数理解析研究所講究録
1107 巻 1999 年 24-31

Spaces of upper semi-continuous multi-valued functions

筑波大学数学研究科5年 上原 成功 (Shigenori Uehara)

ここでは，ある種の関数空間のコンパクト化や集合値関数から成る無限次元位相多様体について研究し，これらに関する課題についても述べる．

0．定義.

始めに定義を述べておく. 空間 E が与えられたとき, 局所的に E と同相 ($\approx$) である空間を E-多様体と呼ぶ. 空間の組 (E,F) に対して (M,N) が (E,F)-多様体であるとは, 任意の $x\in M$ に対して, x の M での開近傍 U と E の開集合 V で $(U,U\cap N)\approx(V,V\cap F)$ を満たすものが存在するときを言う. ここでは, この空間 E として, Hilbert 立方体 $Q=[-1,1]^{\infty}$ やその pseudo-interior $s=(-1,1)^{\infty}$, Hilbert 空間 $\ell_2(A)$（但し, A は無限集合）を主に扱う.

以下, (X,d) と (Y,d') を距離空間, $\mathbf{I}=[0,1]$ を閉区間, $\mathbb{R}$ を実数直線, $\overline{\mathbb{R}}=[-\infty,\infty]$ を拡張された実数直線とする. 積空間 $X\times Y$ に次の距離 ρ を与える:

$$\rho((x,y),(x',y'))=\max\{d(x,x'),d'(y,y')\}.$$

2^X と $\exp(X)$ により, それぞれ X の空でない閉部分集合から成る巾空間と, X の空でないコンパクト部分集合から成る巾空間を表わし, 次の無限大も許す距離 d_{H} を持つものとする:

$$d_{\mathrm{H}}(E,F)=\max\{\sup_{z\in E}d(z,F),\sup_{z\in F}d(z,E)\}.$$

集合値関数 $\varphi\colon X\to Y$ が上半連続 (u.s.c.) であるとは, 任意の Y の開集合 U に対して $\{x\in X\mid\varphi(x)\subset U\}$ が X の開集合になるときを言う. 各 $\varphi(x)$ が空でないコンパクト集合となる上半連続関数 $\varphi\colon X\to Y$ 全体を $\mathrm{USC}(X,Y)$ と表わし,

$$\mathrm{USCC}(X,Y)=\{\varphi\in\mathrm{USC}(X,Y)\mid \text{ each }\varphi(x)\text{ is connected}\}$$

とする．更に，Xがコンパクトでない場合には，

$$\mathrm{USC}_B(X,Y) = \{\varphi \in \mathrm{USC}(X,Y) \mid \bigcup_{x\in X}\varphi(x) \text{ is bounded}\},$$

$$\mathrm{USCC}_B(X,Y) = \mathrm{USC}_B(X,Y) \cap \mathrm{USCC}(X,Y)$$

を考える．各々の$\varphi \in \mathrm{USC}(X,Y)$ をそのグラフと同一視することにより $\mathrm{USC}(X,Y)$ を $2^{X\times Y}$ の部分空間と見なす．Xがコンパクトでない場合でも，$\mathrm{USC}_B(X,Y)$ 上では，ρ_{H}は距離になる．また，$Y = \mathbb{R}$ の場合は，簡単のために，$\mathrm{USCC}_B(X) = \mathrm{USCC}_B(X,\mathbb{R})$ などと表記する．

1．関数空間の (局所) コンパクト化.

コンパクト距離空間 X上の関数空間の (局所) コンパクト化について考える．まず，X上の実数値連続関数から成る Banach 空間に通常の norm を与えたものを $\mathrm{C}(X)$ とおく．この時，$\mathrm{C}(X)$ は s と同相である ([An$_1$], [Ka])．また，Q は s の自然なコンパクト化であるから，Q は $\mathrm{C}(X)$ のコンパクト化であると言えるが，次の問題を考えたい：

問題 1. Q と同相になる $\mathrm{C}(X)$ の自然なコンパクト化はどんなものか?

Fedorchuk [Fe$_2$] は，Xが孤立点を持たない局所連結コンパクト距離空間のときに，$\mathrm{C}(X)$ の $2^{X\times\mathbb{R}}$での閉包 $\mathrm{C}_{\mathrm{H}}(X)$ が $\mathrm{USCC}(X)$ と一致することを示し，次を証明した：

定理 1 [Fe$_2$]**.** Xが無限の点を含む局所連結コンパクト距離空間ならば，$\mathrm{C}_{\mathrm{H}}(X,\mathbf{I}) \approx Q$ であり，$\mathrm{C}_{\mathrm{H}}(X) \approx Q \setminus \{\mathrm{pt}\}$ である．よって，$\alpha(\mathrm{C}_{\mathrm{H}}(X)) \approx Q$.

ここで$\alpha(\mathrm{C}_{\mathrm{H}}(X))$ は $\mathrm{C}_{\mathrm{H}}(X)$ の Alexandroff の 1 点コンパクト化を表す．更に，彼は次の問題を提起した：

問題 2 [Fe$_2$]**.** Xが無限の点を含む局所連結コンパクト距離空間のとき，次が成立するか?

$$(\alpha(\mathrm{C}_{\mathrm{H}}(X)), \mathrm{C}(X)) \approx (Q, s)$$

上の 2 つの問題にに対する解答を与える．まず，問題 1 に対し，$\mathrm{C}(X)$ の $2^{X\times\overline{\mathbb{R}}}$での閉包$\overline{\mathrm{C}}(X)$ を考えれば良いことがわかった．すなわち，次の結果が得られた：

定理 2 [SU_2]. Xが無限の点を含む局所連結コンパクト距離空間のとき,

$$(\overline{\mathrm{C}}(X), \mathrm{C}(X)) \approx (Q, s).$$

これを適用して問題 2 も肯定的に解決することができる. 上の定理において, Xが孤立点を持たなければ, $\overline{\mathrm{C}}(X) = \mathrm{USCC}(X, \overline{\mathbb{R}})$ となる.

無限次元トポロジーにおいて, コンパクト n-多様体 M上の同相写像群 $\mathrm{H}(M)$ は非常に関心が持たれる関数空間である. その中で次は重要な問題である:

問題 3 (cf. [We]**).** $\mathrm{H}(M)$ は ℓ_2-多様体となるか?

$n = 1$ の場合は [An_3] により, $n = 2$ の場合は [LM]+[Ge]+[To_1] により, それぞれ肯定的に解決されている. また, Mがコンパクト Q-多様体のときも, 同様に解決されている ([Fer], [To_2]). しかし, $\infty > n > 2$ のときは未解決のままである. 一方, $\mathrm{H}(M)$ の $\exp(M^2)$ での閉包$\overline{\mathrm{H}}(M)$ を考えると $\mathrm{H}(M)$ のコンパクト化が得られるが, このとき問題 3 を拡張した問題として (解決済みの $n = 1, 2$ の場合も含めて) 次の問題が考えられる:

問題 4. $(\overline{\mathrm{H}}(M), \mathrm{H}(M))$ は (Q, s)-多様体か?

別の興味深い関数空間として, コンパクト n-多様体 M上のレトラクションから成る空間 $\mathrm{R}(M)$ (孤立点は除かれている) についても研究されている. $n = 1$ と $n = 2$ の場合には, それぞれ [BS] と [Ca] において, Mがコンパクト Q-多様体の場合には, [Ch]+[Sa] において, $\mathrm{R}(M)$ が ℓ_2-多様体であることが証明されている. しかし, $\infty > n > 2$ の場合は未解決である. 問題 4 と同様に $\mathrm{R}(M)$ の $\exp(M^2)$ での閉包$\overline{\mathrm{R}}(M)$ に対し, 次の問題が提起される:

問題 5. $(\overline{\mathrm{R}}(M), \mathrm{R}(M))$ は (Q, s)-多様体か?

上の問題 4 と 5 に取り組み, $n = 1$ の場合について結果を得た:

定理 4 [SU_1]. G が有限グラフならば, $(\overline{\mathrm{H}}(G), \mathrm{H}(G))$ は (Q, s)-多様体である.

定理 5 [Ue_1]. $(\overline{\mathrm{R}}(\mathbf{I}), \mathrm{R}(\mathbf{I})) \approx (Q, s)$.

2. 距離空間 $\mathrm{USCC}_B(X)$ について.

空間 $X=(X,d)$ 距離空間とし, $\mathrm{USCC}_B(X)$ について調べていく.

$\varepsilon>0$ に対し, $E\subset X$ が ε-discrete であるとは, 任意の異なる 2 点 $x,y\in E$ が $d(x,y)\geq\varepsilon$ を満たすときを言う. 次の様に完備距離空間 X に対して, $\mathrm{USCC}_B(X)$ が AR となるための必要十分条件を与えた：

定理 6 [Ue2]. 完備距離空間 (X,d) に対して次は同値である：

(1) $\mathrm{USCC}_B(X)$ は *AR*

(2) $\mathrm{USCC}_B(X)$ は局所弧状連結

(3) $\forall\varepsilon>0$, 2ε-*discrete* な点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset X$ に対し, $D_n=B_d(x_n,\varepsilon)$ を開かつ閉集合の位相和 $D_n=E_n\cup F_n\cup G_n\cup G'_n$ $(x_n\in E_n$ *for* $\forall n)$ で表せば, 数列

$$\alpha_n=\min\{d_H(E_n\cup G_n\cup D_n^C, F_n\cup G_n\cup D_n^C),$$
$$d_H(E_n\cup G'_n\cup D_n^C, F_n\cup G'_n\cup D_n^C)\}$$

は 0 に収束しない.

これにより次が得られる：

系 [Ue2]. X がコンパクトならば, $\mathrm{USCC}_B(X)$ は *AR* である.

また, 定理 2 の逆が示された：

定理 7 [SU4]. $\mathrm{USCC}_B(X,\mathbf{I})\approx Q$ であることと, X は無限集合で, コンパクトでかつ局所連結であることは同値である.

次に, $\mathrm{USCC}_B(X)$ が Hilbert 空間と同相になる場合を調べる. X が一様に局所連結であるとは, 任意の $\varepsilon>0$ に対し, $\delta>0$ が存在して, 2 点 $x,x'\in X$ が $d(x,x')<\delta$ ならば直径が ε より小さい連結集合に含まれるときを言う.

定理 8 [SU3]. X がコンパクトでなく, 一様に局所連結であり, 完備距離空間であるとする. このとき, $\mathrm{USCC}_B(X)$ は可分でない *Hilbert* 空間と同相である. 特に, X が可分のとき, $\mathrm{USCC}_B(X)\approx\ell_2(2^{\mathbf{N}})$.

3. $\mathrm{USCC}_B(X)$ のコンパクト化について.

XはYの稠密な部分空間とする. 自然に等長な埋め込み$e_Y : \mathrm{USC}_B(X) \to \mathrm{USC}_B(Y)$を

$$e_Y(\varphi) = \overline{\varphi}^{Y \times \mathbb{R}}$$

により定める. $Y \setminus X$がYで locally non-separating であるとは, Yの空でない任意の連結開集合Uに対し$\emptyset \neq U \cap X$が連結のときを言う. $Y \setminus X$がYで locally non-separating であるとき,

$$e_Y(\mathrm{USCC}_B(X)) \subset \mathrm{USCC}_B(Y)$$

$$e_Y(\mathrm{USCC}(X, \mathbf{I})) \subset \mathrm{USCC}(Y, \mathbf{I})$$

が成り立ち, 次を得る：

定理 9 [SU4]. $Y \setminus X$がYで *locally non-separating* なら次は同値.

(1) $(\mathrm{USCC}(Y, \mathbf{I}), \mathrm{USCC}(X, \mathbf{I})) \approx (Q, s)$
(2) $(\mathrm{USCC}_B(Y), \mathrm{USCC}_B(X)) \approx (Q \times [0,1), s \times [0,1))$
(3) Yは局所連結でコンパクト、$X \neq Y$、XはYにおいてG_δ -集合.

距離空間$X = (X, d)$が *Property* Sを満たすとは, 任意の$\varepsilon > 0$に対して, Xが直径がεより小さい有限個の連結部分集合により覆われるときを言う. Curtis は巾空間に関する結果として次を証明している：

定理 10 [Cu1]. Xが, $(\exp(\tilde{X}), \exp(X)) \approx (Q, s)$ を満たすコンパクト化$\tilde{X}$を持つことと, Xが連結で, 局所連結で, 完備距離化可能で, *nowhere locally compact* で, *Property* Sを満たすXの位相を変えない距離を持つことは同値である.

これに対応するものとして次の結果が得られる：

定理 11 [SU4]. 距離空間化可能な空間Xが, $(\mathrm{USCC}(\tilde{X}, \mathbf{I}), e_{\tilde{X}}(\mathrm{USCC}(X, \mathbf{I}))) \approx (Q, s)$を満たす距離化可能なコンパクト化$\tilde{X}$を持つことと, Xが完備距離化可能で, コンパクトでなく, *Property* Sを満たすXの位相を変えない距離を持つことは同値である.

4．問題.

定理８と１１により次がそれぞれ成り立つ：

- $\mathrm{USCC}_B\big((0,1)\big) \approx \ell_2$
- $\mathrm{USCC}_B(\mathbb{R}) \approx \ell_2(2^{\mathbb{N}})$

これらからも分かるように $\mathrm{USCC}_B(X)$ は Xの距離 dにも依存する．次において，(X,d) による $\mathrm{USCC}_B(X)$ の分類に関する問題について挙げる．

まず，Xがコンパクトで局所連結のとき $\mathrm{USCC}_B(X) \approx Q \times [0,1)$ であった．では

問. Xがコンパクトだが，局所連結でないとき，$\mathrm{USCC}_B(X)$ はどんな無限次元空間と同相になるか？　例えば，$\mathrm{USCC}_B(X) \approx \Sigma$であるか？

上において，$\Sigma = \{(x_i)_i \in Q \mid \sup_i |x_i| < \infty\}$ である．

問. Xがコンパクトで，局所連結でないとき，$\mathrm{C}(X)$ のコンパクト化としてどの様な空間が考えられるか？

更に，Xがコンパクトでない場合については，

問. いつ，$\mathrm{USCC}_B(X)$ は ℓ_2と同相になるか？

これに関連すると考えられるものとして次が挙げられる：

定理 12 [Cu_2]. $\exp(X) \approx \ell_2$であることと, Xが可分で，連結で，局所連結で，完備距離化可能で, *nowhere locally compact* であることは同値である.

すなわち次が予想される：

問. Xが全有界で，局所連結で，完備距離化可能であるならば，$\mathrm{USCC}_B(X) \approx \ell_2$であるか？

また，$\mathrm{USCC}_B(X)$ が可分にならない場合について，

問. いつ，$\mathrm{USCC}_B(X)$ は可分でない *Hilbert* 空間 $\ell_2(\Gamma)$ と同相になるか？(定理８において "一様に局所連結" 等の条件は弱められないか)

更に，$\mathrm{USCC}_B(X)$ の元である関数の値域は $\mathbb{R}$ であったが，それを normed linear space Eに置き換え，

$$\mathrm{USCC}'_B(X,E) = \{\varphi \in \mathrm{USCC}_B(X) \mid \text{ each } \varphi(x) \text{ is convex }\}$$

と定義したとき,

問. $\mathrm{USCC}'_B(X, E)$ について, $\mathrm{USCC}_B(X)$ の場合と同様の結果が得られるか?

REFERENCES

[An$_1$] R.D. Anderson, *Hilbert space is homeomorphic to the countable infinite product of line*, Bull. Amer. Math. Soc. **72** (1966), 515–519.

[An$_2$] ———, *A characterization of apparent boundaries of the Hilbert cube*, Notices Amer. Math. Soc. **16** (1969), 429.

[An$_3$] ———, *Spaces of homeomorphisms of finite graphs*, unpublished manuscript.

[BS] V.N. Basmanov and A.G. Savchenko, *Hilbert space as the space of retractions of an interval*, Math. Notes **40** (1988), 563–566.

[Ca] R. Cauty, *Structure locate de l'espace des rétractions d'une surface*, Trans. Amer. Math. Soc. **323** (1991), 315–334.

[Ch] T.A. Chapman, *The space of retractions of a compact Hilbert cube manifold is an ANR*, Topology Proc. **2** (1977), 409–430.

[Cu$_1$] D.W. Curtis, *Hyperspaces of noncompact metric spaces*, Compositio Math. **40** (1980), 139–152.

[Cu$_2$] ———, *Hyperspaces homeomorphic to Hilbert space*, Proc. Amer. Math. Soc. **75** (1979), 126–130.

[Fe$_1$] V.V. Fedorchuk, *On certain topological properties of completions of function spaces with respect to Hausdorff uniformity*, Vestnik Moskov. Univ. Ser. I, Mat. Mekh. (1991), 77–80 (Russian); English Transl., Moscow Univ. Math. Bull. **46** (1991), 56–58.

[Fe$_2$] ———, *Completions of spaces of functions on compact spaces with respect to the Hausdorff uniformity*, Trudy Seminara imeni I.G. Petrovskogo **18** (1995), 213–235 (Russian); English transl., J. of Math. Sci. **80** (1996), 2118–2129.

[FK] V.V. Fedorchuk and H.-P.A. Künzi, *Uniformly open mapping and uniform embeddings of function spaces*, Topology Appl. **61** (1995), 61–84.

[Fer] S. Ferry, *The homeomorphism group of a compact Hilbert cube manifold is an ANR*, Ann. Math. **106** (1977), 101–119.

[Ge] R. Geoghegan, *On spaces of homeomorphisms, embeddings and functions, I*, Topology **11** (1972), 159–177.

[Ka] M.I. Kadec, *On topological equivalence of separable Banach spaces*, Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.) **167** (1966), 23–25 (Russian); English transl., Soviet Math. Dokl. **7** (1966), 319–322.

[LM] R. Luke and W.K. Mason, *The space of homeomorphisms on a compact two-manifold is an absolute neighborhood retract*, Trans. Amer. Math. Soc. **164** (1972), 275–285.

[Sa] K. Sakai, *The space of retraction of a compact Q-manifold is an ℓ_2-manifold*, Proc. Amer. Math. Soc. **83** (1981), 421–424.

[SU$_1$] K. Sakai and S. Uehara, *A Q-manifold compactification of the homeomorphism group of a graph*, Bull. Pol. Acad. Sci. **45** (1997), 281–286.

[SU$_2$] ———, *A Hilbert cube compactification of the Banach space of continuous functions*, Topology Appl., in press.

[SU$_3$] ———, *Spaces of upper semi-continuous multi-valued functions on complete metric spaces*, Fund. Math., to appear.

[SU$_4$] ———, *Spaces of upper semi-continuous multi-valued functions on separable metric spaces*, preprint.

[To$_1$] H. Toruńczyk, *Absolute retracts as factors of normed linear spaces*, Fund. Math. **86** (1974), 53–67.

[To$_2$] ———, *Homeomorphism groups of compact Hilbert cube manifolds which are manifolds*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. math., astr. et phyo. **25** (1977), 401–408.

[Ue$_1$] S. Uehara, *A Hilbert cube compactification of the space of retractions of the interval*, Colloq. Math. **78** (1998), 119–122.

[Ue$_2$] ———, *Spaces of upper semi-continuous multi-valued functions which are absolute retracts*, preprint.

[We] J.E. West, *Open Probrems in Infinite-Dimensional Topology; Open Probrems in Topology*, J. van Mill and G.M. Reed (eds.), (1990), North-Holland, New York, 523–597.