数理解析研究所講究録
1113 巻 1999 年 85-94

Geometry of timelike surfaces

金沢大学大学院自然科学研究科　藤岡 敦　(Atsushi Fujioka)
福岡大学理学部応用数学科　井ノ口 順一　(Jun-ichi Inoguchi)

以下に述べる内容についてのより詳しいことは現在準備中の論文 [15], [16] において公表する予定である.

ここでは, $\mathfrak{M}^3_\nu(c)$ を符号数 $(\nu, 3-\nu)$ $(\nu = 1, 2)$ をもつ, 定曲率 c $(c = 0, \pm 1)$ の 3 次元空間形とし, $\mathfrak{M}^3_\nu(c)$ 内の向き付け可能な時間的曲面が, しかるべき幾何学的な性質を保ったまま変形できるか否か, といった問題について考える.

$a = (a_0, a_1, a_2, a_3), b = (b_0, b_1, b_2, b_3) \in \mathbf{R}^4$ に対し,

$$\langle a, b\rangle_{\nu,0} = -\sum_{i=1}^{\nu} a_i b_i + \sum_{i=\nu+1}^{3} a_i b_i,$$

$$\langle a, b\rangle_{\nu,1} = -\sum_{i=0}^{\nu-1} a_i b_i + \sum_{i=\nu}^{3} a_i b_i,$$

$$\langle a, b\rangle_{\nu,-1} = -\sum_{i=0}^{\nu} a_i b_i + \sum_{i=\nu+1}^{3} a_i b_i$$

とおき,

$$\mathfrak{M}^3_\nu(c) = \begin{cases} (\{p \in \mathbf{R}^4;\ p_0 = 0\}, \langle\ ,\ \rangle_{\nu,0}) & c = 0, \\ \{p \in \mathbf{R}^4;\ \langle p, p\rangle_{\nu,c} = c\} & c = \pm 1 \end{cases}$$

により $\mathfrak{M}^3_\nu(c)$ を具体的に表しておく.

$\mathfrak{M}^3_\nu(c)$ 内の向き付け可能な時間的曲面は, ローレンツ面 M から $\mathfrak{M}^3_\nu(c)$ への共形的はめ込みとして実現される (ローレンツ面については [26] を見

よ). (x,y) を M の null coordinate とすると, M の誘導計量は M 上の局所的な関数 u を用いて, $e^u dxdy$ と表される. また, N を F の単位法線ベクトルとすると, F の平均曲率 H, ホップ微分 Qdx^2, Rdy^2 は,

$$\langle F_{xy}, N\rangle_{\nu,c} = \frac{1}{2}He^u, \quad \langle F_{xx}, N\rangle_{\nu,c} = Q, \quad \langle F_{yy}, N\rangle_{\nu,c} = R$$

により定められる. このとき,

ガウスの方程式:

$$\begin{cases} u_{xy} + \frac{1}{2}(H^2 + c)e^u - 2QRe^{-u} = 0 & \nu = 1, \\ u_{xy} - \frac{1}{2}(H^2 - c)e^u + 2QRe^{-u} = 0 & \nu = 2, \end{cases}$$

コダッチの方程式:

$$\begin{cases} Q_y = \frac{1}{2}e^u H_x, \\ R_x = \frac{1}{2}e^u H_y \end{cases}$$

が成り立つ (添字は偏微分を表す). 逆に, ガウス・コダッチの方程式をみたす関数 u, H, Q, R から, $e^u dxdy$ を誘導計量, H を平均曲率, Qdx^2, Rdy^2 をホップ微分とする曲面を $\mathfrak{M}^3_\nu(c)$ の等長変換を除いて一意的に作ることができる (曲面論の基本定理).

以下では, 局所的な状況のみを考え, 特に断わらないことにする. 曲面はいつでも等長的に変形可能であるから ([8], [24] を見よ), 意味のある変形を考えるには何らかの幾何学的な条件を付加する必要がある. ここでは, まず, “平均曲率を保ったまま”等長的に変形することを考えよう. 曲面には常に $\mathfrak{M}^3_\nu(c)$ の等長変換群が作用するから, その 1 パラメータ部分群によって新たに得られる曲面は自明なものとして除外すべきである. このような条件の下で上の性質をみたす曲面として, ボンネは臍点をもたない (即ち, ホップ微分が消えない) 平均曲率一定曲面を挙げている ([4]). そこでここでは次のように定義しよう.

定義 臍点をもたず, 平均曲率を保ったまま, 非自明に等長的に変形できる曲面をボンネ曲面とよぶ.

3 次元空間形内の空間的ボンネ曲面については, 古くからよく調べられている (例えば, [1], [2], [5], [6], [7], [12], [13], [17], [19], [22], [23], [25] など). ここでは最初に $Q \neq 0$, $R \equiv 0$ または $Q \equiv 0$, $R \neq 0$ となる, 時間的曲面に特有なもの (空間的曲面にはホップ微分が 1 種類しか定義されないことによる) について考えよう. まず, ガウス・コダッチの方程式から容易に分かるようにこのような曲面はボンネ曲面である. 更に詳しく調べるために以下の言葉を用意する ([9], [18], [20] を見よ).

定義 $\mathfrak{M}^3_\nu(c)$ 内の曲線 $\gamma = \gamma(x)$ は,

$$\begin{cases} \dfrac{dA}{dx} = \kappa C, \\ \dfrac{dB}{dx} = -c\gamma + \tau C, \\ \dfrac{dC}{dx} = -\tau A - \kappa B \end{cases}$$

をみたすような A, B, $C \in \gamma^* T\mathfrak{M}^3_\nu(c)$ を許容するとき, null Frenet curve とよばれる. ただし, $A = \dfrac{d\gamma}{dx}$, $\langle A, A\rangle_{\nu,c} = \langle B, B\rangle_{\nu,c} = 0$, $\langle A, B\rangle_{\nu,c} = 1$ で C は A と B とのベクトル積.

定義 γ を $\mathfrak{M}^3_\nu(c)$ 内の null Frenet curve とする.

$$F(x,y) = \gamma(x) + yB(x)$$

で定まる $\mathfrak{M}^3_\nu(c)$ 内の曲面 F を γ の B-scroll とよぶ.

そこで, 上述の曲面は計量を共形的に変えることにより, 特定の κ, τ から得られる null Frenet curve の B-scroll になることが分かる. 即ち,

定理 $Q \neq 0, R \equiv 0$ または $Q \equiv 0, R \neq 0$ となる曲面はボンネ曲面で，ある null Frenet curve の B-scroll と共形的に一対一に対応する．

次に，$Q, R \neq 0$ となるボンネ曲面について考える．まず，空間的ボンネ曲面の場合には [17], [22] にまで遡ることのできる，次の事実が成り立つ．

命題 F が $Q, R \neq 0$ となるボンネ曲面であることと次に (i), (ii) とは同値．

(i) F は $\pm\theta$-isothermic ($\theta \in \mathbf{R}$)，即ち，適当な null coordinate とある M 上の局所的な関数 q に対し，

$$Q = \frac{1}{2}(q+\theta), \quad R = \pm\frac{1}{2}(q-\theta).$$

(ii)

$$q = \frac{f(x)g(y)+\theta^2}{f(x)+g(y)}$$

と表される．即ち，$\dfrac{1}{q}$ は

$$\varphi_{xy} + \frac{2\theta^2\varphi}{1-\theta^2\varphi}\varphi_x\varphi_y = 0$$

の解．

$\pm\theta$-isothermic な曲面に対しては，ガウス・コダッチの方程式において u を $-u$ に置き換え，q と H とを入れ換えることにより，別のガウス・コダッチの方程式の解を作ることができる．これはクリストッフェル変換とよばれ，新たにえられる曲面は dual surface とよばれる．平均曲率が一定の場合には dual surface は parallel surface として幾何学的に説明することができる．まとめると，

命題　異なる空間形内の $\pm\theta$-isothermic な曲面全体の集合の間に，共形的な対応をつけることができる．

$Q, R \neq 0$ となるボンネ曲面からえられる dual surface の平均曲率がみたす方程式は次のように特徴付けられる．

命題　1 次元リーマン多様体 I_c を

$$I_c = \begin{cases} (\mathbf{R}, g_c) & c = 0, 1, \\ (\mathbf{R} \setminus \{\pm 1\}, g_c) & c = -1, \end{cases} \qquad g_c = \frac{1}{(1+ct^2)^2} dt^2$$

により定めると，M から I_c へのローレンツ調和関数の方程式は

$$\varphi_{xy} - \frac{2c\varphi}{1+c\varphi} \varphi_x \varphi_y = 0.$$

そこで次のような曲面を定義することは自然であろう (空間的曲面の場合は [1], [3], [10], [11], [13], [14] を見よ).

定義　平均曲率が $\nu = 1$ のとき I_c, $\nu = 2$ のとき I_{-c} へのローレンツ調和関数となる曲面を harmonic inverse mean curvature surface (HIMC surface と略す) とよぶ．

HIMC surface については，まず，次が成り立つことが分かる．

命題　HIMC surface は HIMC surface であるという性質を保ったまま，共形的に変形可能で，更に，K をガウス曲率とすると $\dfrac{K}{H^2 + c}$ ($\nu = 1$ のとき), $\dfrac{K}{H^2 - c}$ ($\nu = 2$ のとき) はその変形で不変 ($c = 0$ のとき，$\dfrac{K}{H^2}$ が不変という条件は主曲率の比が不変という条件に置き換えることができる).

また，HIMC surface の例である平均曲率一定曲面について成り立つ Lawson 対応 ([21]) は次のように一般化される．

命題　異なる空間形内の HIMC surface 全体の集合の間に，上の変形を保つ，共形的な対応をつけることができる.

$\pm\theta$-isothermic な，ボンネ曲面については q, HIMC surface については H がローレンツ（反）正則，即ち，x または y のみの関数の場合にはガウス・コダッチの方程式は具体的に解くことができる．そうでない場合は空間的曲面のときと同様にして次が成り立つことが分かる.

定理　$\pm\theta$-isothermic な，ボンネ曲面，HIMC surface に対するガウス・コダッチの方程式は，次の Hazzidakis 方程式 ([1], [2], [3], [6], [19]) とよばれる常微分方程式に還元される.

$$\left\{\left(\frac{\psi_{ss}}{\psi_s}\right)_s - \psi_s\right\} S^2 = 2 - \frac{\psi^2+\alpha}{\psi_s}.$$

ただし，

$$S = \begin{cases} \sin s, \\ s, \\ \sinh s, \end{cases} \qquad \alpha \in \mathbf{R}.$$

最近になって Hazzidakis 方程式はパンルヴェ方程式と深い関わりのあることが [2], [3] により分かったが，ここでは，Hazzidakis 方程式の初等関数解を幾何学的な条件から調べることにする．即ち，系として次をえる.

系　$\pm\theta$-isothermic なボンネ曲面のガウス曲率 K が定数ならば，$K=0$ または c ($\nu=1$ のとき), $-c$ ($\nu=2$ のとき)，また，$\pm\theta$-isothermic な HIMC surface の $\dfrac{K}{H^2+c}$ ($\nu=1$ のとき), $\dfrac{K}{H^2-c}$ ($\nu=2$ のとき) が定数ならば，$K=0$.

上の系より更に計算を進め, [6], [7], [12], [25] に見られるように計量, ホップ微分, 平均曲率を決定することができる.

参考文献

[1] A. I. Bobenko, *Surfaces in terms of 2 by 2 matrices. Old and new integrable cases*, Harmonic maps and Integrable Systems (A. Fordy and J. C. Wood, eds.), Aspects of Mathematics, Vieweg (1994), 83–127.

[2] A. Bobenko and U. Eitner, *Bonnet surfaces and Painlevé equations*, J. reine Angew. Math. **499** (1998), 47–79.

[3] A. Bobenko, U. Eitner and A. Kitaev, *Surfaces with harmonic inverse mean curvature and Painlevé equations*, Geom. Dedicata **68** (1997), 187–227.

[4] O. Bonnet, *Mémoire sur la théorie des surfaces applicables*, J. Éc. Polyt. **42** (1867), 72–92.

[5] É. Cartan, *Sur les couples de surfaces applicables avec conservation des courbures principales*, Bull. Sci. Math. **66** (1942), 1–30.

[6] W. Chen and H. Li, *Bonnet surfaces and isothermic surfaces*, Results Math. **31** (1997), 40–52.

[7] A. G. Colares and K. Kenmotsu, *Isometric deformation of surfaces in* $\mathbf{R}^3$ *preserving the mean curvature function*, Pacific J. Math. **136** (1989), 71–80.

[8] M. Dajczer, *Submanifolds and isometric immersions*, Mathematics Lecture Series, 13. Publish or Perish, Inc., Houston, TX, (1990).

[9] M. Dajczer and K. Nomizu, *On flat surfaces in S_1^3 and H_1^3*, Manifolds and Lie groups, Progr. Math., Birkhäuser, (1981), 71–108.

[10] A. S. Fokas and I. M. Gelfand, *Surfaces on Lie groups, on Lie algebras, and their integrability. With an appendix by J. C. A. Paiva*, Comm. Math. Phys. **177** (1996), 203–220.

[11] A. Fujioka, *Surfaces with harmonic inverse mean curvature in space forms*, to appear in Proc. Amer. Math. Soc. **127** (1999), 3021–3025.

[12] A. Fujioka and J. Inoguchi, *Bonnet surfaces with constant curvature*, Results Math. **33** (1998), 288–293.

[13] A. Fujioka and J. Inoguchi, *On some generalisations of constant mean curvature surfaces*, to appear in Lobachevskii Journal of Mathematics.

[14] A. Fujioka and J. Inoguchi, *Spacelike surfaces with harmonic inverse mean curvature*, preprint.

[15] A. Fujioka and J. Inoguchi, *Timelike Bonnet surfaces in space forms*, in preparation.

[16] A. Fujioka and J. Inoguchi, *Timelike surfaces with harmonic inverse mean curvature*, in preparation.

[17] W. C. Graustein, *Applicability with preservation of both curvatures*, Bull. Amer. Math. Soc. **30** (1924), 19–23.

[18] L. K. Graves, *Codimension one isometric immersions between Lorentz spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **252** (1979), 367–392.

[19] J. N. Hazzidakis, *Biegung mit Erhaltung der Hauptkrümmungs radien*, J. reine Angew. Math. **117** (1897), 42–56.

[20] L. V. McNertney, *One-parameter families of surfaces with constant curvature in Lorentz 3-space*, Thesis, Brown University (1980).

[21] B. Lawson, *Complete minimal surfaces in S^3*, Ann. of Math. **92** (1970), 335–374.

[22] L. Raffy, *Sur une classe nouvelle des surfaces isothermiques et sur les surfaces déformables sons altèration des courbures principales*, Bull. Soc. Math. France **21** (1893), 70–72.

[23] I. M. Roussos, *Principal curvature preserving isometries of surfaces in ordinary space*, Bol. Soc. Brasil. Mat. **18** (1987), 95–105.

[24] M. Spivak, *A comprehensive introduction to differential geometry. Vol. V. Second edition*, Publish or Perish, Inc., Wilmington, Del., (1979).

[25] H. Takeuchi, *Isometric deformation of surfaces in the hyperbolic 3-manifold preserving the mean curvature*, Tokyo J. Math. **18** (1995), 247–258.

[26] T. Weinstein, *An Introduction to Lorentz Surfaces*, de Gruyter Expositions in Mathematics, 22. Walter de Gruyter & Co., Berlin, (1996).