数理解析研究所講究録
1114 巻 1999 年 42-45

Danskin 公式における maximand の正則性について*
Regularity of the objective function for the Danskin's formula

富山大学経済学部　白石俊輔 (SHIRAISHI Shunsuke)

1 序

2変数関数 $f: W \times X \to R$ に対し

$$m(w) := \sup_{x \in C} f(w, x),$$

によって定義される関数を marginal function という。ただし、parameter space を表す W はノルム空間、decision space を表す X は距離空間とし、$C \subset X$ を空でないコンパクト集合とする。Marginal function の方向微分 (directional derivative)：

$$m'(w, u) = \lim_{t \to 0_+} t^{-1}(m(w + tu) - m(w)),$$

をその 被最大化関数（maximand, objective function) $f_x(\cdot) := f(\cdot, x)$ の方向微分：

$$f'_x(w, u) = \lim_{t \to 0_+} t^{-1}(f(w + tu, x) - f(w, x)),$$

で表す公式として、次の Danskin 公式がよく知られている。

$$m'(w, u) = \sup_{x \in S(w)} f'_x(w, u). \tag{1}$$

ただし、$S(w) := \{x \in C : f(w, x) = m(w)\}$ は解集合である。もちろん、(1) が成立するためには、f に（もう少し正確に言えば $f'_x(w, u)$ に）何らかの条件が必要である。ここでは Danskin 公式 (1) が成立するぎりぎりの条件とはなにか考えることにする。

2 Clarke 正則

本来、Clarke の一般化方向微分 (generalized directional derivative [1]) は、局所リプシツ関数に対して定義されるものだが、あえて局所リプシツでない m に対しても、次式で $m^\circ(w, u)$ を定め、やはり Clarke の一般化方向微分と呼ぶことにする：

$$m^\circ(w, u) := \limsup_{(t, w') \to (0_+, w)} t^{-1}(m(w' + tu) - m(w')).$$

また、$m'(w, u)$ が存在し、$m'(w, u) = m^\circ(w, u)$ が成立するとき m は Clarke 正則であるという。一方 maximand f の方については：

$$f^\circ(w, x, u, 0) := \limsup_{(t, w', x') \to (0_+, w, x)} t^{-1}(f(w' + tu, x') - f(w', x')),$$

を考える。

*This research is partially supported by the Grant-in Aid for General Scientific Research from the Ministry of Education, Science and Culture, No. 11440033.

Theorem 1 関数 f は連続であり、C はコンパクトであるとする。このとき任意の $x \in S(w)$ に対し、

$$f^\circ(w, x, u, 0) = f'_x(w, u) \tag{2}$$

が成立するならば、m は *Clarke* 正則となり、*Danskin* 公式

$$m^\circ(w, u) = m'(w, u) = \sup_{x \in S(w_0)} f'_x(w_0, u)$$

が成立する。

Proof: 任意の $x \in S(w)$ に対し、明らかに $f'_x(w_0, u) \leq m'(w, u) \leq m^\circ(w, u)$ が成り立つことに注意しておく。ここで、$w_n \to w, t_n \to 0_+$ を

$$\limsup_{n\to\infty} t_n^{-1}(m(w_n + t_n u) - m(w_n)) = m^\circ(w, u),$$

となるようにとる。f が連続で C がコンパクトであることから $\exists x_n \in S(w_n + t_n u)$ s.t. $\exists x = \lim_{n\to\infty} x_n \in S(w)$ として良い。従って、

$$\begin{aligned} m^\circ(w, u) &\leq \limsup_{n\to\infty} t_n^{-1}(f(w_n + t_n u, x_n) - f(w_n, x_n)) \\ &\leq f^\circ(w, x, u, 0) \\ &= f'_x(w, u), \end{aligned}$$

が言える。最後の等式で条件式 (2) を使った。 □

定理 1 では Danskin 公式が成立するだけでなく、marginal function が Clarke 正則になるというかなり強いことまで言えてしまう。実際、定理 1 にあらわれた条件 (2) は次に見るようにかなり強い条件である。ここで、

$$\overline{D}f'_x(w, u) := \limsup_{t\to 0_+} t^{-1}(f(w + tu, x) - f(w, x))$$

とおく。

Proposition 2 ([2]) 連続関数 f に対し次は同値である。

(*a*) 条件 (2) が成立する。

(*b*) $\limsup_{(w', x')\to(w, x)} \overline{D}f'_{x'}(w', u) \leq f'_x(w, u)$.

3 Danskin 公式

それでは、Danskin 公式の成立にのみ着目したばあい、どのような条件があればよいのであろうか？それに答えるのが次の条件である。

$(H)_x$ $\overline{D}f'_x(w, u) = \limsup_{(t, x')\to(0_+, x)} t^{-1}(f(w + tu, x') - f(w, x))$.

Theorem 3 関数 f は連続であり、C はコンパクトであるとする。このとき任意の $x \in S(w)$ に対し、$(H)_x$ が成立するならば、*Danskin* 公式

$$\overline{D}m'(w, u) = \max_{x \in S(w)} \overline{D}f'_x(w, u) \tag{3}$$

が成立する。

もちろんここで、

$$\overline{D}m'(w, u) := \limsup_{t\to 0_+} t^{-1}(m(w + tu) - m(w))$$

である。

Proof: 任意の $x \in S(w)$ に対し、$f'_x(w_0,u) \le m'(w,u)$ が成り立つので、$\max_{x\in S(w)} \overline{D}f'_x(w,u) \le \overline{D}m'(w,u)$ は明らか。ここで、$t_n \to 0_+$を

$$\limsup_{n\to\infty} t_n^{-1}(m(w+t_nu)-m(w)) = \overline{D}m'(w,u),$$

となるようにとる。f が連続で C がコンパクトであることから $\exists x_n \in S(w+t_nu)$ s.t. $\exists x = \lim_{n\to\infty} x_n \in S(w)$ として良い。従って、

$$\begin{aligned}\overline{D}m'(w,u) &\le \lim_{n\to\infty} t_n^{-1}(f(w+t_nu,x_n)-f(w,x)) \\ &\le \limsup_{(t,x')\to(0_+,x)} t^{-1}(f(w+tu,x')-f(w,x)) \\ &= \overline{D}f'_x(w,u),\end{aligned}$$

が言える。最後の等式で条件式 $(H)_x$ を使った。 □

条件 $(H)_x$ は次のような意味で、Danskin 公式を成り立たせるための最も弱い条件であるといえる。ここで $S(w,u) := \{x \in S(w) : \overline{D}f'_x(w,u) = \overline{D}m'(w,u)\}$ とする。

Theorem 4 関数 f は連続であり、C はコンパクトであるとする。このとき *Danskin* 公式 (3) が成立するならば、任意の $x \in S(w,u)$ に対し、$(H)_x$ が成立する。

Proof: 今 Danskin 公式が成立しているとしよう。このとき $x \in S(w,u)$ に対し、次の式が成立する。

$$\begin{aligned}\overline{D}f'_x(w,u) &\le \limsup_{(t,x')\to(0_+,x)} t^{-1}(f(w+tu,x')-f(w,x)) \\ &\le \limsup_{t\to 0_+} t^{-1}(m(w+tu)-m(w)) \\ &= \overline{D}m'(w,u) \\ &= \overline{D}f'_x(w,u)\end{aligned}$$

従って、$(H)_x$ が成立する。 □

- - - - - - - 余談 - - - - - - -

(3) 式が sup でなくて、max であることに注意してほしい。実は $(H)_x$ を仮定すると、$x' \mapsto \overline{D}f'_x(w,u)$ がコンパクト集合 $S(w)$ 上で上半連続になることが分かる。これが max を attain するからくりである。

- - - - 余談 おしまい- - - -

4 もういちど Clarke 正則

Clarke 正則性について、定理 4 の様なことはいえるだろうか？すなわち、次の問いを考えることになる。

Assertion 5 m の正則性も含め、*Danskin* 公式

$$m^\circ(w,u) = m'(w,u) = \max_{x\in S(w_0)} f'_x(w_0,u) \tag{4}$$

が成立するならば、f は *Clarke* 正則、すなわち

$$f^\circ(w,x,u,0) = f'_x(w,u). \tag{5}$$

これは、残念ながら成立しない。

Example 6 $C = \{1,2\}$ とし、$f_i(w) := f(w,i), i = 1,2$ を次のように定める。

$$
\begin{aligned}
f_1(w) &= \min(0, w^2 \sin \tfrac{1}{w}) \\
f_2(w) &= \min(0, -w^2 \sin \tfrac{1}{w})
\end{aligned}
$$

このとき、$m(w) = \max(f_1(w), f_2(w)) = 0$ である。また、$w = 0, u = 1$ に対して

$$
\begin{aligned}
f_i'(w, u) &= 0 \\
f^\circ(w, i, u, 0) &= 1
\end{aligned}
$$

となることが分かる。したがって (4) は成立しているものの (5) は成立しないのである。

References

[1] Clarke, F.H.: Generalized gradients and applications, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **205** (1975) 247–262.

[2] Cominetti, R.and Correa, R.: A generalized second-order derivative in nonsmooth optimization, *SIAM J. Control and Optim.*, **28** (1990) 789–809.

[3] Correa, R.and Seeger, A.: Directional derivative of a minimax function, *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, **9** (1985) 13–22.

[4] Danskin, J.M.: *The Theory of Max-Min and its Applications to Weapons Allocations Problems*, Springer-Verlag, Berlin, (1967).

[5] Fiacco, A.V.: *Introduction to Sensitivity and Stability Analysis in Nonlinear Programming*, Academic Press, New York, (1983).

[6] Furukawa, N.: Optimality conditions in nondifferentiable programming and their applications to best approximations, *Appl. Math. Optim.*, **9** (1983) 337–371.

[7] Jofre, A.and Penot, J.-P.: A note on the directional derivative of a marginal function, *Rev. Mat. Apl.*, **14** (1993) 37–54.

[8] Kawasaki, H.: First- and second-order directional derivatives of a max-type function induced from an inequality state constraint, *Bulletin of Informatics and Cybernetics*, **29** (1997) 41–49.

[9] Penot, J.-P.: Central and peripheral results in the study of marginal and performance functions, in *Mathematical programming with data perturbations*, Edited by Fiacco A.V., Marcel Dekker (1998) 305–337.

[10] Penot, J.-P.: Points de vue sur l'analyse sensibilié en programmation mathématique, in *Actes des sixièmes journées Poitiers du groupe MODE* , (1999).

[11] Seeger, A.: Second order directional derivatives in parametric optimization problems, *Math. Oper. Res.*, **13** (1988) 124–139.

[12] Shiraishi, S.: A note on directional differentiability of max-functions, THE FUDAI KEIZAI RONSHU, **38** (1993) 149–157.