。[K2][K3][S2]

[1]講演中、藤井氏（立教大）より、上記の積分は収束性に問題があるとの御指摘を受けた。上記の説明は証明のアイディアを大まかに示したものであり、より正確には test function をスムースな関数に選び、それを用いて部分積分を繰り返すことで、絶対収束する形に変形できる。この手順は、例えば [I] p.153 などに詳しい。

一方、上記の全体を Kuznetsov Formula の右辺により評価することができる。その過程で、Kloosterman 和に関する Weil の非自明な評価を用いる。これにより、求めたい量が、非自明に評価された項たちの和として表されたことになり、評価の改善を得る。

第 4 章 コンパクト面への拡張

前章の証明では Kuznetsov formula を用いたが、これまで、それ以外の方法による証明は全く知られていない。定理 1 、2 をどこまで一般化できるかという問題を考えると、必然的に、Kuznetsov formula がどこまで一般化できるかという問題に直面する。しかし、Kuznetsov formula はポアンカレ級数の内積を表したものであり、ポアンカレ級数は、各カスプに付随するものである。したがって、多様体がカスプを持たない場合、すなわち、コンパクト多様体に関しては、前章までの証明は全く適用できないことになる。この問題は、[LS] の中でもその困難さが指摘されており、コンパクト面への一般化は全く手がかりがないと書かれている。本章では、彼らの結果の数論的コンパクト面への一般化について述べる。

まず、数論的コンパクト面を、四元数環を用いて構成する。a, b を、平方因子を持たない、互いに素な整数とする。$a > 0$ とする。四元数環

$$D = \left(\frac{a, b}{\mathbf{Q}}\right) = \langle 1, \omega, \Omega, \omega\Omega \rangle_{\mathbf{Q}}$$

とは、$\omega^2 = a$、 $\Omega^2 = b$、 $\omega\Omega + \Omega\omega = 0$ によって

$$x = x_0 + x_1\omega + x_2\Omega + x_3\omega\Omega \quad (x_j \in \mathbf{Q})$$

と表される元の全体からなるものである。以下、D が division algebra に同型であるような a, b を一組固定する。

写像 $\theta : D \to M_2(\mathbf{Q}(\sqrt{a}))$ を

$$\theta : x \mapsto \begin{pmatrix} \xi & \eta \\ b\overline{\eta} & \overline{\xi} \end{pmatrix}$$

で定義する。ただし、$\xi = x_0 + x_1\omega, \eta = x_2 + x_3\omega$ とおいた。D のオーダー $R \subset D$ に対し、

$$R(1) = \{x \in R | x_0^2 - ax_1^2 - bx_2^2 + abx_3^2 = 1\}$$

とおき、

$$\Gamma_R = \theta(R(1)) \subset PSL(2, \mathbf{R})$$

と定義すると、$M = \Gamma_R \backslash \mathbf{H}$ はコンパクト面[2]となる。

こうして構成されたコンパクト面は、(非コンパクトである) 合同面と、ラプラシアンの固有値に関し、Jacquet-Langlands 対応と呼ばれる関係を持つ。それは通常、保型表現の言葉で書かれるが、$L^2(M)$ に属する wave form ϕ_j を、あるレベル N に関して $L^2(\Gamma_0(N)\backslash\mathbf{H})$ に属する wave form $\overline{\phi_j}$ に対応させていると見ることができる。ここで、固有値 λ_j は不変であるという性質がある。また、N は ϕ_j に対応する保型表現の conductor と呼ばれる量であり、N は j による。したがって、ϕ_j は j-番目の wave form を表すが、$\overline{\phi_j}$ は $L^2(\Gamma_0(N)\backslash\mathbf{H})$ の中で j-番目を表すわけではないことに、注意が必要である。

コンパクト面に関する評価の改善は、上記の対応を用いて合同面に帰着させることによって行なう。その際、最も問題となるのが、Jacquet-Langlands 対応の像を決定することである。特に、conductor N がいろいろに変わってしまう状況では、帰着することは難しい。そこで、以下の補題を証明した。

<u>補題</u>. 素数 2 が四元数環 D で不分岐であるとき、任意の j に対し、N は分岐素数の積に等しい。(特に、N は j によらない。)

[2] M がコンパクトであることは、D が division algebra であることと同値で、R によらない。文献 [H2] Theorem 3.2 とそこにある文献を参照。

証明の方針は、Jacquet-Langlands 対応の像を $\pi = \otimes\pi_p$ とおくと保型表現で知られている公式（例えば [G] など）により、

$$\mathrm{cond}(\pi_p) = \begin{cases} 1 & \pi_p \text{ が class } 1 \\ p^e \ \ (e \geq 1) & \pi_p \text{ が special} \\ p^e \ \ (e \geq 2) & \pi_p \text{ が supercuspidal} \end{cases}$$

となる。p が不分岐であれば、π_p は class 1 であることは易しい。以下、p が分岐するとする。π_p は special または supercuspidal であり、$\mathrm{cond}(\pi_p) = p^e \ (e \geq 1)$ となる。一方、Hejhal [H2] により、$N|4ab$ であることが知られている。今、a, b は互いに素で平方因子を含まないとしているので、N は 2 以外の平方因子を持たない。よって $e = 1$ しか起こり得ない。 □

<u>主定理 [K1]</u>. *division albegra* であるような四元数環 $D = \left(\frac{a,b}{\mathbf{Q}}\right)$ とそのオーダー R から、上記の手順で構成される数論的コンパクト面 M に対し、素測地線定理は以下を満たす。

$$\pi_M(x) = \mathrm{li}(x) + O(x^{\frac{7}{10}+\epsilon})$$

ただし、$(a,b) = 1$ であり、素数 2 が D で不分岐[3]であるとする。

<u>証明の方針</u>. Jacquet-Langlands 対応の像 $\{\overline{\phi_j} | j = 0, 1, 2, \cdots\}$ は、$\Gamma_0(N)$ の newform の全体に一致する。よって、

$$\begin{aligned} \sum_{r_j \text{ for } M} x^{ir_j} &= \sum_{\substack{r_j \text{ for } \Gamma_0(N) \\ \text{newform}}} x^{ir_j} \\ &\ll \sum_{d|N} \sum_{r_j \text{ for } \Gamma_0(d)} x^{ir_j} \end{aligned}$$

と評価され、最後の和は non-compact case に帰着する。 □

[3]吉田氏（京大）により、R が極大オーダーの場合には、2 の分岐・不分岐に関わらず主定理が成立することが指摘された。吉田氏によれば、この場合、各 π_p が special になること、及び $e = 1$ であることは、表現論的に示される。

第5章 高次元化（中筋麻貴氏との共同研究）

以上の結果を3次元多様体に一般化する試みについて、その経過を報告する。本章は、中筋麻貴氏（慶應大学）との共同研究である。

M を負定曲率3次元リーマン多様体、H^3 を3次元上半空間とする。H^3 には $PSL(2,\mathbf{C})$ が作用している。p を素閉測地線（すなわち、基本群の双曲共役類）とし、先ほどと同様に、

$$\pi_M(x) = \#\{p \mid N(p) = e^{l(p)} \leq x\}$$

とおく。セルバーグ・ゼータ関数は

$$Z_M(s) = \prod_p \prod_{\substack{k,l\geq 0 \\ *}} (1 - a(p)^{-2k}\overline{a(p)}^{-2l} N(p)^{-s})$$

で定義される。ここで、素測地線 p が対応する双曲共役類が、$PSL(2,\mathbf{C})$ の中で $\begin{pmatrix} a(p) & 0 \\ 0 & a(p)^{-1} \end{pmatrix}$ で代表されるとする。$a(p)$ は $|a(p)| > 1$ となるように選ぶ。上記の $N(p)$ とは、$N(p) = |a(p)|^2$ の関係がある。k, l に渡る積の条件 * は、k と l が、双曲共役類 p の中心化群の torsion の位数 $m(p)$ を法として合同であるような、すべての非負整数の組に渡ると言う意味である。このゼータ関数について、2次元あるいは古典的な素数の場合と同様に、

$$\frac{Z'_M}{Z_M}(s) = \sum_n \Lambda_M(n) N(n)^{-s}$$

とおくと、この場合のマンゴルト関数 $\Lambda_M(n)$ は

$$\Lambda_M(n) = \frac{\log N(p)}{m(p)|a(n) - a(n)^{-1}|^2}$$

となる。これより

$$\Psi_M(x) = \sum_{\substack{n:\text{geodesic} \\ N(n)\leq x}} \Lambda(n)$$

を定義する。セルバーグ・ゼータ関数の零点は、$\rho_j = 1 + ir_j$ の形をしており、有限個の例外零点を除いては、$r_j \in \mathbf{R}$ となっている。

定理 (Nakasuji-Koyama (1999)). K を類数1の虚二次体とし、その整数環を O_K とする。$M = PSL(2, O_K)\backslash H^3$ に対する Ψ_M の *explicit formula* は以下で与えられる。

$1 \leq T \leq x$ のとき

$$\Psi_M(x) = \frac{x^2}{2} + \sum_{|r_j|<T} \frac{x^{\rho_j}}{\rho_j} + O\left(\frac{x^2}{T} \log x\right)$$

この explicit formula において、右辺第2項の無限和を、第2章の意味で自明に評価することにより、素測地線定理において以下の誤差項を得る。

系.

$$\pi_M(x) = \mathrm{li}(x^2) + O(x^{\frac{5}{3}+\epsilon})$$

この誤差項は、Sarnak [S1] によって得られたものと同一であり、現時点における最良の結果である。これは、Sarnak の評価の別証を得たことになっている。

References

[G] S. Gelbart, *Automorphic forms on adele groups*, Ann. Math Studies **83** (1975).

[H1] D. Hejhal, *Selberg trace formula for $PSL(2, \mathbf{R})$*, Lecture Notes in Math **548**, Springer.

[H2] ———, *A classical approach to a well-known spectral correspondence on quaternion groups*, Lecture Notes in Math **1135** (1985), Springer, 127-196.

[HL] J. Hoffstein and P. Lockhart, *Coefficients of Maass forms and the Siegel zero*, Ann. Math. **140** (1994), 161-181.

[I] H. Iwaniec, *Prime geodesic theorem*, J. Reine Angew. Math. **349** (1984), 136-159.

[K1] S. Koyama, *Prime geodesic theorem for arithmetic compact surfaces*, International Math Research Notices **8** (1998), Duke University, 383-388.

[K2] ———, 散乱行列式と数論的量子カオス, 数理科学 **382** (1995/4月号), 46-53.

[K3] ———, 量子エルゴード性と素閉測地線定理, 代数学シンポジウム報告集 **43** (1998), 90-97.

[Ku] N.V. Kuznetsov, *Petersson's conjecture for cusp forms of weight zero and Linnik's conjecture. Sums of Kloosterman sums*, Math. USSR Sb. **39** (1981), 299-342.

[LRS] W. Luo, Z. Rudnick and P. Sarnak, *On Selberg's eigenvalue conjecture*, Geom. Funct. Anal. **5** (1995), 387-401.

[LS] W. Luo and P. Sarnak, *Quantum ergodicity of eigenfunction on* $PSL_2(Z)\backslash H^2$, I.H.E.S. Publ. Math. **81** (1995), 207-237.

[S1] P. Sarnak, *The arithmetic and geometry of some hyperbolic three manifolds*, Acta math. **151** (1983), 253-295.

[S2] ———, *Arithmetic quantum chaos*, Israel Math. Conf. Proc. **8** (1995), 183-236.