数理解析研究所講究録
1104 巻 1999 年 145-150



# 複素双曲多様体上の正則写像の剛性と有限性について

東工大・理工学研究科　志賀　啓成
(Hiroshige SHIGA)

## 1　正則写像の剛性

二つの複素多様体 $N, M$ が与えられている時，$N \to M$ の非定数正則写像の剛性を考える．すなわち，次の問題を考察する．

**問題.** どのような条件のもとで，ホモトピックな非定数正則写像 $f_j : N \to M$ $(j = 1, 2)$ に対して $f_1 \equiv f_2$ が結論されるか？

たとえば $M$ として $N$ と単位円板 $\Delta$ との直積 $N \times \Delta$ を考えれば容易に分るように，**一般にこのような剛性は成立しない**．従って，なんらかの条件は要請される．

複素多様体上の正則写像の剛性に関しては多くの研究（たとえば Borel-Narashimhan，砂田，野口，今吉 etc.）があるが，ここでは発散型の複素双曲多様体上で定義された正則写像の剛性について考える．ただし，複素双曲多様体とは，複素単位球 $B^n \subset \mathbf{C}^n$ の automorphisms よりなる離散群 $\Gamma$ の商空間として表現される $n$ 次元複素多様体のこととする．また，発散型 (divergence type) は次のように定義される．

**定義 1.1** 複素双曲多様体 $N = B^n/\Gamma$ が発散型 *(divergence type)* とは任意の $z \in B^n$ に対して

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} (1 - |\gamma(z)|)^n = +\infty$$

が成立するときをいう．

例えば，$N = B^n/\Gamma$ がコンパクトならば発散型である．

古典的には，すなわち $n=1$ の場合 $\Gamma$ は Fuchs 群になり，$\Gamma$ が発散型ということと $\Gamma$ があらわす Riemann 面 $B^1/\Gamma$ が Green 函数を持たないことと同値であることが知られている．

この論文では正則写像は発散型の複素双曲多様体 $N$ で定義され，Target となる多様体 $M$ は $\tilde{M}/G$ の形であるものとする．ただし $\tilde{M}$ は $\mathbf{C}^m$ 内のある有界領域で，$G$ は $\tilde{M}$ の双正則自己同型からなるある離散群である．この時次のことが証明される．

**定理 1.1** $N=B^n/\Gamma$ を発散型双曲多様体とする．また，複素多様体 $M=\tilde{M}/G$ が次の条件 *(A)* を満たすと仮定する．

*(A)* $\tilde{M}$ 内の任意のコンパクト集合 $K$ と，異なる元からなる任意の無限列 $\{g_k\}\subset G$ に対して

$$\lim_{k\to\infty} diam(g_k(K))=0.$$

ただし，*diam* はユークリッドの直径を表す．

このとき，非定数正則写像 $f_1,f_2:N\to M$ がホモトピックならば $f_1\equiv f_2$ である．

**注意 1.1** 条件 *(A)* から $G$ は無限群でなければならない．

**注意 1.2** 条件 *(A)* は，例えば $M$ の基本領域の *orbit* が境界に近づくとき，その直径が 0 になるような *covering* であれば満たされている．

*Proof.* $F_j:B^n\to\tilde{M}$ $(j=1,2)$ を $f_j$ の lift とする．$f_1$ と $f_2$ がホモトピックであるから，$F_1,F_2$ をうまくとればこれらが導く monodromy が同じであるようにできる．すなわち，ある準同型 $\theta:\Gamma\to G$ が存在して

$$F_j\circ\gamma(z)=\theta(\gamma)\circ F_j(z)\qquad(j=1,2)\tag{1}$$

が成り立つ．このとき，$F_1\equiv F_2$ を示せばよい．

$F_1,F_2$ は $n$ 次元単位球上の有界正則写像であるから，有界正則函数に関する古典的な Fatou の定理の拡張である Korányi の定理より，$\partial B^n$ 上ほとんどいたるところ $F_1,F_2$ には K-limit(addmissible limit) が存在する．ここに $B^n$ 上の函数 $f$ が境界点 $\zeta\in\partial B^n$ で K-limit をもつとは，$\alpha>1$ に対して

$$D_\alpha(\zeta)=\{z\in B^n \mid |1-\sum_{j=1}^{n} z_j\overline{\zeta_j}|<\frac{\alpha}{2}(1-|z|^2)$$

とおいた時，$z \in B^n$ がある $\alpha > 1$ から定まる $D_\alpha(\zeta)$ 内から $\zeta$ に近づく時に $f(z)$ が極限値を持つときをいう．$f$ の $\zeta$ における K-limit を $f^*(\zeta)$ と書くことにする．さらにこの K-limit は $B^n$ 上の有界正則函数を決定することが知られている．すなわち次のことが成立している．

**命題 1.2** $f$ を $B^n$ 上に定義された有界正則函数とすると $f$ は $\partial B^n$ のほとんどいたるところの点で *K-limit* $f^*$ をもち，$f^* = 0$ *(a.e.)* ならば $f \equiv 0$ である．

一方 $\Gamma$ は発散型であったから，$\partial B^n$ のほとんどすべての点は point of approximation であることが知られている．ここに

**定義 1.2** 境界点 $\zeta$ が $\Gamma$ の *point of approximation* とは，ある点 $z \in B^n$ に対してある $\alpha > 1$ と $\Gamma$ の列 $\{\gamma_k\}_{k=1}^\infty$ が存在して $\gamma_k(z) \in D_\alpha(\zeta)$ かつ $\gamma_k(z) \to \zeta$ $(k \to \infty)$ なるときをいう．

**注意 1.3** 実際には，1 点 $z \in B^n$ に対して上のような $\alpha > 1$ と列 $\{\gamma_k\}_{k=1}^\infty$ が $\zeta$ に対して存在すれば，別の点 $w \in B^n$ に対しては，ある $\alpha' > 1$ ($\alpha \neq \alpha'$ かもしれない）と上と同じ $\{\gamma_k\}_{k=1}^\infty$ に対して定義の条件が満たされている．

よって，命題 1.2 から $\partial B^n$ 上の測度 0 の集合 $E$ がとれて，$\zeta \in \partial B^n - E$ ならば $\zeta$ は $\Gamma$ の point of approximation であり，かつ $F$ の K-limit $F^*(\zeta)$ が存在するようにできる．そこで $\{\gamma_k\}_{k=1}^\infty$ を $\zeta$ に対して

$$\gamma_k(z) \to \zeta \qquad (k \to \infty; \gamma_k(z) \in D_\alpha(\zeta))$$

ととることができる．そこで関係式 (1) を用いると

$$F_j^*(\zeta) = \lim_{k\to\infty} F_j(\gamma_k(z)) = \lim_{k\to\infty} \theta(\gamma_k)(F_j(z)) \qquad (j = 1, 2)$$

を得る．ここで，$F_j^*(\zeta)$ は $z \in B^n$ に depend しないから $F_j^*(\zeta) \in \partial \tilde{M}$ であることがわかる．よって条件 (A) から

$$F_1^*(\zeta) = F_2^*(\zeta)$$

を得る．

## 2　正則写像の有限性

前節で示した正則写像の剛性を用いて次の有限性定理を証明することができる．

**定理 2.1** $N = B^n/\Gamma$，$M$ は前定理と同じもので，さらに $\Gamma$ が有限生成で $M$ はコンパクトであると仮定する．このとき，$N$ から $M$ への非定数正則写像は高々有限個である．

*Outline of Proof.*　定理 1.1 から，正則写像より生じる $\Gamma$ から $G$ への monodromy が有限個しかないことを示せばよい．$\Gamma$ は有限生成であるから，$\Gamma$ の生成元を $\gamma_1, \ldots, \gamma_\ell$ としたとき，これらの行き先が有限個の可能性しかないことをいえばよい．

$M$ はコンパクトであるから，$\tilde{M}$ 内に相対コンパクトな $M$ の基本領域 $\omega$ が存在する．任意の非定数正則写像 $f : N \to M$ に対して，その lift $F : B^n \to \tilde{M}$ を，$F(0) \in \omega$ ととる．

$N$ 上に一点 $P$ を $\pi(0) = P$ となるように取り固定する．ここに $\pi : B^n \to N$ は標準射影である．$\gamma_1, \ldots, \gamma_\ell$ に対応する $\pi_1(N, P)$ の元の代表元になっているような $P$ を基点とする閉曲線 $c_1, \ldots, c_\ell$ をとり固定しておく．また，これらの lifts で原点を始点とする弧を $\tilde{c}_1, \ldots, \tilde{c}_\ell$ とする．すなわち，$\tilde{c}_j$ は $0$ と $\gamma_j(0)$ を結ぶ弧で $\pi(\tilde{c}_j) = c_j$ を満たすものである．ここで $\tilde{c}'_j = F(\tilde{c}_j)$ とおくと，$\tilde{c}'_j$ は $F(0) \in \omega$ と $F(\gamma_j(0))$ とを結ぶ曲線で $\pi'(\tilde{c}'_j) = c'_j$ は $f$ の monodromy を与えている．ただし，$\pi' : \tilde{M} \to M$ は標準射影である．

一方，$F$ は正則写像であったから小林計量に関して短縮原理が成り立つ．したがって，$F(0)$ と $F(\gamma_j(0))$ の $\tilde{M}$ における小林距離は $0$ と $\gamma_j(0)$ の $B^n$ における小林距離よりも大きくない．そこで，$0$ と $\gamma_j(0)$ $(j = 1, 2, \ldots, \ell)$ の $B^n$ における小林距離の最大値を $K$ とすると，$F(\gamma_j(0))$ は小林距離に関する $\omega$ の $K$-近傍に含まれている．

$M = \tilde{M}/G$ はコンパクトであるから，$\tilde{M}$ 上小林計量は完備である．よって，$G$ の不連続性から monodromy の有限性がしたがう．

## 3　応用

定理 1.1 の証明（およびその結果の直接の応用）から次を得る．

**系 3.1** 発散型複素双曲的多様体上には非定数有界正則関数は存在しない．

定理 1.1 の条件 (A) に関連して次の条件 (B) を考える．

(B) $\tilde{M}$ にある invariant distance $d$ が存在して，境界の異なる任意の 2 点 $p, q$ に収束する任意の点列 $\{p_k\}$，$\{q_k\}$ に対して

$$\lim_{k\to\infty} d(p_k, q_k) = +\infty$$

が成り立つ．

このとき次が成立する．

**定理 3.2** 有界領域 $\tilde{M}$ 上に，条件 *(B)* を満たす *invariant distance* $d$ が存在するならば，正則自己同型からなる任意の離散無限部分群 $G$ に対して条件 *(A)* が成立する．従って，定理 *1.1* が成り立つ．

# 4 Examples

実際にこのような条件 (A), (B) を満たす多様体の例について考察する．まず，次のことが分かる

**例 4.1** $\tilde{M} = B^m$ は $Aut(B^m)$ の無限位数の任意の離散部分群に対して条件 *(A)* を満たす．

**例 4.2** *complex ellipsoid* $E_k \subset \mathbf{C}^m$ は $Aut(E_k)$ の無限位数の任意の離散部分群に対して条件 *(A)* を満たす．ただし，$k = (k_1, k_2 \ldots, k_m) \in \mathbf{N}^m$ $(1 = k_1 \leq k_2 \leq \cdots \leq k_m)$ で，

$$E_k = \{z \in \mathbf{C} \mid \sum_{j=1}^{m} |z_j|^{2k_j} < 1\}.$$

上の二つの例が条件 (A) をみたすことは次の命題から容易にしたがう．

**命題 4.1** $\Omega$ を $\mathbf{C}^m$ 内の有界領域とする．単位円板 $\Delta = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$ から $\overline{\Omega}$ への正則写像 $f$ で $f(0) \in \partial\Omega$ となるものが定数写像に限るとき $\Omega$ は $Aut(\Omega)$ の無限位数の任意の離散部分群 $G$ に対して条件 *(A)* を満たす．

この命題の証明は正規族の議論から容易になされる．

はじめにも述べたように，一般に正則写像の剛性定理を示すときに障害になるのは値域の直積性である．次の例では被覆空間は直積構造を持っているが被覆群の取り方により，すなわち条件 (A) を満たすので，剛性定理が成り立っている．

**例 4.3** $D_j$ $(j=1,\ldots,k)$ は単位球または *complex ellipsoid* として,

$$\tilde{M}=D_1\times D_2\times\cdots\times D_k$$

とおく. ここで, ある抽象群 $G$ と $Aut(D_j)$ の離散部分群 $G_j$ $(j=1,2,\ldots,k)$ および準同型写像 $\phi_j: G\to G_j$ で $ker\,\phi$ が有限になるものが存在したと仮定する. このとき $G$ の $\tilde{M}$ への作用を

$$g(z_1,z_2,\ldots,z_k)=(\phi_1(g)(z_1),\phi_2(g)(z_2),\ldots,\phi_k(g)(z_k))$$

と定めれば, $\tilde{M}/G$ は定理の条件 *(A)* を満たしていることが分かる.

# 参考文献


[1] S. Kamiya, Discrete subgroups of convergence type of $U(1,n;\mathbf{C})$, Hiroshima Math. J. **21** (1991),1–21.

[2] P. J. Nicholls, *The ergodic theory of discrete groups*, L.M.S. Lecture Note Ser. **143**, Cambridge Univ. Press 1989.

[3] W. Rudin, *Function Theory in the Unit Ball of* $\mathbf{C}^n$, Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin, 1980.