数理解析研究所講究録
1110巻 1999年 64-67

Extension of automorphisms of a subfactor to the symmetric enveloping algebra

増田 俊彦
(MASUDA Toshihiko)
高知大学理学部数理情報学科

1 序

表題の symmetric enveloping algebra とは与えられた subfactor から新しい subfactor を作る方法の一つであるが, 与えられた II_1 型 subfactor $N \subset M$ から新しい subfactor を作る方法としては次にあげる4種類の方法が知られている.

1番目は central sequence subfactor $M' \cap N^{\omega} \subset M_{\omega}$, ここで ω は自然数の上の超フィルターである. 2番目は Ocneanu の asymptotic inclusion $M \vee M' \cap M_{\infty} \subset M_{\infty}$ である. 3番目は表題にもある Popa の symmetric enveloping algebra $M \vee M^{\mathrm{opp}} \subset M \underset{e_N}{\boxtimes} M^{\mathrm{opp}}$ である. 4番目は Longo-Rehren inclusion である. 実際にこれらは違う目的で考えられた物ではあるが, 良い条件の下ではこれらは同型になったり, 同じ paragroup(又は standard invariant) を持つ事が知られている. この報告では特に central sequence subfactor と symmetric enveloping algebra の類似に着目して, 河東が [1] で行った自己同型の解析の類似を如何に symmetric enveloping algebra 上で行うかを解説したい. この報告の内容は主に [4], [5] の内容に基づいている.

2 Longo-Rehren 構成法の一般化と symmetric enveloping algebra

序では新しい subfactor を構成する方法として, Longo-Rehren inclusion を挙げたが, Longo-Rehren の構成方法は最初の subfactor が深さ有限の場合にしか通用しない. そこで, これを一般の subfactor に適用できる様にする必要がある.

Δ を $N \subset M$ から生じる M-M bimodule のシステムとする. M-M bimodule ${}_M Z_{iM}$ に対して, Z_i° をこれから自然に得られる M^{opp}-M^{opp} bimodule とし, $B_i := Z_i \otimes Z_i^{\circ}$ とするとこれは $A := M \otimes M^{\mathrm{opp}}$ bimodule となる. $\{V_{i,j,k}^{e}\}_{e=1}^{N_{ij}^{k}} \subset \mathrm{Hom}\,({}_M Z_i \otimes_M Z_{jM}, {}_M Z_{kM})$ を正

規直交基底とし, $\tilde{V}_{i,j,k}$ を次の様に定義する.

$$\tilde{V}_{i,j,k} := \sqrt{\frac{d(i)d(j)}{d(k)}} \sum_e V^e_{i,j,k} \otimes JV^e_{i,j,k} J^{-1}.$$

すると J が複素線型写像なので, これは基底の取り方によらずに定義される.

ここで ${}_AX_A := \bigoplus_{i\in\Delta} {}_AB_{iA}$ と A-A bimodule を定義する. ここで $\xi \in B_i^{\mathrm{bdd}}$ に対し, $\lambda^l_{i,\xi} \in B(X)$ を次の様に定義する.

$$\lambda^l_{i,\xi}(\bigoplus_j \eta_j) := \bigoplus_k \sum_j \tilde{V}_{i,j,k}(\xi \otimes_M \eta_j).$$

B を $\lambda^l_{i,\xi}$ で生成される von Neumann 環とすると, $A \subset B$ をえる.

ここで symmetric enveloping algebra の構成を簡単に復習しておく. 詳細は [6], [7] を参照されたい.

$C^*(M, e_N, M') \subset B(L^2(M))$ を M, M^{opp}, Jones projection e_N で生成される C^* 環とする. するとこの時この C^* 環上に一意的に tracial state が存在する事が示される. ここでこの tracial state に関して GNS 構成を行って, σ 弱位相で閉包をとった物を $M \underset{e_N}{\boxtimes} M^{\mathrm{opp}}$ とかく.

この時次の定理が示される。

定理 2.1 ([4]) $A \subset B \cong M \vee M^{\mathrm{opp}} \subset M \underset{e_N}{\boxtimes} M^{\mathrm{opp}}$.

3 自己同型の拡張

この節では, 前節の結果を使って, subfactor の自己同型 α から symmetric enveloping algebra 上の自己同型 $\alpha \boxtimes \alpha^{\mathrm{opp}}$ と $\alpha \boxtimes id$ を構成する.

まず自己同型 $\alpha \in \mathrm{Aut}\,(M, N)$ をとってくる. すると, M-M bimodule ${}_MZ_{iM} \in \Delta$ に対して, ${}_MZ_{iM} \cong {}_{M\alpha}Z_{i'\alpha M}$ となる i' がある. この同型を与えるユニタリ作用素を $U_{i,\alpha}$ とおくとこのユニタリ自体はスカラー倍の任意性があるが, 上の $\tilde{V}_{i,j,k}$ の定義と同様 $\tilde{U}_{i,\alpha} := U_{i,\alpha} \otimes JU_{i,\alpha}J^{-1}$ を考えるとこれはきちんと定義されている. そこで $U_\alpha := \bigoplus_i \tilde{U}_{i,\alpha}$ を考えると $\mathrm{Ad}\, U_\alpha(\lambda^l_{i,\xi}) = \lambda_{i',\tilde{U}_{i,\alpha}\xi}$ がわかるので, $\mathrm{Ad}\, U_\alpha \in \mathrm{Aut}\,(B, A)$ となっている事がわかり, さらに A 上では $\alpha \otimes \alpha^{\mathrm{opp}}$ と一致している事もわかる. そこで $\alpha \boxtimes \alpha^{\mathrm{opp}} := \mathrm{Ad}\, U_\alpha$ とおく.

ここで α が強外部的でないと仮定する. すると長田-幸崎による強外部的でない自己同型の特徴付けによって, これは ${}_{M\alpha^{-1}}M_M \in \Delta$ である事と同値なので, 次がすぐわかる.

命題 3.1 α が強外部的でない事と $\mathrm{Ad}\, U_\alpha$ が B の内部自己同型になる事は同値である. この時 $\alpha \boxtimes \alpha^{\mathrm{opp}} = \mathrm{Ad}\, \lambda_{\alpha,\hat{1}}$ が成り立つ.

ここまでは $\alpha \otimes \alpha^{\mathrm{opp}}$ の B への拡張を考えたが次に $\alpha \otimes id$ の拡張を考えたい. しかしこの拡張を考えるには α が自明な Loi 不変量を持っている事を仮定する必要がある. この場合に自己同型の拡張を考える上でのキーポイントとなるのは次の定理である.

定理 3.2 α を自明な Loi 不変量を持つ自己同型とすると次の様なユニタリ作用素 $\mathcal{E}_{i,\alpha}$ が存在する.
(1) $\mathcal{E}_{i,\alpha} \in \mathrm{Hom}\,({}_M Z_{iM}, {}_{M\alpha}Z_{i\alpha M})$.
(2) 任意の $T \in \mathrm{Hom}\,({}_M Z_i \otimes_M Z_{jM}, {}_M Z_{kM})$ について

$$\mathcal{E}_{k,\alpha} T = T(\mathcal{E}_{i,\alpha} \otimes_M \mathcal{E}_{j,\alpha})$$

が成り立つ.

この定理を使うと $\tilde{\mathcal{E}}_{i,\alpha} := \mathcal{E}_{i,\alpha} \otimes id \in B(B_i)$ と置いた時, 前節で構成した $\tilde{V}_{i,j,k}$ について

$$\tilde{\mathcal{E}}_{k,\alpha} \tilde{V}_{i,j,k} = \tilde{V}_{i,j,k}(\tilde{\mathcal{E}}_{i.\alpha} \otimes_A \tilde{\mathcal{E}}_{j,\alpha})$$

が成立するので, これを使うと $\tilde{\mathcal{E}}_\alpha := \bigoplus_i \tilde{\mathcal{E}}_{i,\alpha}$ と置いた時 $\mathrm{Ad}\,\tilde{\mathcal{E}}_\alpha(\lambda^l_{i,\xi}) = \lambda_{i,\tilde{\mathcal{E}}_{i,\alpha}\xi}$ がわかる. よって前と同様 $\mathrm{Ad}\,\tilde{\mathcal{E}}_\alpha \in \mathrm{Aut}\,(B, A)$ となっており, A への制限は $\alpha \otimes id$ となっている. この自己同型を $\alpha \boxtimes id$ と書く.

ここで, 上で考えた 2 種類の自己同型の拡張の関係をみてみる. そこで, α を自明な Loi 不変量をもつ自己同型をし, さらにある $p > 0$ について $\beta := \alpha^p$ が強外部的でないとする. すると上で見た様に $\beta \boxtimes \beta^{\mathrm{opp}} = \lambda_\beta$ と内部自己同型となる. ここで, $\alpha \boxtimes id(\lambda_\beta)$ を考えるとこれはあるスカラー c があって $c\lambda_\beta$ となる事がわかる.

命題 3.3 $c = \gamma_h(\alpha)$ が成り立つ. ただし $\gamma_h(\alpha)$ は higher obstruction である. (Higher obstruction については [2, Section 2] を参照の事.)

序にも述べたが, この話の一つの動機は [1] の議論を symmetric enveloping algebra 上でどの様にするか, であったが, ここで今までの議論と [1] の議論を比較してみたい. そのために [1] における議論を簡単に復習してみる.

自己同型 $\alpha \in \mathrm{Cnt}\,(M.N) \cap \overline{\mathrm{Int}}\,(M, N)$ をとってくると, まずユニタリの列 $\{u_n\} \subset U(N)$ が $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Ad}\, u_n = \alpha$ ととれる. そこで $U := (u_n) \in N^\omega$ とおくと $\mathrm{Ad}\, U$ は central sequence subfactor $M' \cap N^\omega \subset M' \cap M^\omega$ 上の自己同型となる. ここで α が centrally trivial という仮定を使うと, $U^*\alpha(U) \in \mathbf{C}$ となる事が示される. この数を $\kappa(\alpha)$ とかき相対 Jones κ 不変量と呼ぶ.

すると下の様な対応がある事がわかる.

$M' \cap N^\omega \subset M_\omega$	$\alpha \in \mathrm{Cnt}\,(M, N)$	$\alpha \in \overline{\mathrm{Int}}\,(M, N)$	$U = (u_n)$
$M \vee M^{\mathrm{opp}} \subset M \boxtimes M^{\mathrm{opp}}$	α が強外部的でない	$\alpha \in \mathrm{Ker}\,(\Phi)$	$\tilde{\mathcal{E}}_\alpha$
	$U^*\alpha(U) = \kappa(\alpha)$		
	$\alpha \boxtimes id(\lambda_\alpha) = \gamma_h(\lambda_\alpha)$		

最後に subfactor 理論における orbifold 構成法との関係を述べる. 今 α を強外部的でなく自明な Loi 不変量を持つ自己同型で周期が n とする. そこで同時接合積 $N \rtimes_\alpha \mathbf{Z}_n \subset M \rtimes_\alpha \mathbf{Z}_n$ を考える. これからできる symmetric enveloping algebra と元の subfactor からくる symmetric enveloping algebra を比較したい. そこで $A \subset B$ を $N \subset M$ から得られる

symmetric enveloping algebra とし, $\tilde{A} := A \vee \{\lambda_\alpha\}$ と置くと, これは $A \rtimes_{\alpha\otimes\alpha^{\mathrm{opp}}} \mathbf{Z_n}$ と同型である. 一方で今 $\tilde{A} \subset B$ 上には $\alpha \boxtimes id$ で与えられる $\mathbf{Z}_n$ 作用があるのでこれで同時接合積をとる. ここで $\tilde{A} \rtimes_{\alpha\boxtimes id} \mathbf{Z}_n$ は 2 次コサイクルで捻った接合積となる. ここで l を $\gamma_h(\alpha)^l = 1$ が成り立つ最小の正の整数として $B \rtimes_{\alpha\boxtimes id} \mathbf{Z}_n$ 上の自己同型 β を $\beta = \widehat{\alpha \boxtimes id}^{\frac{n}{l}}$ と定義する. すると β は $\mathbf{Z}_l$ の作用である. ここで u, v をそれぞれ $\alpha \boxtimes id$, β に関する implementing unitary とする. そして $\tilde{u} := \lambda_\alpha^* uv \in B \rtimes_\beta \mathbf{Z}_l$ とおくと次の定理が成り立つ.

定理 3.4 Orbifold subfactor $N \rtimes_\alpha \mathbf{Z}_n \subset M \rtimes_\alpha \mathbf{Z}_n$ から生じる symmetric enveloping algebra は

$$(M \vee \{u\}) \vee (M^{\mathrm{opp}} \vee \{\tilde{u}\}) \subset B \rtimes_\beta \mathbf{Z}_l$$

と同型である.

この定理は Popa による symmetric enveloping algebra の特徴付けを調べる事により証明される.

参考文献

[1] Kawahigashi, Y., *Orbifold subfactors, central sequences and the relative Jones invariant* κ, Inter. Math. Res. Not. 129–140, (1995).

[2] Kawahigashi, Y., *Classification of approximately inner automorphisms of subfactors*, Math. Annal. **308** (1997), 425–438.

[3] Longo, R., and Rehren, K.-H., *Nets of subfactors*, Rev. Math. **7** (1995), 567–597.

[4] Masuda, T., *Generalization of Longo-Rehren construction to subfactors of infinite depth and amenability of fusion rule algebras*, preprint, (1998).

[5] Masuda, T., *Extension of automorphisms of a subfactor to the symmetric enveloping algebra*, preprint (1998).

[6] Popa, S., *Symmetric enveloping algebras, amenability and AFD properties for subfactors*, Math. Res. Lett. **1** (1994), 409–425.

[7] Popa, S., *Some properties of the symmetric enveloping algebra of a subfactor with applications to amenability and property T*, preprint, (1997).