数理解析研究所講究録
1113巻 1999年 1-8

代数的極小曲面の変形とモデュライ

上智大学理工　宮岡礼子(REIKO MIYAOKA)

§1. 序.

完備極小曲面 $f: M \to \mathbb{E}^3$ が代数的であるとは，M が $M_g \setminus \{p_1, \ldots p_r\}$ と共形同値で，M のワイエルシュトラスデータが M_g まで拡張できることである．ただし，M_g は種数 g のコンパクトリーマン面．このための必要十分条件は M が有限な全曲率をもつことである [O].

代数的極小曲面の変形の研究は，X.Mo により，ワイエルシュトラスデータをディバイザーの対として捉え，代数幾何的に扱うことから始められた．この手法については，[Y] に詳しい．また，守屋克洋氏はこの手法のもとに，$\mathbb{E}^4$ の代数的極小曲面の変形を研究し，そのモデュライの次元の下からの評価をあたえている [M]．これらの議論では，その共形構造は固定して考えられていて，曲面をレギュラーなものに限ると，必ずしも効果的な次元の評価とはならない．そこで対象を分岐点を許す曲面まで拡張して考えている．

一般に $\mathbb{E}^3$ の極小曲面を変形させると，その共形構造も変わる．例えば，よく知られているコスタ曲面の変形（真中の平坦エンドがカテノイドエンドに変わる）においては，もとの共形構造である正方形トーラスは，変形と共に長方形トーラスに変わる．この例から考えると，$\mathbb{E}^3$ の極小曲面の変形は，その位相はとめて，共形構造の変化は許すことが自然である．

そこで，ここでは $\mathbb{E}^3$ のレギュラーな代数的極小曲面の変形を共形構造の変化も許して考え，その変形空間の次元の評価を試みる．真の目的は，例えば破点付タイヒミュラー空間の中で，どの方向に，また，どのくらいの次元で，極小曲面を変形できるかを知ることであるが，ここではまだそこまでは明らかにできていない．また，より具体的に，たとえばグラフィックでその変形が見えるような新しい例を構成したいが，それについても研究中である．

一方，Puncture Set Problem, Puncture Number Problem，と呼ばれる，M_g からいくつの点をどのように除けば，$\mathbb{E}^3$ の代数的極小曲面がつくれるかという存在問題も [Y] でとりあげられ，Yang は $r \geq 4g$ が十分条件であることを示している．また $r < 4g$ でも，特殊な点（ワイエルシュトラス点など）を用いることにより，代数的極小曲面が作れることがある．コスタは $g = 1, r = 3$ なのでこの特殊な例である．このような特殊例の変形はあまり無さそうである．Puncture Number Problem についても，最近，守屋克洋氏により，研究がすすめられている．

§2. 準備

極小曲面 $f : M \to \mathbb{E}^3$ の Weierstrass 表現を考える．リーマン面 M 上の有理形関数 ψ と正則 1 形式 μ に対して，$(\psi)_\infty$ を ψ の pole divisor，$(\mu)_0$ を μ の zero divisor とする．正則条件

$$(0) \qquad [RC] \qquad 2(\psi)_\infty = (\mu)_0$$

がみたされるとき，

$$(1) \qquad \zeta^1 = \frac{1}{2}(1-\psi^2)\mu, \quad \zeta^2 = \frac{i}{2}(1+\psi^2)\mu, \quad \zeta^3 = \psi\mu$$

で与えられる $\zeta = (\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3)$ について

$$(2) \qquad \sum_{a=1}^{3}(\zeta^a)^2 = 0, \quad \sum_{a=1}^{3}|\zeta^a|^2 > 0,$$

が成立する．さらに周期条件

$$(3) \qquad [PC] \qquad \Re\int_\gamma \zeta^a = 0, \quad a = 1, 2, 3, \quad \text{for all } \gamma \in H_1(M, \mathbb{Z})$$

がみたされるとき，極小曲面が

$$(4) \qquad f = \frac{1}{2}\Re(\int_{z_0}^{z} \zeta) : M \to \mathbb{E}^3.$$

で与えられる．逆に極小曲面 $f : M \to \mathbb{E}^3$ から

$$(5) \qquad \zeta^a = \frac{\partial f^a}{\partial z}dz, \quad \mu = \zeta^1 - i\zeta^2, \quad \psi = \frac{\psi^3}{\mu},$$

を定めると，これは (0)-(4) をみたす．ただし μ が恒等的に 0，すなわち平面は，議論から除外しておく．ここで，(2) の第 1 式は共形条件，第 2 式は正則条件であることを注意しておく．

定義． [RC], [PC] をみたす (μ, ψ) を Weierstrass pair とよぶ．ふたつの Weierstrass pair (μ, ψ) と (μ', ψ') が同値とは，これらが合同な極小曲面を定義する時をいう．

以上は一般の極小曲面に対して成り立つ表現である．代数的極小曲面に対しては，データを M_g に拡張して

$$\mathrm{ord}_p\zeta := \ \min_{a=1,2,3} \mathrm{ord}_p\zeta^a, \quad p \in M_g$$

と定める．完備性から ([O, Theorem 3.1(C')])

$$\mathrm{ord}_{p_i}\zeta = -(I_i + 2), \quad I_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, r.$$

であり，次を得る．

$$(\zeta)=\sum_{p\in M_g}(\ \mathrm{ord}\ _p\zeta)p=-\sum_i(I_i+2)p_i.$$

I_i+1 はワインデイング数と呼ばれ，とくに $I_i=0$ のときエンドは埋め込みとなっている．以下，$I=\{I_1,\ldots,I_r,I_i\geq 0\}$ とおく．

次に種数 g のコンパクトリーマン面 M_g と，1 形式の 3 つ組 $(\zeta^1,\zeta^2,\zeta^3)$ が与えられていて，M_g の相異なる点 $p_1,\ldots,p_r$ に対して

$$(\zeta)=-\sum_i(I_i+2)p_i,\quad I_i\geq 0 \tag{6}$$

をみたすとする．正則 1 形式 ($g=0$ のときは有理形 1 形式) Ω を M_g にとると，ふたつの有理形関数

$$F=\frac{\zeta_1-i\zeta_2}{\Omega},\quad G=\frac{\zeta^3}{\zeta^1-i\zeta^2}, \tag{7}$$

が得られ，

$$\zeta^1=\frac{1}{2}(1-G^2)F\Omega,\quad \zeta^2=\frac{i}{2}(1+G^2)F\Omega,\quad \zeta^3=FG\Omega \tag{8}$$

が成り立つ．よって

$$(\zeta)=-2(G)_\infty+(F)+(\Omega) \tag{9}$$

が成り立ち，

$$(F\Omega,G)=(\mu,\psi)$$

とおくと (6) と (9) から $M=M_g\setminus\{p_1,\ldots.p_r\}$ 上 [RC] が得られるので，[PC] がみたされれば，Weierstrass pair を得る．

定義． M_g 上，正則 1 形式 ($g=0$ のときは有理形 1 形式) Ω と，有理形関数対 (F,G) が与えられたとき，(8) で決まる ζ が (6), (9) をみたし，さらに [PC] をみたすとき，(F,G) を (M_g,Ω) に対する Weierstrass pair という．

g と r を上のようにとる時，破点付 Teichmüller 空間 $\mathcal{T}_{g,r}$ は複素次元 $d(g,r)$ の複素多様体となる．ここに

$$d(0,r)=\max\{0,r-3\},\quad d(1,r)=\max\{1,r\},\quad d(g,r)=3g-3+r,\ \text{for}\ g\geq 2.$$

代数的極小曲面の $\mathcal{T}_{g,r}$ における変形を考えよう．まず，Mo の議論をレギュラーな場合に適用する．正の整数 m，$I=(I_1,\ldots,I_r)$, $I_i\geq 0$, コンパクトリーマン面

M_g と $\Omega \in H^0(M_g, \Omega^1)$ を固定する．ここに Ω^1 は M_g 上の正則１形式の芽のシーフ．

$$\begin{aligned} WP(M,\Omega,m,I) = \{(F,G) :\ & \text{a Weierstrass pair for } (M_g,\Omega), \\ & \deg G = m,\ \text{相異なる } p_1,\ldots,p_r \in M_g \text{ に対し} \\ & -\sum (I_i+2)p_i = -2(G)_\infty + (F) + (\Omega), \\ & (8) \text{ で定める } \zeta \text{ は [PC] をみたす}\}. \end{aligned}$$

とおき，さらに

$$AP(M,\Omega,m,I) = \{(F,G) \text{ で [PC] 以外の } WP \text{ の条件をみたすもの}\},$$

とおくと，AP は

$$DAP = \{((F),(G)) : (F,G) \in AP\} \subset \mathrm{Div}^0(M_g) \times \mathrm{Div}^0(M_g)$$

上のファイバー $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ をもつファイバー束．他方，DAP は次で与えられる DAP' の analytic subvariety.

$$\begin{aligned} DAP' = \{(D_1,D_2) \mid D_1 = -\sum_{i=1}^{r}(I_i+2)p_i + 2\sum_{a=1}^{m} y_a - (\Omega), D_2 = \sum (x_a - y_a), \\ \text{ここに } \{x_a, y_a\} \subset M \text{ は } \{x_a\} \cap \{y_a\} = \emptyset \text{ をみたす}\}. \end{aligned}$$

各空間の関係図は次のようになる．

$$\begin{array}{ccc} WP \hookrightarrow AP & & \\ & \delta \big\downarrow & \leftarrow \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \\ & DAP \ \subset DAP' \ \subset Div^0 \times Div^0 & \end{array}$$

容易に DAP' が複素 $(2m+r)$ 次元の complex analytic subvariety で，DAP が DAP' の $(\dim_{\mathbb{C}} DAP' - 2g)$ 次元以上の analytic subvariety であることがわかる．実際 u を M_g の Jacovian variety への Jacobi map

$$u : \mathrm{Div}^0(M_g) \to J(M_g),$$

とするとき，$DAP' = (u \times u)^{-1}(0,0)$. AP は $\delta : AP \to DAP$ が正則ファイバー束であるような complex analytic subvariety structure をもつので，$AP \neq \emptyset$ のとき，$\dim_{\mathbb{C}} AP \geq 2m - 2g + r + 2$. $WP \neq \emptyset$ のとき，$WP \ni (F,G)$ の AP における近傍の点 (F',G') に対し，[PC] を考慮に入れ，すなわち $\gamma \in H^1(M,\mathbb{Z})$ に対する $3(2g+r-1)$ 個の analytic relations $\int_\gamma \zeta^a_{F',G'} = \int_\gamma \zeta^a_{F,G}$ をみたすものを数えて，Mo は次を得た：

命題 [Y]. $WP \neq \emptyset$ のとき，これは少なくとも複素 $(2m-8g-2r+5)$ 次元の *complex analytic subvariety* を含む.

注意 1. この下からの評価は効果的でない場合が多いこともあり，Mo は分岐点を許すことにより，分岐点の全位数を k とするときは複素 $(2m-8g-2r+5+k)$ 次元の complex analytic subvariety を含むことを示した.

注意 2. $\Omega, \Omega' \in H^0(M_g, \Omega^1)$ とするとき，

$$AP(M, \Omega, m, I) \cong AP(M, \Omega', m, I)$$

である．なぜなら，$F' = F\dfrac{\Omega}{\Omega'}$ とすると，$(F, G) \mapsto (F', G)$ が同型対応を与えるから．したがって M_g 上 Ω を固定して考えて差しつかえはない.

次節では，分岐点は許さないまま，$\mathcal{T}_{g,r}$ 上の変形を考え，よりよい評価を試みる.

§2. Teichmüller 空間での変形

$\mathcal{T}_g$ で種数 g のコンパクトリーマン面の Teichmüller 空間を表す．M_c で複素構造 $c \in \mathcal{T}_g$ をもつリーマン面を表す．ファイバー M_c をもつファイバー束 $f : \mathcal{C} \to \mathcal{T}_g$ を考える．$\mathcal{C}$ が $\mathcal{T}_g$ およびそのファイバー上の複素構造と両立する複素構造を持つことはよく知られている．$c \in \mathcal{T}_g$ に対して，M_c^d で M_c の d-fold Cartisian product を表し，$\mathrm{Simple}^d(M_c) = \{\Sigma \subset M_c^d : \Sigma$ は M_c の d 個の相異なる点からなる$\}$ とおく．$\mathrm{Simple}^d(M_c)$ は M_c^d の proper analytic subvariety の補集合なので，generic subset である.

$\mathcal{T}_{g,d}$ を $\mathcal{T}_g$ 上のファイバー $\mathrm{Simple}^d(M_c)$ をもつファイバー束とする．$\mathcal{T}_{g,d}$ の点は $c \in \mathcal{T}_g$ と相異なる点 $p_1, \ldots, p_d \in M_c$ で $c_p = (c; p_1, \ldots p_d)$ と書けて $\mathcal{T}_{g,r}$ は破点付 Teichmüller 空間である．$\mathcal{C}$ 上の複素構造は $\mathcal{T}_{g,r}$ 上に自然な誘導複素構造を定める.

$\pi_d : \mathcal{T}_{g,d} \to \mathcal{T}_g$ を自然な射影とし，$\mathcal{C}_d = \pi_d^* \mathcal{C}$ とおく．すなわち $\mathcal{C}_d$ の点 $(c_p; x)$ は $c_p = (c, p_1, \ldots, p_d) \in \mathcal{T}_{g,d}$ と $x \in M_c$ からなる．$(a_1, \ldots, a_d) \in \mathbb{Z}^d$ とすると，$s_i(c_p) := (c_p; a_i p_i)$ は $\mathcal{C}_d$ の正則断面だから，$D_i = \mathrm{Image}\ s_i$ は $\mathcal{C}_d$ の超曲面である．これから $\mathcal{C}_d$ 上の divisor $D = \sum_{i=1}^r D_i$ を得る．したがって各 $(a_1, \ldots, a_d)$ に対し，$\mathcal{C}_d$ 上の degree $\sum a_i$ の divisor を得る.

$\hat{\varpi} : \mathcal{F} = \Omega^1_{\mathcal{C}_d} / f^* \Omega^1_{\mathcal{T}_{g,d}} \to \mathcal{C}_d$ を $\mathcal{C}_d$ 上の realtive 1-forms のシーフとする．また $\varpi : (f_d)_* \mathcal{F} \to \mathcal{T}_{g,d}$ を $\mathcal{T}_{g,d}$ 上の direct image sheaf とすると，$(f_d)_* \mathcal{F}$ はランク g の複素ベクトル束で，そのファイバーは M_c 上の正則 1 形式からなる．$\tilde{\mathcal{C}}_d = \varpi^* \mathcal{C}_d$ とおく.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{F} \arrow[r, "\hat{\varpi}"] \arrow[d, "(f_d)_*"'] & \mathcal{C}_d \arrow[r] \arrow[d, "f_d"'] & \mathcal{C} \arrow[d, "f"'] \\
\tilde{\mathcal{C}}_d \arrow[r] & (f_d)_* \mathcal{F} \arrow[r, "\varpi"] & \mathcal{T}_{g,d} \arrow[r, "\pi_d"] & \mathcal{T}_g
\end{tikzcd}$$

$a_i, b \in \mathbb{Z}$ に対して，$\tilde{C}_d$ 上の divisor を次で定める．

$$D = \sum_{i=1}^{d} a_i \iota^* D_i + b(\Omega),$$

ただし $\iota : \tilde{C}_d \to C_d$ は自然なうめこみである．$d = r + 2m$, $p = (q_i, x_a, y_a)$, $1 \leq i \leq r$, $1 \leq a \leq m$ とおこう．$\tilde{C}_d$ 上のふたつの divisors D_1 and D_2 を

$$D_1(c_p, \Omega) = -\sum (I_i + 2) q_i + 2 \sum y_a - (\Omega)$$
$$D_2(c_p, \Omega) = \sum (x_a - y_a)$$

で各 $(c_p, \Omega) \in (f_d)_* \mathcal{F}$ で定める．ここに $I_i \geq 0$ は $\deg D_1(c_p, \Omega) = 0$, i.e.

$$\sum_{i=1}^{r} I_i = 2(m - g - r + 1) \geq 0, \tag{10}$$

なるよう固定しておく．

$\mathcal{J}_g \to \mathcal{T}_g$ をファイバーが $c \in \mathcal{T}_g$ における M_c の Jacobian variety で与えられるファイバー束とする．実際，M_c の周期行列の第 2 成分は up to $Sp(g, \mathbb{Z})$ で Siegel upper half domain

$$H_g = \{Z \in \mathrm{GL}(g, \mathbb{C}) : {}^t Z = Z, \Im Z > 0\},$$

できまり，写像 $j : \mathcal{T}_g \to H_g / Sp(g, \mathbb{Z})$ が得られる．$H_g / Sp(g; \mathbb{Z})$ 上の誘導複素構造に関して，j は正則である．$\mathcal{T}_g$ は contractible だから，正則持ち上げ $j : \mathcal{T}_g \to H_g$ がとれ，j による像を Jacobian variety を定義する $\mathbb{C}^g$ の格子と考えることにより，$\mathcal{J}_g = \mathcal{T}_g \times_j \mathbb{C}^g$ が定まる．

他方 $Div^0(\tilde{C}_d)$ を degree 0 の divisor の空間，つまり $\tilde{C}_d$ の各ファイバーに制限したものが degree 0 である divisor の空間とする．アーベル群構造を $Div^0(\tilde{C}_d)$ と $\mathcal{J}_g$ にファイバーごとの加法則でいれることにより，これらは abelian varieties となる．Jacobi map

$$\mu : Div^0(\tilde{C}_d) \to \mathcal{J}_g$$

を

$$\mu(c, D) = \mu_c(D)$$

で定める．ここに $\mu_c : Div^0(M_c) \to j(c)$ は通常の Jacobi map である．μ_c は，したがって μ は線形写像であることに注意．Abel の定理から $Div^0(M_c) \ni D$ は $D \in \mathrm{Ker}\mu_c$ のとき principal divisor である．

命題．$WP \neq \emptyset$ ならば，$g \geq 1$ に対し，WP は複素次元 $2(m - 2g - r + 1)$ ($g = 0$ のときは $\max\{0, r - 3\} - 3r + 5$) 以上の complex analytic subvariety を含む．

証明．まず $\dim_{\mathbb{C}} AP \geq 2m + 2g + r - 1$ を示す．divisor D_1 と D_2 は $\mathrm{Ker}\mu$ に属する時 principal divisors である．したがって D_1 と D_2 は各々高々 g 個の独立な方

程式をみたさなければならない．$\dim_{\mathbb{C}} \tilde{C}_d = 3g-3+r+2m+g = 2m+4g+r-3$ および $AP \to DAP$ はファイバー $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ のファイバー束だから，

$$\dim_{\mathbb{C}} AP \geq (2m+4g+r-3)-2g+2 = 2m+2g+r-1.$$

他方，周期条件 [PC] は，ζ は F と G に正則に依存するから，$3(2g+r-1)$ 個の AP 上の解析的方程式である．したがって $WP \ni (F,G)$ の近傍には複素次元 $(2m+2g+r-1)-3(2g+r-1) = 2(m-2g-r+1)$ 以上の complex analytic subvariety が存在する．$g=0$ についても同様． □

注意 **3.** WP の定義で述べられている条件

$$-\sum (I_i+2)p_i = -2(G)_\infty + (F) + (\Omega)$$

と

$$I_i \geq 0$$

から，

$$\sum_{i=1}^{r} I_i = 2(m-g-r+1) \geq 0$$

が必要条件となっている．したがって

$$\dim_{\mathbb{C}} WP \geq 2(m-2g-r+1) = \sum_{i=1}^{r} I_i - 2g$$

を得る．すなわち各エンドでのワインディング数が大きいほど変形のパラメーターが大きい．逆にエンドが埋め込まれた極小曲面は変形しにくいということになる．

注意 **4.** 注意 2 に述べたことから，Ω の自由度 g は見かけのみで，少なくとも複素次元

(10) $$2m-5g-2r+1$$

の変形パラメーターが本質的である．したがって，Mo の結果との差は $(3g-3)$ 次元，すなわち Teichmüller 空間 T_g の次元分の評価がよくなっている．しかしこれは，T_g のどの方向にも極小曲面を変形できることを意味するのではないことに注意しておく．

注意 **5.** 実次元の評価を得ることは，むずかしい．実解析関数のレベルセットの次元は一般に評価することはできないので，[PC] はここでは複素条件としてとらえている．

§3. 例.

ここでは，非自明な変形をもつ代数的極小曲面の例を与えよう．コスタ曲面の一般化である，トーラスから 4 点を除いた完備極小曲面族が [MS] で次のように構成された．格子

$$L = \{\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}\}, \quad i = \sqrt{-1}$$

に対する Weierstrass の $\mathfrak{p}$ 関数

$$(\mathfrak{p}')^2 = 4\mathfrak{p}^3 - g_2\mathfrak{p} = 4\mathfrak{p}(\mathfrak{p}^2 - a^2), \quad g_2 = 4a^2, \quad 0 < a = \mathfrak{p}(\frac{1}{2}) \in \mathbb{R},$$

を用いて，楕円曲線

$$M_1 : \mathbb{C}/L \ni z \mapsto [1, \mathfrak{p}(z), \mathfrak{p}'(z)] \in \mathbb{C}P^2$$

を考える．代数的極小曲面 $\psi_j : M = M_1 \backslash \{p_1, p_2, p_3, p_4\} \to \mathbb{E}^3$, $p_1 = (0,0)$, $p_2 = (a,0)$, $p_3 = (-a,0)$, $p_4 = (\infty,\infty)$, を次のデータでつくることができる．

(1) $G = \dfrac{1}{\mathfrak{p}^j\mathfrak{p}'}, \quad Fdz = \dfrac{\mathfrak{p}d\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}'}, \quad j = 1, 2, 3 \ldots$

(2) $G = \dfrac{1}{\mathfrak{p}^j\mathfrak{p}'}, \quad Fdz = \dfrac{\mathfrak{p}^{j+1}d\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}'}, \quad j = 2, 4, 6, \ldots$

このとき $\deg G = 2j+3$ である．どちらも $j = 0$ とおくとコスタ曲面の Weierstrass data となっているので，これらはコスタ曲面の一般化であるといってよい（コスタの除外点は p_2, p_3, p_4 の 3 点となる）．いま，

$$2m - 5g - 2r + 2 = 2(2j + 3) - 5 - 8 + 2 = 4j - 5$$

なので，$j \geq 2$ ならばこの曲面は複素次元 3 以上の変形パラメーター空間をもつ．$\mathbb{E}^3$ の合同変換と，相似変換の次元を除いても実 2 次元以上あるので，これは非自明な変形をもつことがわかるが，その具体的記述や，Teichmüller 空間での動きは定かではない．また，この例はガウス写像が 2 点を除外する正の種数をもつ極小曲面の無限個の例を与えているので，変型により，除外値がどうかわるかも興味深い．

上の曲面のグラフィックは [MS] および佐藤勝憲氏のホームページにあるので参考にしてほしい．また，佐藤氏は種数 1 のトリノイドの変型のグラフィックも作成している（未公開）．

http://spaceboy.is.titech.ac.jp/ ksato/minimal/

References

[M] K. Moriya, *On a variety of algebraic minimal surfaces in Euclidean 4-space*, Tokyo J. Math. **21** (1998), 121–134.

[MS] R. Miyaoka and K. Sato, *On complete minimal surfaces whose Gauss map misses two directions*, Arch. Math. **63** (1994), 565-576.

[O] R. Osserman, *Global properties of minimal surfaces in* $\mathbb{E}^3$ *and* $\mathbb{E}^n$, Ann. Math. **80** (1964), 340-364.

[Y] K. Yang, Complete minimal surfaces of finite total curvature, Kluwer Acad. Pub., 1994.