数理解析研究所講究録
1106 巻 1999 年 25-36

オイラー小道上の同一点間の間隔について
On the Intervals Between Identical Points on Eulerian Trails

神保 秀司　乾 勇治　橋口 攻三郎
Jimbo, Shuji　Inui, Yuji　Hashiguchi, Kosaburo

岡山大学 工学部
Faculty of Engineering, Okayama University

1999 年 3 月 10 日

概 要

グラフのオイラー小道とは, グラフのサイズと同じ長さを持つ閉じた小道である. 本論文では, オイラー小道の最短部分閉路の長さをそのオイラー小道の最短閉路長と呼び, グラフのオイラー小道の最短閉路長の最大値をそのグラフのオイラー回帰長と呼ぶ. 偶数 n で定まる完全 2 部グラフ $K_{n,n}$ のオイラー回帰長を決定し, 奇数位数の完全グラフのオイラー回帰長の上界と下界を与える. その上界と下界の差は, 高々 4 である. 更に, 素数位数の完全グラフについて考察し, オイラー小道のうち高い対称性を持つと見なされるものの最短閉路長の最大値の下界を与える.

ABSTRACT

An Eulerian trail of a graph is a closed trail whose length is the same as the size of the graph. In this paper, the length of the shortest subcircuit of an Eulerian trail of a graph is called the shortest circuit length of the Eulerian trail. The maximum of the shortest circuit length of Eulerian trails of a graph is called the Eulerian recursion length of the graph. The Eulerian recursion length of the complete bipartite graphs $K_{n,n}$ with even n is determined. The upper and lower bounds of complete graphs of odd order are presented. The difference of these bounds is at most four. Furthermore, the complete graphs of prime order are considered. A lower bound of the maximum of the shortest circuit length of Eulerian trails that are considered to have high symmetry is presented.

1 はじめに

グラフのオイラー小道とは, グラフのサイズと同じ長さを持つ閉じた小道である. オイラー小道 (Euler trail) を見付ける問題は, 一筆書きの問題であり, グラフ理論の黎明期から

注目されていることは, よく知られている. 他分野への応用としては, 符号理論における de Bruijn 列の構成との関係が有名である [4]. なお, 本論文では, オイラー小道は, 閉じた小道として定義する. 更に, 単にグラフと言った場合, 単純無向グラフを表す.

与えられたグラフがオイラー小道を持つ, 即ちオイラーグラフであるか否かは容易に判定でき, 更に, 与えられたオイラーグラフのオイラー小道を具体的に見付けることも容易である. 本研究では, 特定のグラフのクラスが単にオイラー小道を持つというだけでなく, 特定の条件を満たすようなオイラー小道を持ち得るか否かについて考察する. その特定の条件とは, オイラー小道上に並ぶ同一点の間隔の最小値が十分に大きいというものである. この最小間隔のことをそのオイラー小道の最短閉路長と呼ぶことにする. 更に, オイラーグラフ G のオイラー回帰長とは, G のオイラー小道の最短閉路長の最大値であると定義する. オイラー小道の最短閉路長は, その値が大きい程そのオイラー小道の偏りが小さいと見なされることを意図して定義したものである. 本研究の結果として, n が偶数のときの完全 2 部グラフ $K_{n,n}$ のオイラー回帰長が $2n-4$ であることを示した. 更に, 奇数位数の完全グラフのオイラー回帰長の上界と下界を与え, それらの差がグラフの位数に関らず高々 4 であることを示した. 但し, グラフの位数とは点の個数を言う.

本論に入る前に, オイラーグラフのオイラー回帰長を求めることの意味について述べる. オイラーグラフの辺をオイラー小道に沿って並べることは, 与えられた 2 点の組を重複しないように取っていく取り方を示すことである. 従って, グラフの辺に相当する 2 つのものの組合せに従って比較試験を何度も繰り返す必要がある場合, 適当な仮定の下でオイラー小道は, 効率のよい試験手順を示していると考えられる. 卑近な例では, 多数の競技者による総当たり戦を実施して優劣を競うことが挙げられる. この例では, 競技者の組合せの全てに対して試合を実施するだけでなく, 各組合せに対して複数回試合を実施するものとする. そして, 次の 2 つの仮定を設ける. 一つは, その試合を 2 回連続して行っても 1 回目と 2 回目で競技者の疲労などによる競技成績への影響は殆んどないが, それ以上行なう場合は, 次の試合までの時間をなるべく長く確保するのが望ましいというものである. もう一つは, ある試合の結果は, 競技者がその前後にどのような競技者と試合をしたかに依存しないというものである. このとき, 最適な競技実施計画を求める問題は, 競技者の総数を位数に持つ完全グラフのオイラー回帰長を求める問題に帰着される.

以下, **2** で基本的な概念を定義した後, **3** で, 完全 2 部グラフのオイラー回帰長について考察する. 完全 2 部グラフの点集合は, V_1 と V_2 の 2 つに分割される. これら V_1 と V_2 のサイズがどちらも特定の偶数 n に等しいもののオイラー回帰長が $2n-4$ であることを示す. **4** では, 奇数位数の完全グラフのオイラー回帰長について考察し, その上界と下界を与える. これらの上界と下界の差は, 完全グラフの位数に関らず高々 4 である. 更に, 完全グラフの位数を素数に制限し, それに含まれるオイラー小道のうち高い対称性をもつものに

ついて最短閉路長の最大値の下界を与える. なお, オイラー小道が「高い対称性」を持つとは, 本論文ではそのオイラー小道がハミルトン閉路を連接した形で表され, かつ各ハミルトン閉路がグラフの点集合の何らかの巡回置換に関して不変であるという性質を持つことを言う. **5** は, あとがきである.

2 準備

グラフ G のオイラー小道とは, G の辺を全て含む閉じた小道 (trail), 即ち, 同じ辺を 2 度通らない閉じた歩道 (walk) のことであり, オイラー小道を持つグラフを, オイラーグラフと呼ぶ. グラフ G がオイラーグラフであることと G の各点の次数が偶数であることが等価であることは, よく知られた命題である. なお, 一般に歩道とは点と辺が交互に並んだ列であり, 点で始まり点で終わる. その上, 歩道上隣り合う 2 点はそれらに挟まれた辺でグラフ上隣接していなくてはならない. 但し, 本論文では, 単純無向グラフに含まれる歩道だけを扱うので, 歩道を単なる点の列と考えて差し支えない. 本論文では歩道を, $v_0 \to v_1 \to \cdots \to v_m$ のように表す. この表現では, v_0 は始点であり, v_m は終点である. なお, $v_0 = v_m$ のとき歩道は閉じていると言い, 閉じた歩道においては, 歩道中の全ての点は, 始点であると同時に終点であると見なすことができる.

部分列として閉路を持つ小道に対して, その小道の部分閉路の長さの最小値をその小道の最短閉路長と呼ぶ. 但し, 閉路とは, 同一点が 2 回以上現れない閉じた小道のことである. 開いた小道に対しても, それが部分閉路を含んでいれば最短閉路長を定義できることに注意せよ. オイラー小道はその部分列として必ず閉路を持つので最短閉路長を定義できる. オイラーグラフ G のオイラー小道の最短閉路長の最大値を G のオイラー回帰長と呼ぶ. グラフ G の閉路の長さは, G の位数, 即ち G の点の個数を超えることはないので, G のオイラー回帰長もまた G の位数を超えることはない.

更に, 上記の定義から次の命題が成り立つことが直ちに導かれる. 証明は, 省略する. なお, 正則グラフにこの定理を適用した場合, 得られるオイラー回帰長の上界は, 上記の自明な値, 即ちそのグラフの位数になることに注意せよ.

命題 1 オイラーグラフ G のサイズを s, 最大次数を ρ とする. このとき, G のオイラー回帰長は, $2s/\rho$ を超えない.

本論文では, 有限集合 S に属する要素の個数を $|S|$ で表し, グラフ G の点集合を $V(G)$ で, 辺集合を $E(G)$ で表す. 従って, G の位数は $|V(G)|$ で, サイズは $|E(G)|$ で表される. また, 議論を簡潔にするために, グラフ G の点集合は, 非負整数の集合 $\{0, 1, \ldots, |V(G)| - 1\}$ であると仮定することが多い. このように仮定しても一般性を失わない. 2 部グラフ G の

点集合は, 2 つの部分集合 V_1 と V_2 に分割され, G の全ての辺は, V_1 に属する点と V_2 に属する点を結んで得られる. V_1 と V_2 を 2 部グラフ G の点集合のクラスと呼ぶ.

3 完全 2 部グラフのオイラー回帰長

完全 2 部グラフのうち, その点集合の 2 つのクラスのサイズが等しいもの $K_{n,n}$ について考察する. 但し, n は正の偶数とする. このような完全 2 部グラフのオイラー回帰長は次の定理で完全に決定する. なお, $n=2$ の場合は, 唯一のオイラー小道がハミルトン閉路になるので, オイラー回帰長は 4 である.

定理 1 n が $n \geq 4$ を満たす偶数であるならば, $K_{n,n}$ のオイラー回帰長は, $2n-4$ である.

(証明)　初めに, 最短閉路長が高々 $2n-4$ のオイラー小道を構成する. $K_{n,n}$ の点集合の 2 つのクラスは, $U=\{0,2,4,\ldots,2n-2\}$ と $V=\{1,3,5,\ldots,2n-1\}$ であると仮定してよい. $K_{n,n}$ の辺集合を $n/2$ 個のハミルトン閉路 $C_0, C_2, \ldots, C_{n-2}$ に分割する. 各 C_k は, ハミルトン道 H_k を使って $H_k \to 0$ と表される. ハミルトン道 H_k を

$$H_k = 0 \to (2k+1) \bmod 2n \to 2 \to (2k+3) \bmod 2n \to \cdots \to 2n-2 \to (2k+2n-1) \bmod 2n$$

により定義する. 但し, k は, $0 \leq k \leq n-1$ を満たす整数である. ハミルトン閉路 $C_0, C_2, \ldots, C_{n-2}$ が互いに辺素であることは, 各 H_k の定義より容易に確かめられる. 従って,

$$T = H_0 \to H_2 \to H_4 \to \cdots \to H_{n-2} \to 0$$

は, オイラー小道である. ハミルトン閉路を連接して T を構成したことより, T の最短閉路長が $2n-4$ 以上であることを示すには, 各 $k=0,2,4,\ldots,n-2$ に対して, 小道 $H_k \to H_{(k+2) \bmod n}$ の最短閉路長が $2n-4$ 以上であることを示せば十分である. H_k 中の偶数 i を始点とし, $H_{(k+2) \bmod n}$ 中の i を終点とする $H_k \to H_{(k+2) \bmod n}$ の閉じた部分小道の長さは, i の値に依らず丁度 $2n$ である. 従って, H_k 中の奇数 j を始点とし, $H_{(k+2) \bmod n}$ 中の j を終点とする $H_k \to H_{(k+2) \bmod n}$ の閉じた部分小道の長さが $2n-4$ 以上であることを示せば, オイラー小道 T の最短閉路長が $2n-4$ 以上であることが示される.

$$H_k = 0 \to \cdots \to x \to j \to \cdots \to (2k+2n-1) \bmod 2n$$

および

$$H_{(k+2) \bmod n} = 0 \to \cdots \to y \to j \to \cdots \to (2k+2n+3) \bmod 2n$$

と表すことにより x と y を定めるとき, 定義より, $x=(j-2k-1) \bmod 2n$ および $y=(j-2k-5) \bmod 2n$ が成り立つ. 従って, H_k 中の j から後の部分の長さは, $l=$

$2n - ((j - 2k - 1) \bmod 2n) - 1$ であり, $H_{(k+2) \bmod n}$ 中の j から前の部分の長さは, $r = ((j - 2k - 5) \bmod 2n) + 1$ である. $n \geq 4$ より, $(j - 2k - 1) \bmod 2n > (j - 2k - 5) \bmod 2n$ ならば, $(j - 2k - 1) \bmod 2n = ((j - 2k - 5) \bmod 2n) + 4$ が成り立つので, $l + r \geq 2n - 4$ が導かれる. 従って, T の最短閉路長が $2n - 4$ 以上であることが示された.

次に, $K_{n,n}$ のオイラー回帰長が $2n - 4$ を超えないことを示す. T を $K_{n,n}$ のオイラー小道とする. T の最短閉路長が $2n - 4$ よりも大きいと仮定して矛盾を導くことにより, T は, 高々 $2n - 4$ の長さの部分閉路を必ず含むことを示す.

$K_{n,n}$ の位数は $2n$ であるので, T は, 長さが高々 $2n$ の部分閉路を含む. 初めに, T が長さが $2n$ の部分閉路

$$S = s_1 \to s_2 \to \cdots \to s_{2n} \to s_1$$

を含むと仮定する. 2 部グラフは奇数長の閉路を含まないので, $E = \{s_2, s_4, \ldots, s_{2n}\}$, $O = \{s_1, s_3, \ldots, s_{2n-1}\}$ は, それぞれ $K_{n,n}$ の点集合のクラスになっている.

$$T = \cdots \to S \to x_1 \to x_2 \to \cdots$$

と表す. 定義より, $x_1 \in E$ および $x_2 \in O$ が成り立つ. T の部分小道は, 次の条件 1 および 2 を両方とも満たさなくてはならない.

条件 1 同じ辺を 2 つ以上含まない.

条件 2 長さが高々 $2n - 4$ の部分閉路を含まない.

次の表により, $x_1 = s_4$ が導かれる.

z	歩道 $S \to z$ が満たさない条件
s_2, s_{2n}	条件 1
$s_6, s_8, \ldots, s_{2n-2}$	条件 2

結局, 次の表により, どのように x_2 を選んでも, $S \to x_1 \to x_2$ は, 条件 1 あるいは 2 のどちらかを満たさないことが導かれる.

z	歩道 $S \to s_4 \to z$ が満たさない条件
s_1, s_3, s_5	条件 1
$s_7, s_9, \ldots, s_{2n-1}$	条件 2

次に, T が丁度 $2n - 2$ の長さの部分閉路

$$S = s_1 \to s_2 \to \cdots \to s_{2n-2} \to s_1$$

を含むと仮定する. S に含まれない 2 点を s_{2n-1}, s_{2n} で表し, $E = \{s_2, s_4, \ldots, s_{2n}\}$, $O = \{s_1, s_3, \ldots, s_{2n-1}\}$ が, それぞれ $K_{n,n}$ の点集合のクラスになっているようにする.

$$T = \cdots \to S \to x_1 \to x_2 \to x_3 \to x_4 \to \cdots$$

と表す. 定義より, $\{x_1, x_3\} \subseteq E$ および $\{x_2, x_4\} \subseteq O$ が成り立つ. T の部分小道は, 上の条件 1 および 2 に加えて, 次の条件 3 も満たすと仮定してよい.

条件 3 長さが丁度 $2n$ の部分閉路を含まない.

次の表により, $x_1 = s_{2n}$ が導かれる.

z	歩道 $S \to z$ が満たさない条件
s_2, s_{2n-2}	条件 1
$s_4, s_6, \ldots, s_{2n-4}$	条件 2

次の表により, $x_2 \in \{s_3, s_{2n-1}\}$ が導かれる.

z	歩道 $S \to s_{2n} \to z$ が満たさない条件
s_1	条件 1
$s_5, s_7, \ldots, s_{2n-3}$	条件 2

次の表により, $x_2 \neq s_3$ が導かれるので, $x_2 = s_{2n-1}$ が導かれる.

z	歩道 $S \to s_{2n} \to s_3 \to z$ が満たさない条件
s_2, s_4, s_{2n}	条件 1
$s_6, s_8, \ldots, s_{2n-2}$	条件 2

次の表により, $x_3 = s_4$ が導かれる.

z	歩道 $S \to s_{2n} \to s_{2n-1} \to z$ が満たさない条件
s_{2n}	条件 1
$s_6, s_8, \ldots, s_{2n-2}$	条件 2
s_2	条件 3

結局, 次の表により, どのように x_4 を選んでも, $S \to x_1 \to x_2 \to x_3 \to x_4$ は, 条件 1, 2, 3 のいずれかを満たさないことが導かれる.

z	歩道 $S \to s_{2n} \to s_{2n-1} \to s_4 \to z$ が満たさない条件
s_3, s_5, s_{2n-1}	条件 1
s_1	条件 2
$s_7, s_9, \ldots, s_{2n-3}$	条件 2

以上で証明は完了した. □

4 完全グラフのオイラー回帰長

完全グラフ K_n がオイラーグラフであることと n が奇数であることは等価である. 従って, 以下 n が奇数のときの K_n のオイラー回帰長について考察する. 完全 2 部グラフのオイラー回帰長と同様に, 完全グラフ K_n のオイラー回帰長は, 自明な上界である位数 n に極めて近い値になる. 次の定理は, この事実を保証する.

定理 2 n は $n \geq 11$ を満たす奇数とする. このとき, $n = 4m+3$ を満たす整数 m が存在するならば, K_n は, 最短閉路長が $n-4$ のオイラー小道を持ち, $n = 4m+1$ を満たす整数 m が存在するならば, K_n は, 最短閉路長が $n-6$ のオイラー小道を持つ.

(証明) K_n の点集合は $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ であると仮定してよい. K_n の $n-1$ 個のハミルトン道 $H_0, H_1, \ldots, H_{n-2}$ を

$$\begin{aligned} H_j &= n-1 \to j \to (j-1) \bmod (n-1) \to (j+1) \bmod (n-1) \to (j-2) \bmod (n-1) \\ &\to \cdots \to \left(j + \sum_{i=0}^{k}(-1)^i i\right) \bmod (n-1) \to \cdots \to \left(j + \sum_{i=0}^{n-2}(-1)^i i\right) \bmod (n-1) \end{aligned}$$

により定義する.

$$\left(j + \sum_{i=0}^{n-2}(-1)^i i\right) \bmod (n-1) = \left(j - \frac{n-1}{2}\right) \bmod (n-1)$$

が成り立つ. 整数 j に対して, $r(j) = (j + ((n-1)/2)) \bmod (n-1)$ と定義する. $H_{r(j)}$ は, H_j の向きを逆にしたものになっている. また, $i \neq j$ かつ $i \neq r(j)$ ならば, 2 つのハミルトン閉路 $H_i \to n-1$ と $H_j \to n-1$ は共通の辺を持たない. 従って,

$$n = 4m+3 \text{ の形のときは,} \quad C = H_0 \to H_2 \to H_4 \to \cdots \to H_{n-3} \to n-1$$

と定義し,

$$n = 4m+1 \text{ の形のときは,} \quad C = \begin{cases} H_0 \to H_2 \to H_4 \to \cdots \to H_{((n-1)/2)-2} \to H_{((n-1)/2)+1} \\ \to H_{((n-1)/2)+3} \to \cdots \to H_{n-2} \to n-1 \end{cases}$$

と定義すれば, どちらの場合でも, C は K_n のオイラー小道になる.

C の最短閉路長の下界の評価は, 次の事実に基づいてなされる. 詳細は省略する.

> **事実** $i \in \{0, 1, \ldots, n-2\}$ および $j \in \{0, 1, \ldots, n-2\}$ に対して, $d(i,j) = \min\{(i-j) \bmod (n-1), n-1-((i-j) \bmod (n-1))\}$ と定義する. このとき, 任意の $k \in \{0, 1, \ldots, n-2\}$ に対して, H_k は, i から j への道あるいは j から i への道で長さが高々 $2d(i,j)$ のものを含む.

□

ハミルトン閉路 $H_k \to n-1$ による完全グラフ K_n の辺集合の分解は, Bollobás [2] にも簡潔な説明がある.

次の定理は, K_n のオイラー回帰長の自明な上界を僅かに改良する.

定理 3 n は $n \geq 5$ を満たす奇数とする. このとき, K_n のオイラー小道には, 長さが高々 $n-2$ の部分閉路が存在する.

(証明)　証明の方針は, 定理 1 の場合と同様である. T を K_n のオイラー小道とする. T の最短閉路長が $n-2$ よりも大きいと仮定して矛盾を導くことにより, T は, 高々 $n-2$ の長さの部分閉路を必ず含むことを示す.

K_n の位数は n であるので, T は, 高々 n の長さの部分閉路を含む. 初めに, T が丁度 n の長さの部分閉路

$$S = s_1 \to s_2 \to \cdots \to s_n \to s_1$$

を含むと仮定し,

$$T = \cdots \to S \to x_1 \to x_2 \to \cdots$$

と表す. T の部分小道は, 次の条件 1, 2, および 3 を全て満たさなくてはならない.

条件 1 ループを含まない. 但し, ループとは同一の点を結ぶ辺のことである.

条件 2 同じ辺を 2 つ以上含まない.

条件 3 長さが高々 $n-2$ の部分閉路を含まない.

次の表により, $x_1 = s_3$ が導かれる.

z	歩道 $S \to z$ が満たさない条件
s_1	条件 1
s_2, s_n	条件 2
$s_4, s_5, \ldots, s_{n-1}$	条件 3

結局, 次の表により, どのように x_2 を選んでも, $S \to x_1 \to x_2$ は, 条件 1, 2 あるいは 3 のいずれかを満たさないことが導かれる.

z	歩道 $S \to s_3 \to z$ が満たさない条件
s_3	条件 1
s_1, s_2, s_4	条件 2
$s_5, s_6, \ldots, s_n$	条件 3

次に, T が丁度 $n-1$ の長さの部分閉路

$$S = s_1 \to s_2 \to \cdots \to s_{n-1} \to s_1$$

を含むと仮定する. S に含まれない唯一の点を s_n で表し,

$$T = \cdots \to S \to x_1 \to x_2 \to x_3 \to \cdots$$

と表す. T の部分小道は, 上の条件 1, 2 および 3 に加えて, 次の条件 4 も満たすと仮定してよい.

条件 4 長さが丁度 n の部分閉路を含まない.

次の表により, $x_1 = s_n$ が導かれる.

z	歩道 $S \to z$ が満たさない条件
s_1	条件 1
s_2, s_{n-1}	条件 2
$s_3, s_4, \ldots, s_{n-2}$	条件 3

次の表により, $x_2 = s_3$ が導かれる.

z	歩道 $S \to s_n \to z$ が満たさない条件
s_n	条件 1
s_1	条件 2
$s_4, s_5, \ldots, s_{n-1}$	条件 3
s_2	条件 4

結局, 次の表により, どのように x_3 を選んでも, $S \to x_1 \to x_2 \to x_3$ は, 条件 1, 2, 3, あるいは 4 のいずれかを満たさないことが導かれる.

z	歩道 $S \to s_n \to s_3 \to z$ が満たさない条件
s_3	条件 1
s_2, s_4, s_n	条件 2
s_1	条件 3
$s_5, s_6, \ldots, s_{n-1}$	条件 3

以上で証明は完了した. □

定理 3 で主張されているオイラー回帰長の上界を, 証明中の手法をより巧妙に使って改良することが期待される. しかしながら, 次の事実よりこの案は, 直ちには適用できないと考えられる. 各 $j = 0, 1, \ldots, n-2$ に対して, H_j は, 定理 2 の証明中で定義されている K_n のハミルトン道とする. このとき, 長さ $|E(K_n)| - 1$ の小道

$$H = H_0 \to H_1 \to \cdots \to H_{((n-1)/2)-1}$$

の最短閉路長は, $n-2$ である. しかしながら, オイラー小道 $H \to n-1$ には, 三角形 $n-2 \to n-1 \to 0 \to n-2$ が含まれてしまう.

なお, 定理 3 より, K_5 のオイラー回帰長が 3 であることが確定する. また, K_7 には,

$$0 \to 1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6 \to 0 \to 2 \to 4 \to 1 \to 3 \to 5 \to 2 \to$$
$$6 \to 4 \to 0 \to 5 \to 1 \to 6 \to 3 \to 0$$

という最短閉路長が 4 であるオイラー小道が存在するが, 最短閉路長が 5 であるオイラー小道は存在しないことが全数探索により確かめられるので, K_7 のオイラー回帰長は 4 である. K_9 は, 最短閉路長が 5 のオイラー小道

$$0 \to 1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6 \to 7 \to 8 \to$$
$$0 \to 2 \to 4 \to 6 \to 8 \to 1 \to 3 \to 5 \to 7 \to$$
$$4 \to 1 \to 6 \to 3 \to 0 \to 7 \to 2 \to 5 \to 8 \to$$
$$3 \to 7 \to 1 \to 5 \to 0 \to 6 \to 2 \to 8 \to 4 \to 0$$

を持つ. しかしながら, 最短閉路長が 6 あるいは 7 のオイラー小道を K_9 が持つか否かは現時点では決定できていない. 予想としては, $n \geq 5$ を満たす全ての奇数 n に対して, K_n のオイラー回帰長は $n-2$ よりも真に小さいと考えている.

5 完全グラフ中の高い対称性を持つオイラー小道の最短閉路長

定理 2 の証明で構成したオイラー小道は, 完全グラフ K_n を互いに辺素なハミルトン閉路に分解したものを連接した形, 即ち

$$v_0 \to H_1 \to v_0 \to H_2 \to v_0 \to \cdots \to v_0 \to H_{(n-1)/2} \to v_0$$

をしている. 但し, $H_1, H_2, \ldots, H_{(n-1)/2}k$ は, 全て点 v_0 を通らない長さ $n-2$ の道である. 以下では, このような形のオイラー小道のうち, 次の条件 A を満たすものの最短閉路長について考察する.

条件 A 全ての $v_0 \to H_k \to v_0$ の自己同型写像でありかつ $V(K_n)$ 上の巡回置換になっている写像 $\rho: V(K_n) \to V(K_n)$ が存在する.

完全グラフ K_n の点集合として, $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ を取ることにする. この取り方により, 条件 A を満たす写像 ρ として $\rho(v) = v + 1 \bmod n$ を取り, 更に $v_0 = 0$ と取っても一般性を失わない. 更に, 条件 A を満たすオイラー小道が存在するのは n が素数のときだけであることが, 整数論の初等的な議論により導かれる. このとき, 各 $v_0 \to H_k \to v_0$ は, $1 \leq i \leq n-1$ を満たす適当な整数 i を使って,

$$H_k = H_n(i) = 0 \to i \bmod n \to 2i \bmod n \to \cdots \to mi \bmod n \to \cdots \to (n-1)i \bmod n$$

と表される. なお, i が $1 \leq i \leq n-1$ を満さない場合でも, $i \equiv 0 \pmod n$ でない限り, $i' \equiv i \pmod n$ および $1 \leq i' \leq n-1$ を満たす整数 i' を使って, $H_n(i) = H_n(i')$ と定義する. この定義より, $i \equiv j \pmod n$ ならば, $H_n(i)$ は $H_n(j)$ に等しく, かつ, $i \equiv -j \pmod n$ ならば, $H_n(i)$ は $H_n(j)$ の向きを逆にしたものになっている. 従って, 条件 A を満たす K_n のオイラー小道は,

条件 B $s_i \equiv -s_j \pmod n$ を満たす i と j の組合せも, $s_i \equiv s_j \pmod n$ を満たす i と j の組合せも, どちらも存在しない.

を満たす長さ $(n-1)/2$ の整数列 $s = (s_1, s_2, \ldots, s_{(n-1)/2})$ により定まるオイラー小道

$$T_n(s) = H_n(s_1) \to H_n(s_2) \to \cdots \to H_n(s_{(n-1)/2}) \to 0$$

と同型であり, 逆にこのようなオイラー小道は全て条件 A を満たす.

次の定理により, オイラー小道 $T_n(s)$ の最短閉路長の最大値の下界が得られる.

定理 4 a を素数 n の原始根とする. $n = 4m+3$ を満たす整数 m が存在するならば,

$$\alpha = a^2 \bmod n, \quad s = (1, a^2, a^4, \ldots, a^{n-3})$$

と定め, $n = 4m+1$ を満たす整数 m が存在するならば,

$$\begin{cases} \alpha = \max\{a, a^2 \bmod n, a^3 \bmod n\}, \\ s = (1, a^2, a^4, \ldots, a^{((n-1)/2)-2}, a^{((n-1)/2)+1}, a^{((n-1)/2)+3}, \ldots, a^{n-1}) \end{cases}$$

と定める. このとき, オイラー小道 $T_n(s)$ の最短閉路長 l は,

$$l \geq 1 + \frac{n-1}{\alpha}$$

を満たす.

(証明)　整数列 s が条件 B を満たすことは, a が素数 n の原始根であることと, 一般に, 素数 p の任意の原始根 r が $r^{(n-1)/2} \equiv -1 \pmod n$ を満たすことから導かれる.

次に, 小道 $H_n(s_k) \to H_n(s_{(k+1) \bmod n})$ の最短閉路長の下界を見積る. $H_n(s_k) = 0 \to u_1 \to u_2 \to \cdots \to u_{n-1}$, $H_n(s_{(k+1) \bmod n}) = 0 \to v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_{n-1}$ とおく. $H_n(s_k) \to H_n(s_{(k+1) \bmod n})$ が閉路 $C = u_i \to u_{i+1} \to \cdots \to u_{n-1} \to 0 \to v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_j$ を含めば, C の長さは $n-i+j$ であり, $u_i = is_k \bmod n$ および $v_j = (js_{(k+1) \bmod n}) \bmod n$ と表されるので,

$$is_k \equiv js_{(k+1) \bmod n} \pmod n$$

が成り立つ. 但し, $u_0 = v_0 = 0$ とする. $s_{(k+1) \bmod n} \equiv \gamma s_k \pmod n$ により $1 \leq \gamma \leq n-1$ を満たす γ を定めれば,

$$i \equiv j\gamma \pmod n$$

が導かれる. $0 \leq i \leq n-1$ および $j\gamma \geq 0$ より, $i \leq j\gamma$ が導かれる. これは,

$$-i + j \geq -\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) i$$

と等価である. 従って,

$$n - i + j \geq n - \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) i = 1 + \frac{n-1}{\gamma}$$

を得る. 整数列 s の定義より, $n = 4m+3$ の形のときは, $\gamma = \alpha$ であり, $n = 4m+1$ の形のときは, γ は, a, $a^2 \bmod n$, $a^3 \bmod n$ のいずれかである. 従って,

$$1 + \frac{n-1}{\gamma} \geq 1 + \frac{n-1}{\alpha}$$

が導かれ, 証明は完了する. □

定理 4 で定義されている, n によって定まる整数列 s を $s(n)$ で表す. 定数 c を原始根に持つ素数が無限に存在すれば, その素数の列を $p(1), p(2), \ldots$ とおいたとき, 定理 4 より, 完全グラフ $K_{p(i)}$ のオイラー小道 $T_{p(i)}(s(p(i)))$ の最短閉路長 $l(p(i))$ は, $l(p(i)) = \Omega(p(i))$ を満たすこと, 即ち, 完全グラフの位数と同程度になることが導かれる. しかしながら, 上記のような素数の無限列の存在は, 現時点では知られていないようである.

6 あとがき

定理 2 で示した奇数位数の完全グラフのオイラー回帰長の下界の改良は, 定理 3 で示したほぼ自明と言える上界の改良よりも困難であると予想する.

4 節で K_9 のオイラー回帰長が未定であると述べたが, 単に時間面での問題から計算機実験が十分に実施できなかったからであり, その決定は極めて容易と考えている.

素数 p の最小の原始根を g_p と表す. Grossward [3] により, 十分大きい素数 p に対して, 定数 $\varepsilon > 0$ が存在して $g_p < p^{(1/2)-\epsilon}$ が成り立つことが示されている. 従って, 定理 4 より, $4m+3$ の形の素数 p に対して p が増加するにつれて K_p のオイラー小道 $T_p(s(p))$ の最短閉路長が限りなく増加していくことが導かれる.

Adelgren は, 全ての点の次数が 4 以下のグラフが三角形を含まないオイラー小道を持つための必要十分条件を示した [1]. グラフが三角形を含まないオイラー小道を持つということは, 本論文の用語を用いれば, そのグラフのオイラー回帰長が 4 以上であると言い替えることができる.

参考文献

[1] Tobias Adelgren. Triangle-free eulerian tours in graphs with maximum degree at most 4. *Discrete Mathematics*, Vol. 138, pp. 5–14, 1995.

[2] Béla Bollobás. *Modern Graph Theory.* Springer-Verlag New York, Inc., New York, 1998.

[3] E. Grosswald. On burgess' bound for primitive roots modulo primes and an application to $\gamma(p)$. *American Journal of Mathematics*, Vol. 103, pp. 1171–1183, 1981.

[4] K. Thulasiraman and M. N. S. Swamy. *Graphs: Theory and Algorithms.* John Wiley & Sons, Inc., New York, 1992.