数理解析研究所講究録
1110巻 1999年 68-76

Quantum Doubles of Hopf *-Algebras

福岡大学・理・黒瀬秀樹

I. Introduction

Hopf algebra $\mathcal{A}=(\mathcal{A}, m, \delta, \varepsilon, \kappa)$ において、m は product、δ は coproduct、ε は counit、κ は antipode を表わす. Hopf algebra $\mathcal{A}$ が involution * をもち、coproduct δ が *-preserving であるとき、Hopf *-algebra と呼ばれる. Hopf *-algebra $\mathcal{A}$ の dual convolution algebra $\mathcal{A}'$ にはここでは次の involution を考える：

$$<a, \varphi^*>=<\kappa(a)^*, \varphi>, \quad a \in \mathcal{A}, \quad \varphi \in \mathcal{A}'.$$

paired Hopf *-algebras $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ とは、$(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ が Hopf algebras としての pairing であるだけでなく、$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ の involution が上と同様な関係を満たしているときをいう.

あるクラスの Hopf algebra $\mathcal{A}$ は dual convolution algebra $\mathcal{A}'$ 以外に重要な dual object をもつことが知られている. 一つは coquasitriangular というクラスの Hopf algebra $\mathcal{A}$ に対する paired Hopf algebra $\mathcal{U}$ であり、quantum group $\mathcal{A}$ の quantum enveloping algebra に相当する. もう一つは cosemisimple Hopf algebra $\mathcal{A}$ に対する reduced dual $\hat{\mathcal{A}}$ である. $\hat{\mathcal{A}}$ は一般に Hopf algebra ではなく、より広い multiplier Hopf algebra というクラスの objectである. またこれはquantum group $\mathcal{A}$ の dual quantum group に相当する.

paired Hopf algebras $(\mathcal{A}, \mathcal{U})$ あるいは paired multiplier Hopf algebras $(\mathcal{A}, \hat{\mathcal{A}})$ から quantum doubleと呼ばれる新しいHopf algebraあるいはmultiplier Hopf algebraが定義できることが知られている. また、Van Daele等により、paired multiplier Hopf algebras $(\mathcal{A}, \hat{\mathcal{A}})$ からはもう一つ新しい multiplier Hopf algebra で前のものと pairing をなすものが定義できる. この構成方法は quantum double の dual version で、double group construction と呼ばれている.

$\mathcal{A}$ が coquasitriangular Hopf algebra であるとき、paired Hopf algebras $(\mathcal{A}, \mathcal{U})$ に残念ながら double group construction は適用できない. この小文の目的は、coquasitriangular Hopf algebra $\mathcal{A}$ から構成される quantum double $\mathcal{A} \bowtie \mathcal{A}$ がじつは $(\mathcal{A}, \mathcal{U})$ による double group construction の代用物であることを主張することにある. 特に、real coquasitriangular compact Hopf *-algebra に対して、このあたりの事情をすこし詳しく述べる.

また、この小文は Y. Nakagami との共同研究 [KY2], A. Van Daele, Y. Zhang との共同研究 [KVZ] に一部依っている.

II-1. Coquasitriangular Hopf Algebras

定義. (c.f. [M], [KS]).
Hopf algebra $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, m, \delta, \varepsilon, \kappa)$ が coquasitriangular (CQT) であるとは，次の (o), (i), (ii) を満たす $\mathcal{A}$ 上の bilinear form s が存在するときを言う.

(o) $\exists$ inverse s^{-1} of s in the convolution algebra $\mathcal{L}(\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}, \mathbf{C})$

(i) $s(a a', b) = s(a \otimes a', \delta(b))$
$s(a , b b') = s(\delta(a) , b' \otimes b)$
(s は $\mathcal{A}$ とそれ自身の間の skew pairing)

(ii)[1] $\Sigma_{(a)(b)} s(a_{(2)}, b_{(2)}) b_{(1)} a_{(1)} = \Sigma_{(a)(b)} s(a_{(1)}, b_{(1)}) a_{(2)} b_{(2)}$.
(quasicommutativity)

CQT Hopf *-algebra $(\mathcal{A}, s)$ が real (resp. anti-real) であるとは、skew pairing s が

$$\overline{s(a^* , b^*)} = s(b, a) \quad (\text{resp. } \overline{s(a^* , b^*)} = s^{-1}(a, b))$$

が満たすときをいう.

標準的な Yang-Baxter 行列 R_q ($q \in C - \{0\}$) から、 FRT-formalim (c.f. [RTF]) を用いて構成される Hopf algebra は coquasitriangular (CQT) である. また、q : real のとき $(\mathcal{A}, s)$ が real、さらに $|q| = 1$ のとき $(\mathcal{A}, s)$ が anti-real となっている.

CQT Hopf algebra $(\mathcal{A}, s)$ に対して、

$i \,;\, a \in \mathcal{A} \longrightarrow s(a, \cdot\,) \in \mathcal{A}'$,
$j \,;\, a \in \mathcal{A} \longrightarrow s^{-1}(\,\cdot\,, a) \in \mathcal{A}'$,
$\mathcal{U}$; the subalgebra of $\mathcal{A}'$ generated by $i(\mathcal{A})$, $j(\mathcal{A})$

とすると,

[1] Sweedler の記号 $\delta(a) = \Sigma_{(a)} a_{(1)} \otimes a_{(2)}$ を使っている.

$\mathcal{U}$ は Hopf algebra paired with $\mathcal{A}$.
i, j ; $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{U}^{cop}$ は Hopf algebra homomorphisms.

さらに $\mathcal{A}$ が real or anti-real CQT Hopf *-algebra ならば, $\mathcal{U}$ は Hopf *-algebra paired with $\mathcal{A}$, また i と j は Hopf *-algebra homomorphism となる.
$\mathcal{A}$ を quantum Lie group と考えるとき、 $\mathcal{U}$ は quantum enveloping algebra に相当している.

II-2. Quantum Doubles of Coquasitriangular Hopf Algebras

CQT Hopf algebra ($\mathcal{A}$, s) に対して, 代数的テンソル $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ に次のように Hopf algebra structure を定義することができる：

product $\quad (a \otimes b)(c \otimes d) = \Sigma_{(b)(c)}\, s^{-1}(b_{(1)}, c_{(1)})\, s(b_{(3)}, c_{(3)})\, a\, c_{(2)} \otimes b_{(2)}\, d$,
unit $\quad 1 \otimes 1$,
coproduct $\quad \delta = \sigma_{23}(\delta_{\mathcal{A}} \otimes \delta_{\mathcal{B}})$ $\qquad$ (σ は flip を表わす)
counit $\quad \varepsilon = \varepsilon_{\mathcal{A}} \otimes \varepsilon_{\mathcal{B}}$
antipode $\quad \kappa(a \otimes b) = \Sigma_{(a)(b)}\, s(b_{(1)}, a_{(1)})\, s^{-1}(b_{(3)}, a_{(3)})\, \kappa(a_{(2)}) \otimes \kappa(b_{(2)})$

coalgebra structure は tensor coalgebra $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ としてのそれであるが、algebra structure は s を用いて twist されていることに注意. この Hopf algebra をとくに $\mathcal{A} \bowtie \mathcal{A}$ とかく.
($\mathcal{A}$, s) が real または anti-real CQT Hopf *-algebra であれば, $\mathcal{A} \bowtie \mathcal{A}$ に involution;

$(a \otimes b)^* = b^* \otimes a^*$ $\qquad$ (for real s)
$(a \otimes b)^* = \Sigma_{(a)(b)}\, \overline{s(b_{(1)}, a_{(1)})}\ \overline{s^{-1}(b_{(3)}, a_{(3)})}\ a_{(2)}^* \otimes b_{(2)}^*$ $\qquad$ (for anti-real s)

を定義でき $\mathcal{A} \bowtie \mathcal{A}$ は Hopf *-algebra となる.

定理. (K-Nakagami) (real or anti-real) CQT Hopf (*-)algebra $\mathcal{A}$ に対して,
$\exists$ unital (*)-algebra homomorphism $f : \mathcal{A} \bowtie \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{U}$.

さらに $\mathcal{A}$ が factorizable であるとき、またそのときに限り、上の f は injective となる.

ここで CQT Hopf algebra ($\mathcal{A}$, s) が factorizable であるとは、quantum (inverse) Killing form $(s\circ\sigma)\,s \in (\mathcal{A}\otimes\mathcal{A})'$ (σ は flip) が nondegenerate であるときをいう.

Real CQT Hopf algebra $\mathcal{A}$ が compact で compact quantum Lie group (の関数環) に相当しているとき、上の quantum double $\mathcal{A}\bowtie\mathcal{A}$ は $\mathcal{A}$ の複素化にあたる. さらに $\mathcal{A}$ が factorizable であるとき、上の定理は複素化 $\mathcal{A}\bowtie\mathcal{A}$ の分解 $\mathcal{A}\otimes\mathcal{U}$ を与える. これは岩沢分解の一般化に相当している. Podles-Woronowicz は逆に岩沢分解からスタートし、compact quantum Lie group $SU_q(2)$ の複素化として quantum Lorenz group を定義した. 後に Podles 等がこの quantum Lorenz group が $SU_q(2)\bowtie SU_q(2)$ であることを発見した.

CQT Hopf algebra ($\mathcal{A}$, s) から得られる skew paired Hopf algebras ($\mathcal{U}$, $\mathcal{A}^{op}$), ($\mathcal{U}^{cop}$, $\mathcal{A}$), ($\mathcal{A}$, $\mathcal{U}^{op}$), ($\mathcal{A}^{cop}$, $\mathcal{U}$) [2]のそれぞれに対して、上と同様にして、Quantum Double $\mathcal{U}\bowtie\mathcal{A}^{op}$, $\mathcal{U}^{cop}\bowtie\mathcal{A}$, $\mathcal{A}\bowtie\mathcal{U}^{op}$, $\mathcal{A}^{cop}\bowtie\mathcal{U}$ が構成できる[3]. さらに ($\mathcal{A}$, s) が real または anti-real CQT Hopf *-algebra であれば, これらは Hopf *-algebra となる.

---

[2] ここに、 $\mathcal{A}^{op}$ は $\mathcal{A}$ の積を、 $\mathcal{A}^{cop}$ は $\mathcal{A}$ の余積を flip して得られる Hopf algebra を表わす.

[3] Tensor coalgebra structure と twist された algebra structure を考える. 積の twist に関しては、例えば、 $x\in\mathcal{A}$, $\varphi\in\mathcal{A}'$ に対して、

$$S(x\otimes\varphi)=\Sigma_{(x)}\ \ \varphi(x_{(1)}\cdot\kappa(x_{(3)}))\otimes x_{(2)}\in\ \mathcal{A}'\otimes\mathcal{A},$$

$$\boldsymbol{m}\equiv(m_{\mathcal{A}'}\otimes m_{\mathcal{A}^{op}})\circ S_{23}\,;\,(\mathcal{A}'\otimes\mathcal{A}^{op})\otimes(\mathcal{A}'\otimes\mathcal{A}^{op})\longrightarrow\mathcal{A}'\otimes\mathcal{A}^{op}.$$

とすると、 $\boldsymbol{m}$ は $\mathcal{A}'\otimes\mathcal{A}^{op}$ の associative な積を定義する. この積をもつ algebra $\mathcal{A}'\otimes\mathcal{A}^{op}$ は $\mathcal{A}'\bowtie\mathcal{A}^{op}$ と書かれる. $\mathcal{U}\bowtie\mathcal{A}^{op}$ は $\mathcal{A}'\bowtie\mathcal{A}^{op}$ の subalgebra である.

上の定理によれば、 Hopf(*-)algebra $f(\mathcal{A}\bowtie\mathcal{A})$ の algebra(*-)structure は tensor algebra $\mathcal{A}\otimes\mathcal{U}^{\mathrm{cop}}$ の subalgebra としてのそれであるが、coalgebra structure は一般に $\mathcal{A}\otimes\mathcal{U}^{\mathrm{cop}}$ の tensor coalgebra structure を twist したものである. 次のことが証明できる：

定理. f の値域 $f(\mathcal{A}\bowtie\mathcal{A})$ と Quantum Double $\mathcal{U}\bowtie\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ は Hopf algebra としての pairing をなす. この pairing は $\mathcal{A}$ が factorizable であるとき、またそのときに限り、nondegenerate である.

III-1. Cosemisimple Hopf Algebras

定義. Hopf algebra $\mathcal{A}$ に関する次の３つの条件

(i) $\mathcal{A}$ は cosimple subcoalgebras の直和.

(ii) $\mathcal{A}$ の任意の corepresentation は完全可約.

(iii) $\exists h$: left invariant functional[4] on $\mathcal{A}$ s.t. $h(1)=1$.

は互いに同値であり、これが満たされるとき $\mathcal{A}$ は cosemisimple であると言う.

cosemisimple Hopf algebra $\mathcal{A}$ に対して、

$$\hat{\mathcal{A}} = \{\,\varphi_a \equiv h(\cdot\, a);\ \ a\in\mathcal{A}\ \}\,(=\{\,h(a\,\cdot);\ \ a\in\mathcal{A}\ \})\subset\mathcal{A}',$$

とおき、これを以後 $\mathcal{A}$ の reduced dual と呼ぶ. $\hat{\mathcal{A}}$ は semisimple algebra であり、dual convolution algebra $\mathcal{A}'$ の ideal であることがわかる.

定理. cosemisimple Hopf algebra $\mathcal{A}$ の reduced dual $\hat{\mathcal{A}}$ には $\mathcal{A}$ と dual pair になるよう (regular) multiplier Hopf algebra の構造が入る[5].

---

[4] a functional h on a Hopf *-algebra $\mathcal{A}$ が left invariant であるとは

$$(\iota\otimes h)(\delta(a)) = h(a)1,\quad a\in\mathcal{A}$$

のときをいう.

[5] multiplier Hopf algebra $\hat{\mathcal{A}}$ は一般に nonunital で、 coproduct は multiplier algebra $M(\hat{\mathcal{A}}\otimes\hat{\mathcal{A}})$ への homomorphism である. multiplier Hopf algebras の詳細

$a \in \mathcal{A}$, $\varphi \in \hat{\mathcal{A}}$ に対して、

$$\pi(a)\, b = a\, b\,, \qquad \hat{\pi}(\varphi)\, b = (\, \varphi \circ \kappa^{-1} \otimes \iota\,)\, \delta(b), \qquad b \in \mathcal{A}$$

で $\pi(a)$, $\hat{\pi}(\varphi) \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$ を定義すると、π, $\hat{\pi}$ はそれぞれ $\mathcal{A}, \hat{\mathcal{A}}$ の $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ 上への faithfull な表現. $\hat{\pi}$ はさらに multiplier algebra $M(\hat{\mathcal{A}})$ の表現に拡大できる. これら π, $\hat{\pi}$ を用いて、

$$\mathcal{A}, \hat{\mathcal{A}} \subset \mathcal{L}(\mathcal{A}),\ \mathcal{A} \otimes \hat{\mathcal{A}},\ \hat{\mathcal{A}} \otimes \hat{\mathcal{A}},\ M(\hat{\mathcal{A}} \otimes \hat{\mathcal{A}}) \subset \mathcal{L}(\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}),$$

等々と考え、以後 π, $\hat{\pi}$ を省略する.

Kac-Takesaki operator: $W \in \mathcal{L}(\mathcal{A} \otimes \mathcal{A})$ を

$$W \ :\ a \otimes b \longrightarrow \delta(b)(\, a \otimes 1\,)$$

で定義すると W は invertible で次が成立.

- $W_{12} W_{23} = W_{23} W_{13} W_{12}$ (Pentagonal equation.)
- $W(\, 1 \otimes a\,)\, W^{-1} = \delta(a)$
- $\hat{W}\ (\, 1 \otimes \varphi)\, \hat{W}^{-1} = \hat{\delta}^{\,\mathrm{op}}(\varphi), \qquad W^{-1}\,(\, \varphi \otimes 1\,)\, W = \hat{\delta}\,(\varphi)$

ただし, $\hat{W} = \sigma \circ W^{-1} \circ \sigma$ である.

III-2. Cosemisimple Hopf Algebras に対する Double Group Construction と Quantum Doubles

定理. (Double group construction) tensor algebra $\mathcal{A} \otimes \hat{\mathcal{A}}^{\mathrm{cop}}$ の積を $\boldsymbol{m}$ とかき、

については、[V] 参照.

$$\delta \equiv \mathrm{Ad}\hat{W}_{23}\circ(\delta_{13}\otimes\hat{\delta}^{\mathrm{op}}{}_{24}) \quad ; \mathcal{A}\otimes\hat{\mathcal{A}} \longrightarrow M(\mathcal{A}\otimes\hat{\mathcal{A}}\otimes\mathcal{A}\otimes\hat{\mathcal{A}})$$
$$\varepsilon \equiv \varepsilon_{\mathcal{A}}\otimes\varepsilon_{\hat{\mathcal{A}}^{\mathrm{cop}}}$$
$$\kappa \equiv (\kappa_{\mathcal{A}}\otimes\kappa_{\hat{\mathcal{A}}^{\mathrm{cop}}})\circ\mathrm{Ad}W^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{A}\otimes\hat{\mathcal{A}})$$

と定義すると、$(\mathcal{A}\otimes\hat{\mathcal{A}}^{\mathrm{cop}}, m, \delta, \kappa, \varepsilon)$ は (regular) multiplier Hopf algebra となる. これを $\mathcal{A} \bowtie \hat{\mathcal{A}}^{\mathrm{cop}}$ とかく.

ここに coproduct δ は

$$\delta(a\otimes\varphi) = \mathrm{Ad}(\hat{W}_{23}W_{13}\hat{W}_{24})(1\otimes1\otimes a\otimes\varphi)$$

ともかけ、その coassociativity は Kac-Takesaki operator $W, \hat{W}$ の Pentagonal equation に依っている.

一方、p4 の脚注と同様にして quantum bouble $\hat{\mathcal{A}} \bowtie \mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ が構成でき、これは $\mathcal{A}' \bowtie \mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ の ideal である. これに関して、

定理. algebra $\hat{\mathcal{A}} \bowtie \mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ はtensor multiplier coalgebra structureのもとで、(regular) multiplier Hopf algebra となる. さらに $\mathcal{A} \bowtie \hat{\mathcal{A}}^{\mathrm{cop}}$, $\hat{\mathcal{A}} \bowtie \mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ は multiplier Hopf algebra としての pairing をなす.

IV. Compact Hopf *-Algebra の Quantum Double

Hopf *-algebra $\mathcal{A}$ 上に non-zero, positive, left invariant functional h があるとき、$\mathcal{A}$ は compact であるという. このとき h は unique (up to scalar), faithfull, bothsided invariant である. これは Haar measure と呼ばれ、以後は normalize されているものとする.
compact Hopf *-algebra は cosemisimple である.

$\mathcal{A}$ を compact Hopf *-algebra, h を Haar measure, $(\pi, \mathcal{H})$ を $\mathcal{A}$ の h に関する GNS representation とする．これは compact quantum group $\mathcal{A}$ の正則表現に相当．Non-trivial な事実であるが、π は 有界な表現であることがわかる．

$$\hat{\pi}(\phi)a \equiv (\phi \circ \kappa^{-1} \otimes \iota)\delta(a), \quad \phi \in \mathcal{A}', \quad a \in \mathcal{A}.$$

と置くと、$\hat{\pi}$ は Hilbert space $\mathcal{H}$ における dense subspace $\mathcal{A}$ を定義域とする $\mathcal{A}'$ の非有界表現 (*-representation of $\mathcal{A}'$ as a O*-algebra) となる．しかし、$\hat{\pi}$ の reduced dual $\hat{\mathcal{A}}$ への制限は有界となり、次のような von Neumann algebras を考える：

$$M \equiv \pi(\mathcal{A})'' \qquad \hat{M} \equiv \hat{\pi}(\hat{\mathcal{A}})''.$$

定理. $\mathcal{A}$ を compact な real coquasitriangular Hopf *-algebra とし、$\mathcal{U}$ を § II-1 で定義された Hopf *-algebra paired with a compact Hopf *-algebra $\mathcal{A}$ とする．このとき、$\mathcal{A}$ が factorizable であることと

$$\{\{(\pi \otimes \hat{\pi})(f(\mathcal{A} \bowtie \mathcal{A}))\}'_w\}' = M \bar{\otimes} \hat{M} \left(= \{(\pi \otimes \hat{\pi})(\mathcal{A} \mathbin{\bowtie} \hat{\mathcal{A}}^{\mathrm{cop}})\}'' \right)$$

が成立することは同等である[6].

$\mathcal{A}$ が factorizable であるとき、この定理よりもっと強く、余積の構造、さらには Woronowicz algebra という代数構造まで込めて、定理の等式が成立することがわかる． これは quantum double $\mathcal{A} \bowtie \mathcal{A}$ が double group construction $\mathcal{A} \mathbin{\bowtie} \hat{\mathcal{A}}^{\mathrm{cop}}$ の代替物であることを示している．

---

[6] ここで $\{(\pi \otimes \hat{\pi})(f(\mathcal{A} \bowtie \mathcal{A}))\}'_w$ は非有界作用素環 $(\pi \otimes \hat{\pi})(f(\mathcal{A} \bowtie \mathcal{A}))$ に対する weak commutant を表わす．

References

[DV] B. Drabant, A. Van Daele, Pairing and the quantum double of multiplier Hopf algebras, preprintin 1996.

[KN1] H.Kurose, Y. Nakagami, Compact Hopf *-algebras, quantum enveloping algebrasand Dual Woronowiczalgebras, Int. J. Math.8(1997), 959-997.

[KN2] H.Kurose, Y. Nakagami, in preparation.

[KS] A. Klimyk, K. Schmudtgen, Quantum Groups and Their Representations, Texts and Monographs in Physics, Springer, 1997.

[KVZ] H.Kurose, A.Van Daele, Y. Zhang, Corepresentation theory of Multiplier Hopf algebrasII, preprint(1998), to appearin Int.J. Math.

[M] S. Majid, Foundations of Quantum Group Theory, Cambridge U. P., 1995.

[P] P. Podles, P., Complex quantum groups and their real representations, Publ. RIMS 28(1992), 709-745.

[PW] P. Podles, S.L. Woronowicz, Quantum deformation of Lorentz group, Comm. Math. Phys., 130(1990), 381-431.

[RTF] Reshetikhin, n.yu., L.A. Takhtadzhyan, L.D. Faddeev, Quantization of Lie groups and Lie algebra, Leningrard Math. J. 1 (1990), 193-225.

[V] A. Van Daele, An algebraic framework for group duality, preprint, Jan. 1996.